Lukuteoria 1 2023

Harjoitus 2: ratkaisuja

1. Muunna binaariluku 1011101 10-järjestelmän ja 7-järjestelmän luvuiksi.
Muunna 10-järjestelmän luku 175 binaariluvuksi ja 3-järjestelmän luvuksi.

Ratkaisu. $1011101_2 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 1 = 93 = 162_7$
$175 = 10101111_2 = 20111_3$

2. Muunna heksadesimaaliluku `ABC` binaariluvuksi ja desimaaliluvuksi.
Muunna binaariluku 111000111 heksadesimaaliluvuksi.

Ratkaisu. Desimaalilukuna $\texttt{ABC} = 10 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16 + 12 = 2748$.
Binaarilukuna $\texttt{ABC} = 101010111100_2$, sillä $\texttt{A} = 1010$, $\texttt{B} = 1011$ ja $\texttt{C} = 1100$.
Binaariluku 111000111 muunnetaan heksadesimaaliluvuksi jakamalla se neljän merkin mittaisiksi paloiksi oikeasta reunasta alkaen. Koska $0111 = \texttt{7}$ ja $1100 = \texttt{C}$, saamme $111000111_2 = \texttt{1C7}$.

3. Todista Lause 1.20.

Ratkaisu. Esitetään $n \in \mathbb{N}$ kymmenjärjestelmän summana

$$\begin{aligned} n &= \sum_{j=0}^{\infty} 10^j a_j \\ &= \sum_{j=3}^{\infty} 10^j a_j + (a_2 a_1 a_0)_{10} \\ &= 10^3 \sum_{i=0}^{\infty} 10^i a_{i+3} + (a_2 a_1 a_0)_{10} \\ &= 8 \cdot 5^3 \sum_{i=0}^{\infty} 10^i a_{i+3} + (a_2 a_1 a_0)_{10}. \end{aligned}$$

Täten n on jaollinen luvulla 8 jos ja vain jos luku $a_2 a_1 a_0$ on jaollinen luvulla 8.

4. Tutki luvun 1.5 jaollisuussääntöjen avulla, onko luku 3581721 jaollinen luvuilla 2, 3, 4, 5, 9, 10 tai 11.

Ratkaisu. Koska $1 \notin \{2, 4, 6, 8, 0\}$, luku 3581721 ei ole jaollinen luvulla 2.
Koska $3 + 5 + 8 + 1 + 7 + 2 + 1 = 27$ ja $3 \mid 27$ sekä $9 \mid 27$, luku 3581721 on jaollinen luvuilla 3 ja 9.
Koska $4 \nmid 21$, luku 3581721 ei ole jaollinen luvulla 4.
Koska $1 \notin \{5, 0\}$, luku 3581721 ei ole jaollinen luvuilla 5 ja 10.
Koska $3 - 5 + 8 - 1 + 7 - 2 + 1 = 11$ ja $11 \mid 11$, luku 3581721 on jaollinen luvulla 11.

5. Osoita, että 7-järjestelmän luku $dcba_7$ on jaollinen luvulla 6, jos ja vain jos

$$6 \mid (a+b+c+d)\,.$$

Ratkaisu. Väite todistetaan samaan tapaan kuin luvussa 1.5 osoitetaan, että 10-järjestelmän luku 2481 on jaollinen luvulla 9. Lemman 1.24 nojalla $6 \mid 7^k - 1$ kaikilla $k \geqslant 1$, joten

$$\begin{aligned} dcba_7 &= d\cdot(7^3-1)+d+c\cdot(7^2-1)+c+b\cdot(7-1)+b+a \\ &= \big(d\cdot(7^3-1)+c\cdot(7^2-1)+b\cdot(7-1)\big)+d+c+b+a\,. \end{aligned}$$

Väite seuraa Lauseen 1.3 nojalla, koska suluissa oleva lauseke on jaollinen luvulla 6 Lauseen 1.3(3) nojalla.

Väitteen voi osoittaa myös vetoamatta Lemmaan 1.24. Lasketaan ensin

$$\begin{aligned} dcba_7 &= d\cdot 7^3 + c\cdot 7^2 + b\cdot 7 + a \\ &= d(6+1)^3 + c(6+1)^2 + b(6+1) + a \\ &= d(6^3+3\cdot 6^2+3\cdot 6+1) + c(6^2+2\cdot 6+1) + b(6+1) + a \\ &= 6\big((6^2+3\cdot 6+3)d + (6+2)c + b\big) + d + c + b + a\,. \end{aligned}$$

Päättely tehdään loppuun kuten ensimmäisessä versiossa.

6. Määritä kokonaislukujen 126 ja 308 yhteiset tekijä ja suurin yhteinen tekijä.

Ratkaisu. Luvun 1.4 jaollisuussääntöjen nojalla $9 \mid 126$ ja osoittautuu, että

$$126 = 9\cdot 14 = 2\cdot 7\cdot 9\,.$$

Siis luvun 126 tekijät ovat $\pm1, \pm2, \pm7, \pm14, \pm18, \pm63$ ja ±126. Vastaavasti huomaamme, että $4 \mid 308$ ja saamme

$$308 = 4\cdot 77 = 4\cdot 7\cdot 11\,,$$

joten luvun 308 tekijät ovat $\pm1, \pm2, \pm4, \pm7, \pm11, \pm14, \pm22, \pm28, \pm44, \pm77, \pm154$ ja ±308. Siis yhteiset tekijät ovat $\pm1, \pm2, \pm7, \pm14$ ja $\mathrm{syt}(126, 308) = 14$.

7. Onko yhtälöillä $126x - 308y = 1$ ja $93x + 11y = 1$ kokonaislukuratkaisuja?

Ratkaisu. Edellisessä tehtävässä näimme, että $\mathrm{syt}(126, 308) = 14$, joten Seurauksen 2.9 nojalla yhtälöllä $126x - 308y = 1$ ei ole ratkaisuja.

Luvun 11 tekijät ovat ±1 ja ±11 ja $11 \nmid 93$, joten $\mathrm{syt}(11, 93) = 1$. Seurauksen 2.9 nojalla yhtälöllä $93x + 11y = 1$ on ratkaisuja.

8. Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}$ kokonaislukuja, joille $\mathrm{syt}(a, 4) = \mathrm{syt}(b, 4) = 2$. Määritä $\mathrm{syt}(a + b, 4)$.

Ratkaisu. Oletuksen mukaan $4 \nmid a$ ja $4 \nmid b$, joten on $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$, joille $a = 2(2a_0 + 1)$ ja $b = 2(2b + 1)$. Siis $a + b = 4(a_0 + b_0 + 1)$, joten $4 \mid a + b$. Koska 4 on luvun 4 suurin tekijä ja luvun $a + b$ tekijä, saamme $\mathrm{syt}(a + b, 4) = 4$.