

**Geometrian jatkokurssi**  
**Harjoitus 6, 11.12.2014**

Näissä tehtävissä  $\mathbb{H}^n$  tarkoittaa ylempää puoliavaruusmallia.

1. Todista Propositio 8.4 ja havainnollista isometrioita kuvilla tapauksessa  $n = 2$ .
2. Mikä tahansa puolitasomallin kolmio voidaan kuvata isometrialla kolmioksi, jonka kärjet  $A$  ja  $B$  ovat euklidisella yksikköympyrällä ja kärkien  $A$  ja  $C$  ensimmäinen koordinaatti on sama. Miten tarvittava kuvaus muodostetaan?

3. Olkoon  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{H}^2$  ja olkoon  $g_a: \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbb{H}^n$ ,

$$g_a(t) = (a_1, a_2 e^t).$$

Osoita, että  $g_a$  on geodeesinen viiva. Olkoot  $x, y \in \mathbb{H}^2$ ,  $x \neq y$ . Määritä raja-arvot

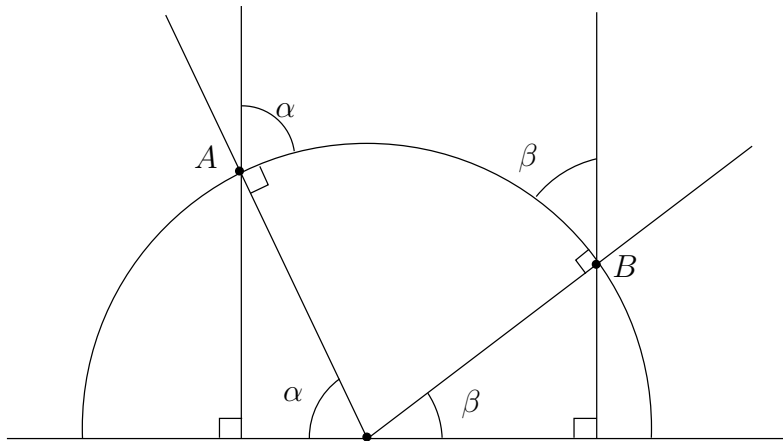
$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(g_x(t), g_y(t)) \quad \text{ja} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} d(g_x(t), g_y(t)).$$

4. Olkoon  $x_0 \in \mathbb{H}^2$  ja olkoon  $r > 0$ . Määritä ympyrän

$$\{x \in \mathbb{H}^2 : d_{\mathbb{H}^2}(x, x_0)\} = r$$

euklidinen keskipiste ja säde.

5. Määritä kuvan pisteiden  $A$  ja  $B$  hyperbolinen etäisyys.



6. Olkoon  $r > 0$  ja olkoon  $\iota \in \text{Isom } \mathbb{H}^n$  puolitasomallin isometria  $\iota(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$ . Olkoon  $B = \{x \in \mathbb{H}^2 : \|x - (0, r)\| = r\}$  avoin euklidinen pallo. Määritä kuvajoukko  $\iota(B)$ .