Geometrian jatkokurssi
Harjoitus 2, 13.11.2014

1. Olkoot $p, q \in \mathbb{E}^n$. Osoita, että seuraava yhtälö pätee:

$$\{x \in \mathbb{E}^n : d(x,p) = d(x,q)\} = \frac{p+q}{2} + (p-q)^{\perp}\,.$$

2. Olkoon M affiini m-taso euklidisessa avaruudessa $\mathbb{E}^n$. Osoita, että on euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^n$ isometria ϕ, jolle pätee

$$\phi(M) = \{x \in \mathbb{E}^n : x_i = 0 \text{ kaikilla } i \geq m+1\}\,.$$

3. Todista euklidisen geometrian sinilause kosinilauseen avulla.

4. Euklidisen tason jokaisen tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat $\frac{\pi}{3}$ ja sivujen yhteinen pituus voi olla mikä tahansa. Millaisia ovat pallonpinnan $\mathbb{S}^2$ tasasivuiset kolmiot?

Olkoon tehtävissä 5–7 $A \in \mathrm{O}(3)$.

5. Osoita, että

(a) matriisin A ainoat mahdolliset reaaliset ominaisarvot ovat -1 ja 1.

(b) 1 tai -1 on matriisin $A \in \mathrm{O}(3)$ ominaisarvo.

6. Osoita, että on matriisi $A_0 \in \mathrm{O}(2)$ siten, että A on konjugaatti ryhmässä $\mathrm{O}(3)$ blokkidiagonaalimatriisin $\mathrm{diag}(A_0, 1) = \begin{pmatrix} A_0 & \\ & \pm 1 \end{pmatrix}$ kanssa.

7. Millainen kuvaus A on, jos A_0 on tason kierto? Entä, jos A_0 on tason peilaus?