Sisältö

Merkintöjä

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ luonnolliset luvut.
- $\#(A) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ joukon A alkioiden lukumäärä.

- $A - B = \{a \in A : a \notin B\}$ joukkojen A ja B erotus.
- $\mathscr{F}(X,Y) = \{f\colon X \to Y\}$ kaikkien kuvausten $f\colon X \to Y$ joukko.
- $\mathscr{B}(X,\mathbb{R})$ rajoitettujen funktioiden $f\colon X \to \mathbb{R}$ avaruus.
- $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = \{u : \exists \alpha \in A,\ \text{jolle } u \in U_\alpha\}$.
- $\bigcap_{\alpha\in A} U_\alpha = \{u : u \in U_\alpha \text{ kaikilla } \alpha \in A\}$.
- $A \subsetneq B$ joukko A on joukon B aito osajoukko: $A \subset B$ ja $A \neq B$.
- $\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{jos } m = n \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}.$
- $\lfloor x \rfloor$ luvun $x \in \mathbb{R}$ kokonaisosa.
- $\dot{y}$ funktion $y\colon \left]a,b\right[\to \mathbb{R}$ derivaatta.
- $\ddot{y}$ funktion $y\colon \left]a,b\right[\to \mathbb{R}$ toinen derivaatta.

Uusien käsitteiden määritelmät on laatikoitu näin. Niitä ei ole numeroitu.

Osa I

Banachin avaruudet

Luku 1

Lineaarialgebraa

Tässä luvussa kertaamme ja laajennamme yleisen kerroinkunnan tapaukseen lineaarialgebran perusasioita, jotka ovat esiintyneet aiemmilla kursseilla. Tutustumme myös joihinkin kurssilla toistuvasti esiintyviin vektoriavaruuksiin.

1.1 Vektoriavaruus

Olkoon $\mathbb{K}$ kunta. Olkoon $V \neq \emptyset$ joukko, jossa on määritelty laskutoimitus $+$ ja vakiolla kertominen $K \times V \to V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$, jotka toteuttavat ehdot

(1) $x + y = y + x$ kaikilla $x, y \in V$

(2) $(x + y) + v = x + (y + v)$ kaikilla $x, y, v \in V$

(3) on $0 \in V$, jolle $0 + x = x$ kaikilla $x \in V$ ja

(4) jokaisella $x \in V$ on $-x \in V$, jolle $x + (-x) = 0$.

(5) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ kaikille $\lambda \in \mathbb{K}$ ja $v, w \in V$,

(6) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ kaikille $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ja $v \in V$,

(7) $\mu(\lambda v) = (\mu\lambda)v$ kaikille $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ja $v \in V$ ja

(8) $1\,v = v$ kaikille $v \in V$,

niin V varustettuna tällä rakenteella on $\mathbb{K}$–vektoriavaruus.[a]

[a] Muistamme algebrasta, että $(V, +)$ on kommutatiivinen ryhmä ehtojen (1)–(4) nojalla.

Tällä kurssilla tarkastelemme tapauksia, joissa $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Kutsumme $\mathbb{R}$-vektoriavaruutta reaaliseksi vektoriavaruudeksi ja $\mathbb{C}$-vektoriavaruutta kompleksiseksi vektoriavaruudeksi.

Esimerkki 1.1. (1) Kun joukko $\mathbb{R}^n$ varustetaan komponenteittaisella yhteenlaskulla ja tavanomaisella vektorien vakiolla kertomisella saadaan reaalinen vektoriavaruus $\mathbb{R}^n$. Vastaavasti $\mathbb{C}^n$ on $\mathbb{C}$-vektoriavaruus
(2) Olkoon $X \neq \emptyset$ ja olkoon V jokin $\mathbb{K}$-vektoriavaruus. Joukko

$$\mathscr{F}(X,V) = \{f\colon X \to V\}$$

varustettuna pisteittäisilä laskutoimituksilla ja vakiolla kertomisella on $\mathbb{K}$-vektoriavaruus.

Jos $\mathbb{K}$-vektoriavaruuden V osajoukko $H \subset V$, $H \neq \emptyset$, on vakaa[a] vektoriavaruuden V yhteenlaskun ja vakiolla kertomisen suhteen ja jos se on näillä operaatioilla varustettuna reaalinen vektoriavaruus, niin H on vektoriavaruuden V (vektori-)aliavaruus.

[a]Siis kaikille $h,k \in H$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$ pätee $h+k, \lambda h \in H$.

Lemma 1.2. *Olkoon V $\mathbb{K}$-vektoriavaruus ja olkoon $H \subset V$ epätyhjä. Tällöin H on vektorialiavaruus, jos ja vain jos kaikille $x,y \in H$ ja $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$ pätee $\lambda x + \mu y \in H$.* □

Esimerkki 1.3. (1) Joukot

$$\ell^\infty(\mathbb{K}) = \{\omega \in \mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{K}) : \sup_{n\in\mathbb{N}} |\omega(n)| < \infty\}$$
$$\ell^1(\mathbb{K}) = \{\omega \in \mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{K}) : \sum_{n=0}^{\infty} |\omega(n)| < \infty\}$$

ovat vektoriavaruuden $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{K})$ aliavaruuksia.
(2) Olkoon X topologinen avaruus. Koska jatkuvien funktioiden summat ja reaaliluvulla kerrotut jatkuvat funktiot ovat jatkuvia,

$$\mathrm{C}^0(X,\mathbb{R} = \{f \in \mathscr{F}(X,\mathbb{R}) : f \text{ on jatkuva}\}$$

on avaruuden $\mathscr{F}(X,\mathbb{R})$ aliavaruus.

1.2 Lineaarikuvaus

Olkoot V ja W $\mathbb{K}$-vektoriavaruuksia. Kuvaus $L\colon V \to W$ on ($\mathbb{K}$–)lineaarikuvaus, jos se on homomorfismi kommutatiivisesta ryhmästä $(V,+)$ kommutatiiviseen ryhmään $(W,+)$, jolle pätee $L(\lambda v) = \lambda L(v)$ kaikilla $\lambda \in \mathbb{K}$ ja $v \in V$. Erityisesti, jos $F\colon V \to \mathbb{K}$ on $\mathbb{K}$-lineaarikuvaus, niin F on funktionaali.[a]

[a]Jotkut lähteet vaativat funktionaalilta enemmän. Palaamme tähän luvussa 2.

Esimerkki 1.4. (1) Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Evaluaatiokuvaus $E_x\colon \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $E_x(f) = f(x)$, on lineaarikuvaus.
(2) Olkoon

$$\mathscr{L}^1([0,1]) = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \text{ integroituva}\}.$$

Mitta- ja integraaliteoriassa osoitettiin, että kuvaus $\mathscr{I} : \mathscr{L}^1([0,1]) \to \mathbb{R}$,

$$\mathscr{I}(f) = \int_{[0,1]} f$$

on lineaarinen.

Propositio 1.5. *Aliavaruden kuva ja alkukuva lineaarikuvauksessa ovat vektorialiavaruuksia.*

Todistus. Olkoon $L\colon V \to W$ linearikuvaus ja olkoon H avaruuden V vektorialiavaruus. Olkoot $z, w \in LH$. Tällöin on $x, y \in H$, joille $Lx = z$ ja $Ly = w$. Lineaarisuuden nojalla

$$\lambda z + \mu w = \lambda Lx + \mu Ly = L(\lambda x + \mu y) \in LH\,.$$

Toinen väite tehdään harjoituksissa. $\square$

Lineaarikuvauksen ydin on

$$\ker L = \{x \in V : Lx = 0\}\,.$$

Seuraus 1.6. *Lineaarikuvauksen ydin ja kuvajoukko ovat vektorialiavaruuksia.* $\square$

Esimerkki 1.7. Suppeneva jono kunnassa $\mathbb{K}$ on rajoitettu. Lisäksi on helppo tarkastaa, että kahden suppenevan jonon summa on suppeneva ja että suppenevan jonon vakiolla kertominen ei vaikuta jonon suppenemiseen. Siis

$$c(\mathbb{K}) = \{\omega \in \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) : \exists \lim_{n\to\infty} \omega(n) \in \mathbb{R}\}$$

on avaruuden ℓ^∞ aliavaruus. Harjoituksissa osoitetaan, että kuvaus $\lim\colon c(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$,

$$\lim \omega = \lim_{k\to\infty} \omega(k)\,,$$

on lineaarikuvaus. Seurauksen 1.6 nojalla

$$c_0(\mathbb{K}) = \ker \lim = \{\omega \in c(\mathbb{K}) : \lim_{n\to\infty} \omega(n) = 0\}$$

on vektoriavaruuden $c(\mathbb{K})$ aliavaruus.

Olkoon V vektoriavaruus. Joukon $X \subset V$, $X \neq \emptyset$ virittämä aliavaruus $\langle X \rangle$ on inkluusion suhteen minimaalinen vektorialiavaruus, joka sisältää joukon X.

Propositio 1.8. *Olkoon V vektoriavaruus ja olkoon $X \subset V$, $X \neq \emptyset$. Tällöin*

$$\begin{aligned}\langle X \rangle &= \bigcap \{H : X \subset H \text{ ja } H \text{ on aliavaruus}\}\\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i : \lambda_i \in \mathbb{K},\ x_i \in X,\ k \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}.\end{aligned}$$

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Olkoon V vektoriavaruus. Joukko $X \subset V$ on lineaarisesti riippumaton, jos kaikille $x_1, \ldots, x_k \in X$ ehdosta

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 0$$

seuraa

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0\,.$$

Lineaarisesti riippumaton joukko $X \subset V$ on Hamelin kanta, jos $\langle X \rangle = V$.

Propositio 1.9. *Jos vektoriavaruudella V on äärellinen kanta, niin kaikki sen kannat ovat äärellisiä ja jokaisessa kannassa on yhtä monta alkiota.*

Jos vektoriavaruudella on äärellinen kanta, niin se on äärellisulotteinen. Tällöin avaruuden dimensio on kannan alkioiden lukumäärä. Muuten vektoriavaruus on ääretönulotteinen.

Esimerkki 1.10. (1) Polynomien avaruus

$$\mathbb{K}[x] = \Big\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i : a_i \in \mathbb{K},\ n \in \mathbb{N} \Big\}$$

on määritelmänsä mukaan monomien x^i, $i \in \mathbb{N}$ lineaaarikombinaatioiden joukko. Monomien joukko on selvästi lineaarisesti riippumaton, joten $\mathbb{K}[x] = \langle x^k : k \in \mathbb{N} \rangle$.

Tällä kurssilla samastamme polynomiavaruuden $\mathbb{K}[x]$ polynomifunktioiden $p \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $p(x) = P(x)$ jollain $P(x) \in \mathbb{K}[x]$, kanssa.

(2) Olkoon X ääretön joukko. Tällöin $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ on ääretönulotteinen: Yhden pisteen joukkojen karakteristiset funktiot χ_x,

$$\chi_x(y) = \begin{cases} 1, & \text{kun } y = x \\ 0 & \text{muuten,} \end{cases}$$

$x \in X$, ovat selvästi lineaarisesti riippumattomia. Ne virittävät avaruuden $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ aidon aliavaruuden

$$\langle \chi_x : x \in X \rangle = \Big\{ f \colon X \to \mathbb{K} : \#\{x \in X : f(x) \neq 0\} < \infty \Big\}.$$

(3) Esimerkkien 2.5 ja 1.7 jonoavaruudet $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, $\ell^\infty(\mathbb{K})$, $\ell^1(\mathbb{K})$, $c(\mathbb{K})$ ja $c_0(\mathbb{K})$ ovat ääretönulotteisia.

Olkoon V $\mathbb{K}$-vektoriavaruus ja olkoon $L \colon V \to V$ lineaarikuvaus. Jos on $v \in V - \{0\}$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, joille pätee

$$Lv = \lambda v\,,$$

niin λ on lineaarikuvauksen L ominaisarvo ja v on sitä vastaava ominaisvektori.

Esimerkki 1.11. Analyysin kursseilla on osoitettu, että derivointi $D \colon \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$, $Df(x) = f'(x)$ on lineaarikuvaus. Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$. Tällöin $D\, e^{\lambda x} = \lambda\, e^{\lambda x}$. Funktio $x \mapsto e^{\lambda x}$ on siis lineaarikuvauksen D ominaisvektori ominaisarvolla λ.

1.3 Zornin lemma ja Hamelin kanta

Osoitamme tässä luvussa, että jokaisella nollasta poikkeavalla vektoriavaruudella on kanta. Tätä varten tarvitsemme Zornin lemmaa, joka koskee osittain järjestettyjä joukkoja.

Olkoon $A \neq \emptyset$. Relaatio $\preceq$ on osittainen järjestys, jos

(1) $a \preceq a$ kaikilla $a \in A$,

(2) jos $a \preceq b$ ja $b \preceq a$, niin $a = b$

(3) jos $a \preceq b$ ja $b \preceq c$, niin $a \preceq c$

Alkio $M \in A$ on osajoukon $B \subset A$ yläraja, jos $b \preceq M$ kaikilla $b \in B$. Alkio $M \in A$ on maksimaalinen, jos ehdosta $M \preceq b$ seuraa $b = M$ kaikille $b \in A$.

Propositio 1.12. *Olkoon V vektoriavaruus. Osajoukko $B \subset V$ on Hamelin kanta, jos ja vain jos se on inkluusion suhteen maksimaalinen lineaarisesti riippumaton joukko.* □

Todistus. Olkoon B Hamelin kanta. Olkoon $\widetilde{B} \subset V$ siten, että $B \subsetneq \widetilde{B}$. Osoitetaan, että $\widetilde{B}$ ei ole lineaarisesti riippumaton. Olkoon $y \in \widetilde{B}$. Koska B on Hamelin kanta, on $b_1, b_2, \dots, b_n \in B$ ja $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} - \{0\}$, joille pätee $y = \sum_{k=1}^n \lambda_k b_k$. Siis

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k b_k - y = 0\,,$$

joten joukko $\widetilde{B}$ ei ole lineaarisesti riippumaton.

Oletetaan, että B on maksimaalinen lineaarisesti riippumaton joukko. Jos $y \notin B$, niin joukko $B \cup \{x\}$ ei ole lineaarisesti riippumaton, joten joillain $b_1, b_2, \dots, b_n \in B$ ja $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} - \{0\}$ pätee $\sum_{k=1}^n \lambda_k b_k - y = 0$, joten $y = \sum_{k=1}^n \lambda_k b_k$. Siis B on Hamelin kanta, koska jokainen joukon B alkio b voidaan esittää triviaalina lineaarikombinaationa $b = 1b$. □

Osittain järjestetyn joukon $(A, \preceq)$ osajoukko $C \neq \emptyset$ on ketju, jos kaikille $c_1, c_2 \in C$ pätee $c_1 \preceq c_2$ tai $c_2 \preceq c_1$.

Aksiooma 1.13 (Zornin lemma)**.** *Olkoon $(A, \preceq)$ osittain järjestetty joukko. Jos jokaisella ketjulla on yläraja, niin osittain järjestetyssä joukossa $(A, \preceq)$ on maksimaalinen alkio.*

Otamme Zornin lemman aksioomana. Se on yhtäpitävä valinta-aksiooman kanssa, kun joko Zornin lemma tai valinta-aksiooma lisätään Zermelon ja Fraenkelin joukko-opin aksioomiin. Tällä kurssilla emme perehdy aiheeseen sen syvällisemmin, nykyaikaiseen joukko-oppiin ja sen sovelluksiin muussa matematiikassa voi perehtyä esimerkiksi kirjan [Cie] avulla.

Seuraava tulos todistetaan äärellisulotteisille avaruuksille lineaarialgebran kursseilla. Yleinen tulos vaatii hieman syvällisemmän pohdiskelun Zornin lemman avulla.

Lause 1.14. *Jokainen lineaarisesti riippumaton vektoriavaruuden $V \neq \{0\}$ osajoukko sisältyy johonkin kantaan.*

Todistus. Olkoon $E \subset V$ lineaarisesti riippumaton joukko. Olkoon $\mathscr{A}_E$ vektoriavaruuden V sellaisten lineaarisesti riippumattomien joukkojen kokoelma, jotka sisältävät joukon E. Inkluusio $\subset$ on osittainen järjestys joukossa $\mathscr{A}_E$. Olkoon C joukon $\mathscr{A}_E$ ketju. Harjoituksissa osoitetaan, että joukko

$$M = \bigcup_{B \in C} B \subset V\,.$$

on lineaarisesti riippumaton, joten $M \in \mathscr{A}_E$. Se on määritelmänsä nojalla ketjun C yläraja. Zornin lemman nojalla osittain järjestetyssä joukossa $(\mathscr{A}_E, \subset)$ on maksimaalinen alkio. Proposition 1.12 nojalla tällainen maksimaalinen alkio on kanta. $\square$

Seuraus 1.15. *Jokaisella vektoriavaruudella $V \neq \{0\}$ on Hamelin kanta.* $\square$

Harjoitustehtäviä

1.1. Osoita, että vektorialiavaruuden alkukuva lineaarikuvauksella on vektorialiavaruus.

1.2. Osoita, että lineaarikuvaus on injektio, jos ja vain jos sen ydin on $\{0\}$.

1.3. Olkoon V $\mathbb{K}$-vektoriavaruus. Olkoon $I \neq \emptyset$ indeksijoukko ja olkoon H_α vektoriavaruuden V vektorialiavaruus jokaisella $\alpha \in I$. Osoita, että vektorialiavaruuksien leikkaus $\bigcap_{\alpha \in I} H_\alpha$ on vektorialiavaruus.

1.4. Olkoon V vektoriavaruus ja olkoon $X \subset V$, $X \neq \emptyset$. Osoita, että

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i : \lambda_i \in \mathbb{K},\ x_i \in X,\ k \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}.$$

1.5. Osoita, että $\ell^\infty(\mathbb{K})$ ja $\ell^1(\mathbb{K})$ ovat vektoriavaruuden $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ aliavaruuksia.

1.6. Osoita, että $c(\mathbb{K})$ on vektoriavaruuden $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ aliavaruus ja että $\lim\colon c(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$,

$$\lim \omega = \lim_{k \to \infty} \omega(k)\,,$$

on lineaarikuvaus.

1.7. Osoita, että $\mathrm{C}^0\big([0,1], \mathbb{R}\big)$ on ääretönulotteinen reaalinen vektoriavaruus.

1.8. Osoita, että lineaarikuvauksen eri ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat lineaarisesti riippumattomia.

Olkoon $\sigma\colon \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ vasen siirto, joka määritellään asettamalla

$$\sigma(\omega)(n) = \omega(n+1)$$

kaikille $n \in \mathbb{N}$.

1.9. Osoita, että σ on lineaarikuvaus. Määritä sen ominaisarvot.

1.10. Määritä kuvausten $\sigma|_{\ell^\infty(\mathbb{C})}$ ja $\sigma|_{\ell^1(\mathbb{C})}$ ominaisarvot.

1.11. Olkoon $\mathscr{A}$ vektoriavaruuden V sellaisten lineaarisesti riippumattomien joukkojen kokoelma, jotka sisältävät lineaarisesti riippumattoman joukon E. Olkoon C osittain järjestetyn joukon $(\mathscr{A}, \subset)$ ketju. Osoita, että joukko

$$M = \bigcup_{B \in C} B \subset V$$

on lineaarisesti riippumaton.

Luku 2

Normiavaruus

Tässä luvussa tarkastelemme vektoriavaruuksia, joissa on määritelty normi. Normin avulla vektoriavaruudelle saadaan lineaarisen rakenteen kanssa yhteensopiva metrisen avaruuden rakenne. Oletuksena on, että normin käsite on tuttu metristen avaruuksien kurssilta, jolla käsitetlyjä asioita kertaamme ja laajennamme tässä luvussa.

2.1 Normi

Olkoon V $\mathbb{K}$-vektoriavaruus. Funktio $\|\cdot\|\colon V \to [0,\infty[$ on seminormi, jos

(1) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ kaikille $\lambda \in \mathbb{K}$ ja $x \in V$.

(2) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ kaikille $x, y \in V$.

Jos lisäksi

(0) $\|x\| = 0$, jos ja vain jos $x = 0$,

niin $\|\cdot\|$ on normi.

Pari $(V, \|\cdot\|)$ on normiavaruus.

Jos merkitsemme normiavaruutta lyhyesti esimerkiksi symbolilla V, sen normia kutsutaan joko yksinkertaisesti normiksi $\|\cdot\|$ tai tarvittaessa esimerkiksi $\|\cdot\|_V$.

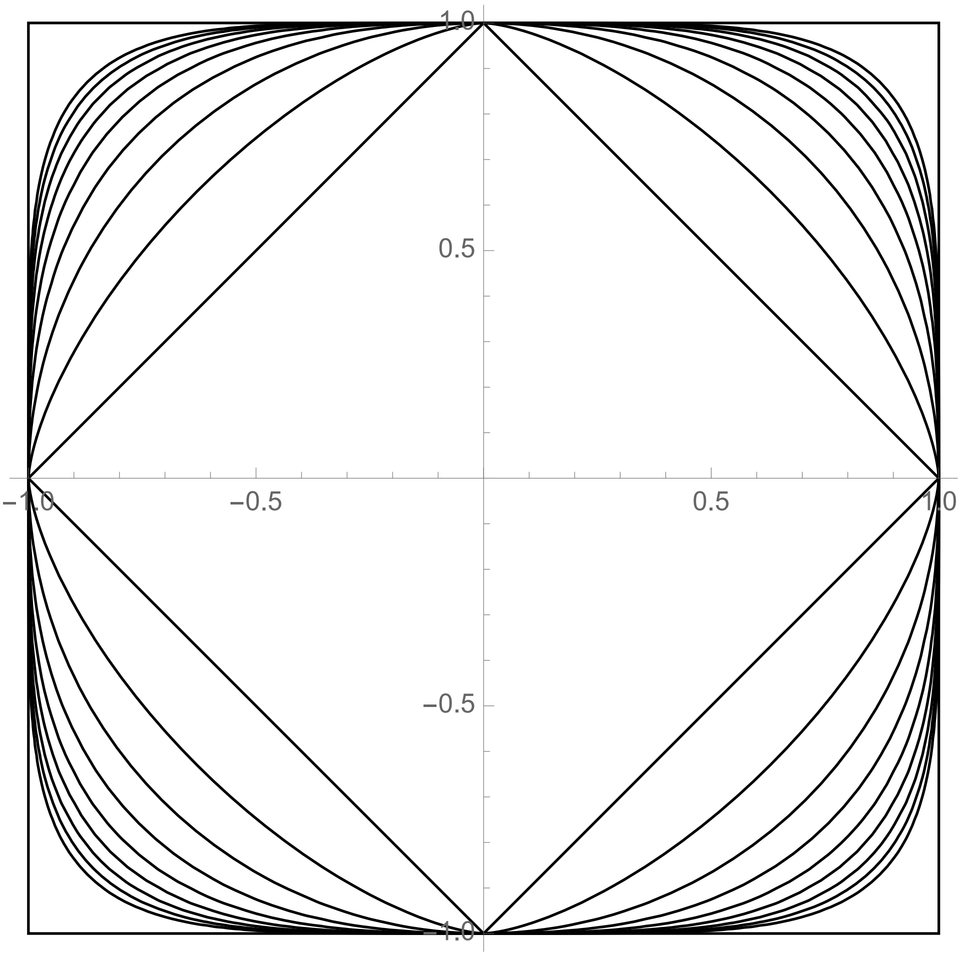
Esimerkki 2.1. Metristen avaruuksien kurssilla tarkastelimme vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ normeja

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$$

ja

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |x_k|\,.$$



Kuva 2.1: Yksikköympyröitä eri normeilla, kun $p \geq 1$.

Esimerkin 2.1 yleistyksessä tarvitaan seuraavaa aputulosta.

Lemma 2.2. *Olkoon* $1 \leq p < \infty$ *ja olkoot* $a, b > 0$. *Tällöin*

$$(a+b)^p = \inf_{0<t<1} t^{1-p}\, a^p + (1-t)^{1-p}\, b^p\,.$$

Todistus. Funktio

$$t \overset{f}{\mapsto} t^{1-p}\, a^p + (1-t)^{1-p}\, b^p$$

on sileä, sen raja-arvot välin $]0,1[$ päätepisteissä ovat ∞ ja sen derivaatan nollakohta on pisteessä $t_0 = \frac{a}{a+b}$. Tässä pisteessä saavutetaan minimiarvo

$$f\left(\frac{a}{a+b}\right) = (a+b)^p\,. \quad \square$$

Propositio 2.3. *Olkoon* $1 \leq p < \infty$. *Lauseke*

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p}$$

määrää normin avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

Todistus. Normin ominaisuudet (0) ja (1) ovat selviä. Itseisarvon kolmioepäyhtälön ja Lemman 2.2 avulla saadaan kaikille $x, y \in \mathbb{R}^n$ ja kaikille $0 < t < 1$

$$\begin{aligned}\|x+y\|_p^p &= \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \leq \sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|)^p \\ &\leq \sum_{k=1}^n t^{1-p}\,|x_k|^p + (1-t)^{1-p}\,|y_k|^p \\ &= t^{1-p}\,\|x\|_p^p + (1-t)^{1-p}\,\|y\|_p^p\,,\end{aligned}$$

josta minimoimalla valitsemalla

$$t = \frac{\|x\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p}$$

saadaan kolmioepäyhtälö

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \qquad \text{(Minkowskin epäyhtälö)}$$

kuten haluttiin. □

Esimerkki 2.4. Olkoon $X \neq \emptyset$ ja olkoon

$$\mathscr{B}(X, \mathbb{R}) = \Big\{ f\colon X \to \mathbb{R} : \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty \Big\}$$

joukossa X määriteltyjen rajoitettujen $\mathbb{R}$-arvoisten funktioiden joukko. Avaruuden $\mathbb{E}^1$ kolmioepäyhtälön nojalla $\mathscr{B}(X, \mathbb{R})$ on kaikkien funktioiden vektoriavaruuden $\mathscr{F}(X, \mathbb{R})$ vektorialiavaruus, joten se on vektoriavaruus. Metristen avaruuksien kurssilla osoitimme, että funktio $\|\cdot\|_\infty\colon \mathscr{B}(X, \mathbb{R}) \to [0, \infty[$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

on normi. Käytämme avaruuden $\mathscr{F}(X, \mathbb{R})$ normina normia $\|\cdot\|_\infty$ ellei toisin mainita.

Esimerkki 2.5 (Jonoavaruudet)**.** Tärkeä erikoistapaus rajoitettujen funktioiden avaruudesta on Esimerkissä 2.5 esitelty rajoitettujen lukujonojen avaruus

$$\ell^\infty(\mathbb{K}) = \Big\{ \omega \in \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) : \sup_{n \in \mathbb{N}} |\omega(n)| < \infty \Big\}\,.$$

Lauseke

$$\|\omega\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\omega(n)|$$

on normi vektoriavaruudessa $\ell^\infty(\mathbb{K})$.

Minkowskin epäyhtälön avulla nähdään, että

$$\ell^p(\mathbb{K}) = \Big\{ \omega \in \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) : \sum_{n=0}^\infty |\omega(n)|^p < \infty \Big\}$$

on vektorialiavaruus ja lauseke

$$\|\omega\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^\infty |\omega(n)|^p}$$

on normi vektoriavaruudessa $\ell^p(\mathbb{K})$ kaikilla $1 \leq p < \infty$. Tarvittaessa merkitsemme lyhyesti $\ell^p = \ell^p(\mathbb{R})$. Käytämme avaruuden $\ell^p(\mathbb{K})$ normina normia $\|\cdot\|_p$ ellei toisin mainita.

Esimerkki 2.6. Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon

$$\mathrm{C}^0_{\mathrm{b}}(X,\mathbb{R}) = \{f \in \mathrm{C}^0(X,\mathbb{R}) : \|f\|_\infty < \infty\}\,.$$

Jos funktiot $f, g \in \mathscr{B}(X,\mathbb{R})$ ovat jatkuvia, niin $\lambda f + \mu g$ on jatkuva kaikilla $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Siis $\mathrm{C}^0_{\mathrm{b}}(X,\mathbb{R})$ on normiavaruuden $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$ vektorialiavaruus ja $(\mathrm{C}^0_{\mathrm{b}}(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ on normiavaruus.

Jos X on kompakti, niin $\mathrm{C}^0_{\mathrm{b}}(X,\mathbb{R}) = \mathrm{C}^0(X,\mathbb{R})$. Tämä pätee esimerkiksi, jos $X = [a,b] \subset \mathbb{R}$.

Normi määrittelee metriikan luonnollisella tavalla: Olkoon $(V, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Olkoon $d = d_{\|\cdot\|} \colon X \times X \to [0,\infty[$ funktio

$$d(x,y) = \|x - y\|\,.$$

Propositio 2.7. *Lauseke d määrittelee metriikan avaruudessa X. Metriikka d toteuttaa*

$$d(x+v, y+v) = d(x,y)$$

kaikille $x, y, v \in V$. □

Propositio 2.8. *Olkoon V $\mathbb{K}$-vektoriavaruus. Tällöin normi on jatkuva funktio.*

Todistus. Tehtiin metristen avaruuksien kurssilla. □

Vektoriavaruuden V osajoukko $K \neq \emptyset$ on konveksi, jos jokaista kahta joukon A pistettä yhdistävä jana

$$[x,y] = \{sx + (1-s)y : 0 \le s \le 1\}$$

sisältyy joukkoon A. Joukko A on aidosti konveksi, jos avoin jana

$$]x,y[= \{sx + (1-s)y : 0 < s < 1\}$$

koostuu joukon A sisäpisteistä kaikilla $x, y \in A$.

Propositio 2.9. *Normiavaruuden pallot ovat konvekseja ja niiden avoimet pallot ovat aidosti konvekseja.*

Todistus. Proposition 2.7 nojalla riittää tarkastella 0-keskisiä palloja. Olkoot $x, y \in B(0,R)$. Tällöin

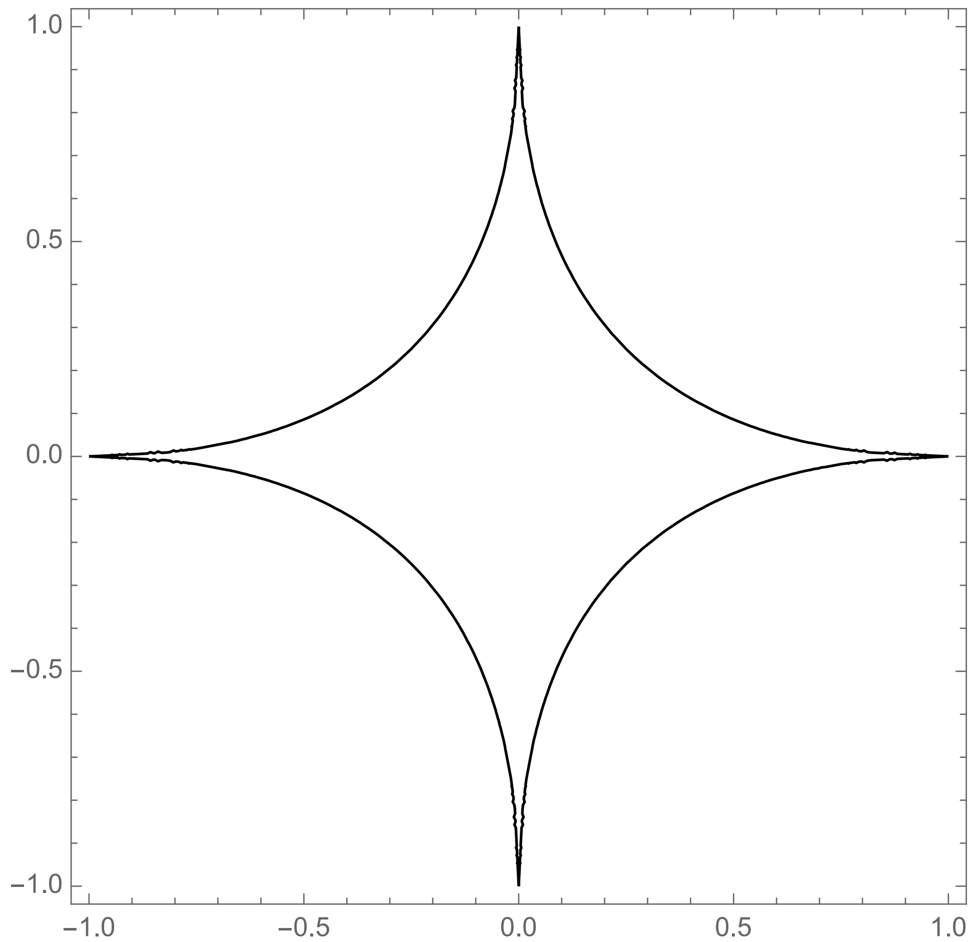
$$\|sx + (1-s)y\| \le s\|x\| + (1-s)\|y\| \le sR + (1-s)R = R\,. \quad \square$$

Esimerkki 2.10. (1) Normiavaruuksien $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ ja $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ pallot eivät ole aidosti konvekseja.

(2) Lauseke $(\sqrt{|x_1|} + (\sqrt{|x_2|})^2$ ei määrää normia avaruudessa $\mathbb{R}^2$, koska joukko

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : (\sqrt{|x_1|} + (\sqrt{|x_2|})^2 \le 1\}$$

ei ole konveksi.



Kuva 2.2:

2.2 Aliavaruuksista

Ääretönulotteisten normiavaruuksien ääretönulotteiset aliavaruudet eivät välttämättä ole suljettuja.

Esimerkki 2.11. Olkoon $1 \leq p < \infty$. Jonoavaruuden $\ell^p(\mathbb{K})$ aliavaruus

$$d^p(\mathbb{K}) = \{\omega \in \ell^p : \#\operatorname{supp}\omega < \infty\}$$

on selvästi aito aliavaruus. Osoitetaan, että $d^p(\mathbb{K})$ ei ole suljettu: Olkoon $\omega \in \ell^p(\mathbb{K})$. Määritellään alkiot $\omega_k \in d^p(\mathbb{K})$ kaikille $k \in \mathbb{N}$ asettamalla

$$\omega_k(i) = \begin{cases} \omega(i)\,, & \text{kun } i \leq k \\ 0 & \text{muuten}\,. \end{cases}$$

Tällöin pätee

$$\|\omega - \omega_k\|_p = \sum_{j=k+1}^{\infty} |\omega(j)\|^p \to 0\,,$$

kun kun $k \to \infty$. Siis $\omega_k \to \omega$, kun $k \to \infty$, joten d^p on aito tiheä aliavaruus.

Huomaa, että $d^\infty(\mathbb{K})$ ei ole tiheä: vakiojonon $1 \in \ell^\infty(\mathbb{K})$ etäisyys jokaisesta aliavaruuden $d^\infty(\mathbb{K})$ alkiosta on vähintään 1.

Lemma 2.12. *Jos (x_k) ja (y_k) ovat suppenevia jonoja normiavaruudessa V ja (λ_k) ja (μ_k) ovat suppenevia jonoja kunnassa $\mathbb{K}$, niin*

$$\lim_{k\to\infty}(\lambda_k x_k + \mu_k y_k) = \lim_{k\to\infty}\lambda_k \lim_{k\to\infty} x_k + \lim_{k\to\infty}\mu_k \lim_{k\to\infty} y_k\,.$$

Propositio 2.13. *Normiavaruuden vektorialiavaruuden sulkeuma on vektorialiavaruus.*

Todistus. Todistetaan Lemman 2.12 avulla harjoitustehtävänä. □

Metrinen avaruus X on separoituva, jos sillä on numeroituva tiheä osajoukko.

Propositio 2.14. *Normiavaruus on separoituva, jos ja vain jos sillä on numeroituva osajoukko, joka virittää tiheän aliavaruuden.*

Todistus. Jos Q on tiheä osajoukko, niin $\langle Q\rangle$ on tiheä aliavaruus. Haastavampi osa jätetään harjoitustehtäväksi. □

Esimerkki 2.15. (1) Olkoon $p \geq 1$. Esimerkissä 2.11 osoitettiin, että $d^p(\mathbb{K})$ on tiheä avaruudessa $\ell^p(\mathbb{K})$. Koska $d^p(\mathbb{K}) = \langle e_i : i \in \mathbb{N}\rangle$, niin $\ell^p(\mathbb{K})$ on separoituva, kun $p \geq 1$.

(2) $\ell^\infty(\mathbb{K})$ ei ole separoituva: Tarkastellaan ylinumeroituvaa joukkoa

$$\{\chi_A : A \subset \mathbb{N}\} = \{\chi_A : A \in 2^{\mathbb{N}}\}\,.$$

Jos $A \neq B$, niin $\|\chi_A - \chi_B\|_\infty = 1$. Siis pallot $B(\chi_A, \frac{1}{2})$ ovat erillisiä. Ei ole numeroituvaa joukkoa, jonka pisteitä sisältyy jokaiseen näistä erillisistä palloista.

Lause 2.16 (Weierstrassin approksimointilause)**.** *Polynomifunktioiden aliavaruus on avaruuden $\mathrm{C}^0(I)$ tiheä aliavaruus kaikilla kompakteilla väleillä $I \subset \mathbb{R}$.*

Todistus. Tälle klassiselle lauseelle on monia erilaisia todistuksia, jotka kaikki vaativat enemmän työtä kuin tässä yhteydessä on mielekästä. Katso esimerkiksi [Kah, Luku 2], [Kre, 4.11-5], [Wer, Satz I.2.10]. □

Esimerkki 2.17. Weierstrassin approksimointilauseen nojalla polynomien avaruus on tiheä avaruudessa $\mathrm{C}^0([a,b])$. Polynomien avaruudella on numeroituva Hamelin kanta, joten $\mathrm{C}^0([a,b])$ on separoituva.

2.3 Ekvivalentit normit

Tässä luvussa laajennamme metristen avaruuksien kurssilla aloitettua ekvivalenttien normien tarkastelua.

Vektoriavaruuden V normit $\|\cdot\|$ ja $\|\cdot\|'$ ovat ekvivalentit, jos on $c > 0$, jolle pätee

$$\frac{1}{c}\|v\|' \leq \|v\| \leq c\|v\|'$$

kaikille $v \in V$.

Propositio 2.18. *Normit määräävät saman topologian, jos ja vain jos ne ovat ekvivalentit.*

Todistus. Oletetaan, että normit määräävät saman topologian. Tällöin on $\epsilon > 0$ siten, että $B_{\|\cdot\|'}(0,\epsilon) \subset B_{\|\cdot\|}(0,1)$. Olkoon $v \in V - \{0\}$. Tällöin

$$\frac{\epsilon}{2\|v\|'} v \in B_{\|\cdot\|'}(0,\epsilon) \subset B_{\|\cdot\|}(0,1)\,.$$

Siis

$$\left\| \frac{\epsilon}{2\|v\|'} v \right\| < 1\,,$$

joten

$$\|v\| \leq \frac{2}{\epsilon}\|v\|'\,.$$

Toinen epäyhtälö saadaan käyttämällä vastaavalla tavalla sitä, että $B_{\|\cdot\|}(0,\epsilon') \subset B_{\|\cdot\|'}(0,1)$ jollain $\epsilon' > 0$.

Väitteen toinen suunta tehtiin metristen avaruuksien kurssilla. □

Esimerkki 2.19. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ kompakti väli. Määritellään normit jatkuvasti derivoituvien funktioiden $f\colon I \to \mathbb{R}$ avaruudessa $\mathrm{C}^1(I)$ asettamalla

$$\|f\|_{\mathrm{C}^1,1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

ja

$$\|f\|_{\mathrm{C}^1,\infty} = \max\left\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\right\}.$$

Nämä normit ovat ekvivalentteja:

$$\|f\|_{\mathrm{C}^1,\infty} \leq \|f\|_{\mathrm{C}^1,1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq 2\|f\|_{\mathrm{C}^1,\infty}$$

Käytämme oletuksena avaruudessa $\mathrm{C}^1(I)$ näitä normeja.

Esimerkki 2.20. $\ell^1(\mathbb{K})$ on avaruuden $\ell^\infty(\mathbb{K})$ aliavaruus, joten $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_\infty$ ovat normeja avaruudessa $\ell^1(\mathbb{K})$. Olkoon $0 < \lambda < 1$ ja olkoon $\omega_\lambda(k) = \lambda^k$. Tällöin $\omega \in \ell^1$ ja

$$\|\omega_\lambda\|_1 = \frac{1}{1-\lambda} \underset{\lambda\to 1}{\to} \infty\,.$$

Kuitenkin $\|\omega_\lambda\|_\infty = 1$ kaikilla λ, joten normit eivät ole ekvivalentteja.

Itse asiassa, jos $p, q \in [1,\infty]$ ja $p < q$, niin normit $\|\cdot\|_p$ ja $\|\cdot\|_q$ eivät ole ekvivalentteja. Tämän näkee tapauksessa $p = 1$ tarkastelemalla jonoja ω_k, joille

$$\omega_k(n) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{, kun } n \leq k^q \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}$$

Nyt

$$\|\omega_k\|_1 = \frac{\lfloor k^q \rfloor}{k} \underset{k\to\infty}{\to} \infty$$

ja

$$\|\omega_k\|_q^q = \frac{\lfloor k^q \rfloor}{k^q} \leq 1\,.$$

2.4 Äärellisulotteiset (ali)avaruudet

Tässä luvussa tutkimme, miten äärellisulotteiset ja ääretönulotteiset normiavaruudet eroavat toisistaan. Seuraava metristen avaruuksien kurssilta tuttu tulos ja Esimerkki 2.20 kertovat, että dimensio vaikuttaa siihen, millaisia erilaisia normeja samassa avaruudessa voi olla.

Propositio 2.21. *Kaikki äärellisulotteisen vektoriavaruuden normit ovat ekvivalentteja.*

Todistus. Voimme olettaa, että tarkasteltava avaruus on $\mathbb{R}^n$. Osoitetaan, että normi $\|\cdot\|$ on ekvivalentti euklidisen normin $\|\cdot\|_2$ kanssa. Olkoon $e_1, e_2, \ldots e_n$ standardikanta. Tällöin kolmioepäyhtälön, normin homogeenisuuden ja Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$
\begin{aligned}
\Big\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\Big\| &\le \sum_{i=1}^n |x_i|\|e_i\| \\
&= \Big((x_1,\ldots,x_n) \mid (\|e_1\|,\ldots,\|e_i\|)\Big) \\
&\le \|(x_1,\ldots,x_n)\|_2 \, \|(\|e_1\|,\ldots,\|e_i\|))\| \\
&\le \sqrt{n}\max\Big\{\|e_i : 1\le i\le n\|\Big\}\,\|(x_1,\ldots,x_n)\|_2\,, \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

joten haluttu epäyhtälö saadaan toiseen suuntaan.

Vastakkaisen suunnan todistamiseksi huomataan, että epäyhtälön (2.1) nojalla normi $\|\cdot\|$ on jatkuva, joten se saavuttaa miniminsä $m > 0$ euklidisen metriikan kompaktilla yksikköpallolla. Siis kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ pätee $\Big\|\frac{x}{\|x\|_2}\Big\| \le m$, josta seuraa haluttu epäyhtälö $\|x\| \le m\|x\|_2$. □

Seuraus 2.22. *Suljetut ja rajoitetut joukot ovat kompakteja äärellisulotteisissa normiavaruuksissa.* □

Propositio 2.23. *Normiavaruuden äärellisulotteinen aliavaruus on suljettu.*

Todistus. Olkoon $(V, \|\cdot\|)$ normiavaruus ja olkoon H sen äärellisulotteinen aliavaruus. Olkoon $x_0 \in V - H$. Osoitetaan, että x_0 on joukon $V - H$ sisäpiste. Aliavaruus $H' = \langle H, x_0\rangle$ on $\dim H + 1$- ulotteinen. Lauseke

$$\|(x, \lambda x_0)\|' = \|x\| + |\lambda|$$

on normi aliavaruudessa H'. Proposition 2.21 nojalla normit $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ ovat ekvivalentteja avaruudessa H', joten on $C > 0$, jolle

$$\frac{\|y\|}{C} \le \|y\|' \le C\|y\|$$

kaikille $y \in H'$. Kaikille $h \in H$ pätee

$$\|h - x_0\| \ge \frac{1}{C}\|h - x_0\| = \frac{1}{C}(\|h\| + 1) \ge \frac{1}{C}\,,$$

joten x_0 ei ole aliavaruuden H sulkeumassa. □

Pisteen x etäisyys osajoukosta $A \neq \emptyset$ normiavaruudessa on

$$d(x,A) = \inf_{a \in A} \|x - a\| .$$

Lemma 2.24. *Olkoon H normiavaruuden V äärellisulotteinen aliavaruus ja olkoon $x_0 \in V - H$. Tällöin on $h_0 \in H$, jolle pätee $d(x_0, H) = \|x_0 - h_0\|$.*

Todistus. Harjoitus. □

Esimerkki 2.25. Aliavaruuden H lähin piste ei välttämättä ole yksikäsitteinen: Olkoon $V = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Olkoon $\langle x_1 \rangle = \mathbb{R} \times \{0\}$ ja olkoon $y_2 = (0,1)$. Tällöin

$$\|y_2 - (t,0)\|_\infty = 1$$

kaikilla $-1 \leq t \leq 1$.

Seuraava esimerkki osoittaa, että Lemman 2.24 oletusta aliavaruuden H äärellisulotteisuudesta ei voi heikentää olettamalla avaruus H suljetuksi.

Esimerkki 2.26. Olkoon

$$V = \Big(\{f \in \mathrm{C}^0([0,1]) : f(1) = 0\}, \|\cdot\|_\infty\Big) .$$

Harjoituksissa osoitetaan, että aliavaruus

$$H = \{f \in V : \int_{[0,1]} f = 0\}$$

on suljettu.

Olkoon $x_0 \in V - H$ ja oletetaan, että on $h_0 \in H$, jolle pätee $d(x_0, H) = \|x_0 - h_0\|_\infty$. Tällöin $f_0 = \frac{x_0 - h_0}{\|x_0 - h_0\|_\infty} \in V - H$ ja pätee $\|f_0\|_\infty = 1$ ja $\|f_0 - h\|_\infty \geq 1$ kaikille $h \in H$. Olkoot $f_n \in V$: $f_n(t) = 1 - t^n$ ja olkoot

$$h_n = f_0 - \frac{\int_{[0,1]} f_0}{\int_{[0,1]} f_n} f_n = f_0 - \frac{\int_{[0,1]} f_0}{1 - \frac{1}{n+1}} f_n .$$

Tällöin $h_n \in H$. Oletuksesta, että kaikilla n pätee

$$\left\| \frac{\int_{[0,1]} f_0}{1 - \frac{1}{n+1}} f_n \right\|_\infty = \|f_0 - h_n\|_\infty \geq 1 ,$$

seuraa

$$\left| \int_{[0,1]} f_0 \right| \geq 1 - \frac{1}{n+1}$$

kaikilla n, joten $|\int_{[0,1]} f_0| \geq 1$. Koska kuitenkin f_0 on jatkuva ja pätee $f_0(1) = 0$, on $|\int_{[0,1]} f_0| < 1$, ristiriita.

Metristen avaruuksien kurssilta tiedämme, että euklidisen avaruuden suljettu yksikköpallo on kompakti ja Seurauksen 2.22 nojalla sama pätee kaikissa äärellisulotteisissa normiavaruuksissa. Seuraava esimerkki osoittaa, että vastaava tulos ei päde ääretönulotteisissa avaruuksissa.

Esimerkki 2.27. Avaruuden $\ell^\infty(\mathbb{K})$ yksikköpallo ei ole kompakti: Olkoon $e_i \in \ell^\infty(\mathbb{K})$, $e_i(j) = \delta_{ij}$. Jono $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ei suppene eikä sillä ole suppenevaa osajonoa, koska

$$\|e_n - e_m\|_\infty = 1$$

kaikilla $n \neq m$. Kuitenkin $\|e_n\|_\infty = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten jono sisältyy suljettuun yksikköpalloon.

Esimerkissä tehty havainto pätee kaikissa ääretönulotteisissa normiavaruuksissa:

Lause 2.28. *Seuraavat ominaisuudet ovat ekvivalentteja normiavaruudessa V:*

(1) V on äärellisulotteinen.

(2) Avaruuden V suljettu yksikköpallo on kompakti.

(3) Jokaisella avaruuden V rajoitetulla jonolla on suppeneva osajono.

Todistus. Se, että (2) seuraa ominaisuudesta (1) seuraa Seurauksesta 2.22.

Oletetaan, että normiavaruudella V on ominaisuus (2). Olkoon $(x_k)_{k=1}^\infty$ rajoitettu jono. Tällöin on $M > 0$, jolle $\|x_k\| \leq M$ kaikille k. Siispä $\left(\frac{x_k}{M}\right)_{k=1}^\infty$ on jono yksikköpallon pisteitä ja sillä on ominaisuuden (2) nojalla suppeneva osajono $\left(\frac{x_{k_j}}{M}\right)_{k=1}^\infty$. Proposition 2.22 nojalla jono $(x_{k_j})_{k=1}^\infty$ suppenee.

Oletetaan, että V on ääretönulotteinen. Olkoon $x_1 \in V$ vektori, jolle pätee $\|x_1\| = 1$. Olkoon $y_2 \in V - \langle x_1 \rangle$. Aliavaruus $\langle x_1 \rangle$ on suljettu Proposition 2.23 nojalla, joten $d(\langle x_1 \rangle, y_2) > 0$. Lemman 2.24 nojalla on $v_2 \in \langle x_1 \rangle$, jolle

$$d(v_2, y_2) = d(\langle x_1 \rangle, y_2)\,.$$

Olkoon

$$x_2 = \frac{y_2 - v_2}{\|y_2 - v_2\|}\,.$$

Määrittelystä seuraa, että $\|x_2\| = 1$. Lisäksi $d(x_2, \langle x_1 \rangle) \leq d(x_2, 0) \leq 1$ ja toisaalta, jos jollekin $w \in \langle x_1 \rangle$ pätisi $d(x_2, , w) < 1$, niin

$$\Big\|y_2 - (v_2 + w\,\|y_2 - v_2)\|)\Big\| = \|y_2 - v_2\|\,\|x_2 - w\| < \|y_2 - v_2\|\,,$$

mikä on mahdotonta, koska v_2 on lähin piste. Siis

$$d(x_2, \langle x_1 \rangle) = 1\,.$$

Jatketaan induktiivisesti ja saadaan seuraavassa vaiheessa piste x_3, jolle pätee $\|x_3\| = 1$. Lisäksi $d(x_3, \langle x_1, x_2 \rangle) = 1$ ja niin edelleen. Saadaan jono (x_k), joka on rajoitettu, koska $\|x_k\| = 1$ kaikilla k. Koska pisteet x_k ovat konstruktion perusteella etäällä toisistaan, tällä jonolla ei ole suppenevaa osajonoa. $\square$

Harjoitustehtäviä

2.1. Olkoon U vektoriavaruus ja olkoon $(W, \|\cdot\|_W)$ normiavaruus. Olkoon $L\colon U \to W$ lineaarinen isomorfismi.[1] Osoita, että lauseke

$$\|u\| = \|Lu\|_W$$

antaa normin avaruudessa U.

2.2. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ kompakti väli. Osoita, että

$$\|f\|_{\mathrm{C}^1,1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

on normi avaruudessa $\mathrm{C}^1(I)$.

2.3. Olkoon V normiavaruus ja olkoon

$$S(0,1) = \{x \in V : \|x\| = 1\}.$$

Olkoon $\mathrm{pr}_S\colon V - \{0\} \to S(0,1)$ kuvaus, joka määritellään asettamalla $\mathrm{pr}_S(x) = \frac{x}{\|x\|}$ kaikille $x \in V - \{0\}$. Osoita, että pr_S on jatkuva.

2.4. Olkoot $(x_k)_{k=1}^\infty$ ja $(y_k)_{k=1}^\infty$ suppenevia jonoja normiavaruudessa V ja olkoot $(\lambda_k)_{k=1}^\infty$ ja $(\mu_k)_{k=1}^\infty$ suppenevia jonoja kunnassa $\mathbb{K}$. Osoita, että

$$\lim_{k\to\infty}(\lambda_k x_k + \mu_k y_k) = \lim_{k\to\infty}\lambda_k \lim_{k\to\infty} x_k + \lim_{k\to\infty}\mu_k \lim_{k\to\infty} y_k$$

2.5. Osoita, että normiavaruuden vektorialiavaruuden sulkeuma on vektorialiavaruus.

2.6. Osoita, että reaalinen normiavaruus V on separoituva, jos ja vain jos sen osajoukko $S(0,1) = \{x \in V : \|x\| = 1\}$ on separoituva. [2]

2.7. Osoita, että reaalinen normiavaruus on separoituva, jos sillä on numeroituva osajoukko, joka virittää tiheän aliavaruuden.

Olkoot $(V, \|\cdot\|_V)$ ja $(W, \|\cdot\|_W)$ normiavaruuksia.

2.8. Osoita, että lauseke

$$\|(v,w)\|_\infty = \max(\|v\|_V, \|w\|_W)$$

määrää normin vektoriavaruudessa $V \times W$.

[1] bijektio

[2] Jos $T \subset S(0,1)$ on numeroituva tiheä joukko, tarkastele joukkoa $\widetilde{T} = \{rt : r \in \mathbb{Q}, r > 0, t \in T\}$.

2.9. Olkoon $1 \leq p < \infty$. Osoita, että lauseke

$$\|(v,w)\|_p = \sqrt[p]{\|v\|_V^p + \|w\|_W^p}$$

määrää normin vektoriavaruudessa $V \times W$.

2.10. Osoita, että normit $\|\cdot\|_p$ ovat ekvivalentteja kaikilla $p \geq 1$ ja $p = \infty$.

2.11. Osoita, että normien ekvivalenssi on ekvivalenssirelaatio vektoriavaruuden V normien joukossa.

2.12. Osoita, että normit

$$\|f\|_1 = \int_{[0,1]} |f|$$

ja

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

eivät ole ekvivalentteja vektoriavaruudessa $\mathrm{C}^0([0,1])$. [3]

2.13. Olkoon H normiavaruuden V äärellisulotteinen aliavaruus ja olkoon $x_0 \in V - H$. Osoita, että on $h_0 \in H$, jolle pätee

$$d(x_0, H) = \|x_0 - h_0\|\,.$$

[3] Jos jono suppenee yhdessä topologiassa mutta ei toisessa, niin topologiat ovat erit.

Luku 3

Normiavaruuden lineaarikuvaukset

3.1 Rajoitetut lineaarikuvaukset

Koska normi määrää metriikan, voidaan normiavaruuksissa tarkastella jatkuvia kuvauksia. Lineaarikuvausten yhteydessä on kuitenkin tapana käyttää toista, yhtäpitävää käsitettä.

Olkoot V ja W normiavaruuksia. Lineaarikuvaus $L\colon V \to W$ on rajoitettu, jos on $C \geq 0$, jolle pätee

$$\|Lv\|_W \leq C\|v\|_V$$

kaikilla $v \in V$. Sanomme rajoitettuja lineaarikuvauksia operaattoreiksi. Olkoon

$$\mathrm{Lin_b}(V, W)$$

Lemma 3.1. *(1) Olkoot V ja W vektoriavaruuksia. Lineaarikuvausten joukko* $\mathrm{Lin}(V, W)$ *on vektoriavaruuden $\mathscr{F}(V, W)$ vektorialiavaruus.*

(2) Olkoot V ja W normiavaruuksia. Rajoitettujen lineaarikuvausten joukko $\mathrm{Lin_b}(V, W)$ *on vektoriavaruuden* $\mathrm{Lin}(V, W)$ *vektorialiavaruus.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Propositio 3.2. *Olkoon V äärellisulotteinen normiavaruus ja olkoon W normiavaruus. Lineaarikuvaus $L\colon V \to W$ on rajoitettu.*

Todistus. Olkoon $f_1, f_2, \ldots, f_n$ vektoriavaruuden kanta ja olkoon $\|\cdot\|_1$ normi, joka määritellään asettamalla

$$\|\sum v_i f_i\|_1 = \|(v_1, v_2, \ldots, v_n)\|_1 .$$ [1]

[1] Lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^n \to V$, $L(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \sum v_i f_i$, on isometria normiavaruuksien $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ ja $(V, \|\cdot\|_1)$välillä.

Jollakin vakiolla $C_V > 0$ pätee $\frac{1}{C_V}\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_V \leq C_V\|\cdot\|_1$. Siis

$$\begin{aligned}\|Lv\|_W &= \|L(\sum_{i=1}^n v_i e_i)\|_W = \|\sum_{i=1}^n v_i L e_i\|_W \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|v_i L e_i\|_W = \sum_{i=1}^n |v_i|\|Le_i\|_W \\ &\leq \max_{1\leq j\leq n} \|Le_j\|_W \sum_{i=1}^n \|v\|_1 \\ &\leq C_V \max_{1\leq j\leq n} \|Le_j\|_W \|v\|_W\,. \end{aligned}$$ □

Esimerkki 3.3. Riippumatta siitä, millä normilla vektoriavaruus $\mathbb{R}^n$ varustetaan, kaikki lineaarikuvaukset, erityisesti siis funktionaalit, ovat rajoitettuja. Jokainen avaruuden $\mathbb{R}^n$ funktionaali $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ voidaan esittää muodossa $Lx = Ax$ jollekin $1 \times n$-matriisille A. Funktionaali L on rajoitettu, sillä

$$|L(x)| = \Big|\sum_{i=1}^n A_i x_i\Big| \leq \|A\|_\infty \|x\|_1\,,$$

missä matriisi A ajatellaan vektorina $A \in \mathbb{R}^n$.

Seuraavan tuloksen avulla normiavaruuksien välisten lineaarikuvausten rajoittuneisuutta tarkasteltaessa voi kunkin normin korvata ekvivalentilla normilla, jos se tekee laskut yksinkertaisemmiksi.

Propositio 3.4. *Vektoriavaruuden V normit $\|\cdot\|$ ja $\|\cdot\|'$ ovat ekvivalentteja, jos ja vain jos $\mathrm{id}\colon (V,\|\cdot\|) \to (V,\|\cdot\|')$ on rajoitettu lineaarikuvaus, jonka käänteiskuvaus on rajoitettu.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Propositio 3.5. *Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarikuvaus. Seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

(1) L on rajoitettu,

(2) L on Lipschitz-jatkuva,

(3) L on jatkuva,

(4) L on jatkuva origossa.

Todistus. Oletetaan, että L on rajoitettu. Olkoon $x, y \in V$. Tällöin lineaarisuuden ja rajoittuneisuuden nojalla saadaan

$$\|Lx - Ly\| = \|L(x-y)\| \leq M\|x-y\|$$

jollain $M > 0$ kaikille $x, y \in V$, joten L on Lipschitz-jatkuva. Siis L on jatkuva ja erityisesti jatkuva origossa.

Oletetaan, että L on jatkuva origossa. Jos L ei ole rajoitettu, niin kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on $x_n \in V - \{0\}$, jolle $\|Lx_n\| > n\|x_n\|$. Olkoon $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$. Tällöin $\|y_n\| \to 0$ ja jatkuvuuden nojalla siis $Ly_n \to 0$, kun $n \to \infty$. Kuitenkin

$$\|Ly_n\| = \frac{\|Lx_n\|}{n\|x_n\|} > 1$$

joka antaa ristiriidan. Siis L on rajoitettu. □

Seuraus 3.6. *Rajoitetun lineaarikuvauksen ydin on suljettu aliavaruus.* □

Esimerkki 3.7. Esimerkissä 1.7 tarkasteltu lineaarikuvaus $\lim\colon c(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ on rajoitettu, koska

$$|\lim \omega| = |\lim_{k\to\infty} \omega(k)| \le \sup_{k\in\mathbb{N}} |\omega(k)| = \|\omega\|_\infty\,,.$$

Siis $\ker \lim = c_0$ on normiavaruuden $c(\mathbb{K})$ suljettu aliavaruus.

Esimerkki 3.8. Olkoon $d^\infty(\mathbb{K}) \subset \ell^\infty(\mathbb{K})$ äärellisten jonojen avaruus. Olkoon $T\colon d^\infty(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ lineaarikuvaus

$$T(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k)\,.$$

Olkoot $e_i \in \ell^\infty(\mathbb{K})$ kuten Esimerkissä 2.27. Tällöin

$$\left|T\sum_{i=1}^{n} e_i\right| = n \to \infty\,,$$

kun $n \to \infty$, mutta $\left\|\sum_{i=1}^n e_i\right\|_\infty = 1$ kaikilla n. Siis T ei ole rajoitettu.

Esimerkki 3.9. Esimerkin 2.20 nojalla identtinen kuvaus $\mathrm{id}\colon (\ell^q(\mathbb{K}), \|\cdot\|_p) \to \ell^q(\mathbb{K})$ ei ole rajoitettu, jos $p > q$ tai jos $p = \infty$ ja $q \neq p$.

Esimerkki 3.10. Derivaattaoperaattori $D\colon (\mathrm{C}^1(I), \|\cdot\|_{\mathrm{C}^1,\infty}) \to \mathrm{C}^0(I)$ on rajoitettu, jos $\mathrm{C}^1(I)$ varustetaan kummalla tahansa näistä normeista koska

$$\|Df\|_\infty = \|f'\|_\infty \le \|f\|_{\mathrm{C}^1,\infty} \le \|f\|_{\mathrm{C}^1,1}\,.$$

Sen sijaan derivaattaoperaattori $D\colon (\mathrm{C}^1(I), \|\cdot\|_\infty) \to \mathrm{C}^0(I)$ ei ole rajoitettu kuten harjoituksissa osoitetaan.

3.2 Duaali ja operaattorinormi

Lineaarikuvauksen $T \in \mathrm{Lin_b}(V, W)$ operaattorinormi on

$$\|T\| = \inf\Big\{M \ge 0 : \|Tv\| \le M\,\|v\|\ \forall v \in V\Big\}\,.$$

Esimerkki 3.11. (1) Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Esimerkissä 1.4 tarkastellun evaluaatiokuvauksen rajoittuma $E_a\colon \mathscr{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $E_a(f) = f(a)$ on rajoitettu, koska

$$|E_a f| = |f(a)| \le \sup|f(t)| = \|f\|_\infty\,.$$

Tästä saamme $\|E_a\| \le 1$. Toisaalta $|E_a 1| = 1 = \|1\|$, joten $\|E\| = 1$.
(2) Kuvaus $\mathscr{I}\colon \mathrm{C}^0([0,1]) \to \mathbb{R}$,

$$\mathscr{I}g = \int_0^1 g(t)dt\,,$$

on rajoitettu ja $\|\mathscr{I}\| = 1$, koska $\|\mathscr{I}(1)\| = 1 = \|1\|$.

Lemma 3.12. *Jos $V \neq \{0\}$, pätee*

$$\|T\| = \sup_{v\in V-\{0\}} \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} = \sup_{\|v\|_V=1} \|Tv\|_W\,.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lemma 3.13. *Operaattorinormi on normi. Jokaiselle $v \in V$ pätee $\|Tv\| \le \|T\|\|v\|$.*

Todistus. Selvästi operaattorinormi saa arvoja joukossa $[0, \infty[$. Jos $\|T\| = 0$, niin $\|Tv\| = 0$ kaikilla $v \in V$, joten $T = 0$. Normi käyttäytyy hyvin myös vakiolla kertomisen suhteen, joten ainoastaan kolmioepäyhtälössä on tarkastamista: Olkoot $S, T \in \mathrm{Lin}_b(V, W)$. Tällöin

$$\|(S+T)v\| = \|Sv + Tv\| \le \|Sv\| + \|Tv\|$$

kaikilla $v \in V$. Erityisesti tämä pätee, kun $\|v\| = 1$, mistä väite seuraa siirtymällä supremumiin.

Toinen väite harjoituksissa. □

Varustamme avaruuden $\mathrm{Lin}_b(V, W)$ jatkossa oletuksena operaattorinormilla.

Normiavaruuden V duaali on normiavaruus

$$V' = \mathrm{Lin}_b(V, \mathbb{K})\,.$$

Lemma 3.14. *Olkoot V_1, V_2, V_3 normiavaruuksia ja olkoot $S\colon V_1 \to V_2$ ja $T\colon V_2 \to V_3$ rajoitettuja lineaarikuvauksia. Tällöin*

$$\|T \circ S\| \le \|T\|\|S\|\,.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Harjoitustehtäviä

3.1. Olkoot V ja W vektoriavaruuksia. Osoita, että lineaarikuvausten joukko $\mathrm{Lin}(V, W)$ on vektoriavaruuden $\mathscr{F}(V, W)$ vektorialiavaruus.

3.2. Olkoot V ja W normiavaruuksia. Osoita, että rajoitettujen lineaarikuvausten joukko $\mathrm{Lin}_b(V, W)$ on vektoriavaruuden $\mathrm{Lin}(V, W)$ vektorialiavaruus.

3.3. Osoita, että vektoriavaruuden V normit $\|\cdot\|$ ja $\|\cdot\|'$ ovat ekvivalentteja, jos ja vain jos $\mathrm{id}\colon (V, \|\cdot\|) \to (V, \|\cdot\|')$ on rajoitettu lineaarikuvaus, jonka käänteiskuvaus on rajoitettu.

3.4. Olkoon

$$V = (\{f \in \mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{R}) : f(1) = 0\}, \|\cdot\|_\infty)\,.$$

Osoita, että aliavaruus

$$H = \Big\{ f \in V : \int_{[0,1]} f = 0 \Big\}$$

on suljettu.[2]

[2] Analyysin kursseilla todistettuja asioita ei tarvitse todistaa uudelleen.

3.5. Lineaarikuvaus $\mathscr{I}\colon \big(\mathrm{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty\big) \to \big(\{g \in \mathrm{C}^1([0,1]) : g(0) = 0\}, \|\cdot\|_\infty\big)$,

$$(\mathscr{I} f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,,$$

on bijektio analyysin peruslauseen nojalla. Osoita, että $\mathscr{I}$ on rajoitettu ja että $\mathscr{I}^{-1}$ ei ole rajoitettu.

3.6. Olkoon $V \neq \{0\}$. Osoita, että

$$\|T\| = \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} = \sup_{\|v\|_V = 1} \|Tv\|_W\,.$$

3.7. Olkoot V_1, V_2, V_3 normiavaruuksia ja olkoot $S\colon V_1 \to V_2$ ja $T\colon V_2 \to V_3$ rajoitettuja lineaarikuvauksia. Osoita, että $\|T \circ S\| \leq \|T\|\|S\|$. Anna esimerkki, jossa pätee aito erisuuruus.

Olkoon $T\colon \ell^\infty(\mathbb{K}) \to \ell^\infty(\mathbb{K})$ lineaarikuvaus, joka määritellään asettamalla

$$(T\omega)(k) = \frac{\omega(k)}{k+1}$$

jokaiselle $\omega \in \ell^\infty(\mathbb{K})$ ja jokaiselle $k \in \mathbb{N}$.

3.8. Osoita, että T on rajoitettu ja että $T^{-1}\colon T(\ell^\infty(\mathbb{K})) \to \ell^\infty(\mathbb{K})$ ei ole rajoitettu.

3.9. Osoita, että $T(\ell^\infty(\mathbb{K}))$ ei ole normiavaruuden $\ell^\infty(\mathbb{K})$ suljettu aliavaruus.

Luku 4

Banachin avaruuksista

4.1 Banachin avaruus

Täydellinen normiavaruus on Banachin avaruus.

Propositio 4.1. *(1) Banachin avaruuden suljettu aliavaruus on Banachin avaruus.*

(2) Normiavaruuden aliavaruus, joka on Banachin avaruus indusoidulla normilla, on suljettu.

Todistus. Seuraa metristen avaruuksien kurssin tuloksista. □

Esimerkki 4.2. (1) Euklidinen avaruus $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ on täydellinen, koska $\mathbb{R}$ on täydellinen. Samoin $\mathbb{C}^n$ on täydellinen.

(2) Äärellisulotteiset normiavaruudet ovat Banachin avaruuksia: Koska kaikki äärellisulotteisen vektoriavaruuden V normit ovat ekvivalentteja keskenään, täydellisyys ei riipu normin valinnasta. Voimme siis olettaa, että V on varustettu normilla, joka tekee siitä isometrisen euklidisen avaruuden kanssa.[1] Tällöin väite seuraa kohdasta(1).

(3) Olkoon X kompakti metrinen avaruus. Metristen avaruuksien kurssilla osoitettiin, että $\big(\mathrm{C}^0(X), \|\cdot\|_\infty\big)$ on Banachin avaruus.

Esimerkki 4.3. $\big(\mathrm{C}^1([a,b]), \|\cdot\|_\infty\big)$ ei ole Banachin avaruus: Funktiot f_k,

$$f_k(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{k}}\,,$$

ovat jatkuvasti derivoituvia ja $f_k \to |\cdot|$ avaruudessa $\mathrm{C}^0([-1,1])$, kun $k \to \infty$. Jatkuvasti derivoituvien funktioiden tasainen rajafunktio ei siis välttämättä ole derivoituva. Sen sijaan $(\mathrm{C}^1([a,b]), \|\cdot\|_{\mathrm{C}^1,\infty})$ on Banachin avaruus.

[1] Katso Harjoitustehtävä 2.1.

Todistus. Olkoon $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyn jono avaruudessa $(\mathrm{C}^1([a,b]), \|\cdot\|_{\mathrm{C}^1,\infty})$. Tällöin $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ja $(f_k')_{k\in\mathbb{N}}$ ovat Cauchyn jonoja avaruudessa $\mathrm{C}^0([a,b])$. Koska $\mathrm{C}^0([a,b])$ on Banachin avaruus, on $f,g \in \mathrm{C}^0([a,b])$, joille $f_k \to f$ ja $g_k \to g$, kun $k \to \infty$. Tasaisesta suppenemisesta seuraa, että

$$f(x) - f(a) \leftarrow f_k(x) - f_k(a) = \int_a^x f_k' \to \int_a^x g\,,$$

kun $k \to \infty$. Analyysin peruslauseen nojalla $g = f'$, joten

$$\|f_k - g\|_{\mathrm{C}^1,\infty} = \|f_k - g\|_\infty + \|f_k' - g'\|_\infty \to 0\,,$$

kun $k \to \infty$. Siis $f_k \to f$ avaruudessa $\mathrm{C}^1([a,b])$, kun $k \to \infty$. $\square$

Olkoon V normiavaruus ja olkoot $x_k \in V$, $k \in \mathbb{N}$. Sarja $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ suppenee itseisesti, jos sarja $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|x_k\|$ suppenee.

Esimerkki 4.4. Olkoon $e_k \in d^\infty \subset \ell^\infty$, $e_k(j) = \delta_{jk}$. Tällöin sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{e_k}{k^2} \right\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

suppenee, joten sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{e_k}{k^2}$ suppenee itseisesti. Sen summa avaruudessa ℓ^∞ on kuvaus $\omega \in \ell^\infty - d^\infty$,

$$\omega(k) = \frac{1}{k^2}\,.$$

Sarja siis ei suppene avaruudessa d^∞ vaikka se on itseisesti suppeneva.

Lause 4.5. *Normiavaruus on Banachin avaruus, jos ja vain jos sen jokainen itseisesti suppeneva sarja suppenee.*

Todistus. Olkoon V Banachin avaruus. Itseisesti suppenevan sarjan osasummat muodostavat Cauchyn jonon: Jos $n \geq m$, pätee

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{m} x_k \right\| = \left\| \sum_{k=m}^{n} x_k \right\| \leq \sum_{k=m}^{n} \|x_k\| \to 0\,,$$

kun $m \to \infty$. Siis itseisesti suppenevan sarjan osasummien jono on Cauchyn jono, joten itseisesti suppeneva sarja suppenee.

Olkoon V normiavaruus, jonka itseisesti suppenevat sarjat suppenevat. Jos $(a_k)_{k=1}^\infty$ on Cauchyn jono avaruudessa V, niin sillä on osajono $(a_{k_j})_{j=1}^\infty$, jolle pätee

$$\|a_{k_{j+1}} - a_{k_j}\| \leq 2^{-j}$$

kaikilla j. Geometrinen sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} 2^{-j}$ suppenee, joten oletuksen mukaan sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{k_{j+1}} - a_{k_j}$ suppenee. Mutta tämän sarjan osasummien jono on $(a_{k_j} - a_{k_1})_{j=1}^\infty$, joten $(a_{k_j})_{j=1}^\infty$ suppenee. Cauchyn jonolla $(a_k)_{k=1}^\infty$ on siis suppeneva osajono, joten se suppenee. $\square$

Esimerkki 4.6. (1) Olkoon $X \neq \emptyset$. Osoitamme, että $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$ on Banachin avaruus. Olkoon $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ itseisesti suppeneva sarja. Tällöin sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ ovat itseisesti suppenevia kaikilla x. Koska $\mathbb{K}$ on täydellinen, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ suppenee jokaisella x. Lisäksi

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\Big| \le \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|\,,$$

joten funktio $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ on rajoitettu. Lisäksi pätee edellisten nojalla

$$\begin{aligned}\Big\|f - \sum_{k=1}^{N} f_k\Big\|_\infty &= \sup_{x\in X}\Big|f(x) - \sum_{k=1}^{N} f_k(x)\Big| \le \sup_{x\in X}\Big|\sum_{k=N+1}^{\infty} f_k(x)\Big| \\ &\le \sum_{k=N+1}^{\infty} \sup_{x\in X} |f_k(x)| = \sum_{k=N+1}^{\infty} \|f_k(x)\|_\infty \to 0\,,\end{aligned}$$

kun $N \to \infty$. Siis sarja $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ suppenee, joten Lauseen 4.5 nojalla $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$ on Banachin avaruus.

(2) Kohdan (1) nojalla $\ell^\infty(\mathbb{K})$ on Banachin avaruus. Suppenevien jonojen aliavaruus $c(\mathbb{K})$ ja nollaan suppenevien jonojen aliavaruus $c_0(\mathbb{K})$ ovat Proposition 4.1 nojalla Banachin avaruuksia koska ne ovat Banachin avaruuden ℓ^∞ suljettuja aliavaruuksia Harjoitustehtävän 4.4 ja Esimerkin 3.7 nojalla.

Propositio 4.7. *Jos X on normiavaruus ja Y on Banachin avaruus, niin $\mathrm{Lin_b}(X,Y)$ on Banachin avaruus.*[2]

Todistus. Olkoon (T_k) Cauchyn jono avaruudessa $\mathrm{Lin_b}(X,Y)$. Kun $x \in X$ on kiinnitetty, (T_kx) on Cauchyn jono avaruudessa Y sillä

$$\|T_kx - T_nx\| = \|(T_k - T_n)x\| \le \|T_k - T_n\|\|x\|\,.$$

Koska Y on täydellinen, jono (T_kx) suppenee kohti raja-arvoa $y_x \in Y$. Määritellään kuvaus $T\colon X \to Y$ asettamalla $Tx = y_x$.

Kuvaukselle T pätee

$$\begin{aligned}T(\lambda x_1 + \mu x_2) &= \lim_{k\to\infty} T_k(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lim_{k\to\infty}(\lambda T_kx_1 + \mu T_kx_2) = \lambda \lim_{k\to\infty} T_kx_1 + \mu \lim_{k\to\infty}(T_kx_2) \\ &= \lambda Tx_1 + \mu Tx_2\end{aligned}$$

kaikilla $x_1, x_2 \in X$, joten se on lineaarinen. Se on myös rajoitettu: Koska (T_k) on Cauchyn jono, on $M > 0$, jolle $\|T_k\| \le M$ kaikilla k. Siispä normin jatkuvuuden nojalla

$$\|Tx\| = \|\lim_{k\to\infty} T_kx\| = \lim_{k\to\infty}\|T_kx\| \le M\|x\|\,.$$

Osoitetaan vielä, että $T_k \xrightarrow[k\to\infty]{} T$. Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin on n_0 siten, että $\|T_k - T_n\| < \epsilon$, kun $k, n \ge n_0$. Koska $\|T_kx - T_nx\| \xrightarrow[k\to\infty]{} \|Tx - T_nx\|$, saadaan siis kaikille $x \in X$ epäyhtälö

$$\|(T - T_n)x\| = \|Tx - T_nx\| \le \epsilon\|x\|\,,$$

kun $n \ge n_0$. Siispä $\|(T - T_n)\| \le \epsilon$, kun $n \ge n_0$. □

Seuraus 4.8. *Normiavaruuksien duaalit ovat Banachin avaruuksia.* □

[2] Muista, että käytämme operaattorinormia.

4.2 Jonoavaruudet

Tutustuimme jonoavaruuksiin $\ell^p(\mathbb{K})$, kun $1 \le p < \infty$ tai $p = \infty$, Esimerkissä 2.5. Totesimme, että kaikki avaruudet $\ell^p(\mathbb{K})$ ovat avaruuden $\ell^\infty(\mathbb{K})$ aliavaruuksia. Seuraava tulos kuvaa niiden keskinäiset suhteet tarkemmin.

Propositio 4.9. *Olkoot* $1 \le p < q$. *Tällöin*

$$\ell^1(\mathbb{K}) \subsetneq \ell^p(\mathbb{K}) \subsetneq \ell^q(\mathbb{K}) \subsetneq c_0(\mathbb{K}) \subsetneq c(\mathbb{K}) \subsetneq \ell^\infty(\mathbb{K})\,.$$

Todistus. Muut sisäkkäisyydet ovat selviä mutta ℓ^p-avaruuksien sisäkkäisyys vaatii tarkastelun. Seuraava lemma osoittaa, että normien $\|\cdot\|_p$ yksikköpallot käyttäytyvät kuten kuvassa 2.1.

Lemma 4.10 (Jensenin epäyhtälö)**.** *Olkoot* $1 \le p \le q$. *Kaikille* $x \in \mathbb{R}^n$ *pätee*

$$\|x\|_p \ge \|x\|_q\,.$$

Todistus. Koska tiedämme, että $\|\cdot\|_p$ ja $\|x\|_q$ ovat normeja, riittää osoittaa, että $\|x\|_p \ge 1$ kaikille x, joille pätee $\|x\|_q = 1$. Koska tällöin kaikille i pätee $|x_i| \le 1$ ja $q \ge p$, niin $|x_i|^q \le |x_i|^p$ kaikilla $1 \le i \le n$, joten

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^q \le \sum_{i=1}^n |x_i|^p = 1\,.$$

Siis $\|x\|^q \ge 1 = \|x\|^p$. Huolellisemmalla tarkastelulla nähdään, että yhtäsuuruus pätee vain vektoreilla e_i. □

Lemman 4.10 nojalla $\ell^p(\mathbb{K}) \subset \ell^q(\mathbb{K})$. Olkoon $f_p \in \ell^\infty(\mathbb{K})$ funktio $f_p(k) = k^{-\frac{1}{p}}$. Tällöin on helppo tarkastaa, että kaikilla $q > p$ pätee $f_p \in \ell^q(\mathbb{K}) - \ell^p(\mathbb{K})$, joten $\ell^p(\mathbb{K}) \subsetneq \ell^q(\mathbb{K})$. □

Eksponentin $p \in [0, \infty[\cup \{\infty\}$ duaalieksponentti on

$$p' = \begin{cases} \frac{p}{p-1} & , \text{ jos } 1 < p < \infty \\ \infty & , \text{ jos } p = 1 \\ 1 & , \text{ jos } p = \infty \end{cases}\,.$$

Huomaa, että erityisesti $2' = 2$. Seuraavan tärkeän epäyhtälön avulla saamme käsiteltyä klassiset esimerkit ℓ^p-avaruuksien duaalisuusominaisuuksista.

Lemma 4.11 (Hölderin epäyhtälö)**.** *Jos* $\omega \in \ell^p(\mathbb{K})$ *ja* $\omega' \in \ell^{p'}(\mathbb{K})$, *niin* $\omega\omega' \in \ell^1(\mathbb{K})$ *ja*

$$\|\omega\omega'\|_1 \le \|\omega\|_p \|\omega'\|_{p'}$$

Todistus. Tarkastellaan tapaus $1 < p < \infty$. Tapaus $p = 1$ tai $p = \infty$ on helpompi ja jätetään harjoituksiin. Käytämme seuraava differentiaalilaskennan lemmaa.

Lemma 4.12 (Painotettu aritmeettis-geometrinen epäyhtälö)**.** *Kaikille* $r, s \ge 0$ *ja kaikille* $0 < r < 1$ *pätee*

$$s^r t^{1-r} \le rs + (1-r)t\,. \tag{4.1}$$

Todistus. Epähtälö seuraa logaritmin konkaavisuudesta: Koska logaritmifunktion $x \mapsto \log x$ toinen derivaatta on $-\frac{1}{x^2} < 0$, pätee kaikille $0 < r < 1$ epäyhtälö

$$r \log s + (1-r) \log t \leq \log(rs + (1-r)t)\,,$$

mistä väite seuraa. □

Olkoot $\omega \in \ell^p(\mathbb{K})$ ja $\tau \in \ell^{p'}(\mathbb{K})$. Epäyhtälön (4.1) nojalla valitsemalla $r = \frac{1}{p}$, $s = \frac{|\omega(k)|^p}{\|\omega\|_p^p}$ ja $t = \frac{|\tau(k)|^{p'}}{\|\tau\|_{p'}^{p'}}$ saamme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\omega(k)|}{\|\omega\|_p} \frac{|\tau(k)|}{\|\tau\|_{p'}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p} \frac{|\omega(k)|^p}{\|\omega\|_p^p} + \frac{1}{p'} \frac{|\tau(k)|^{p'}}{\|\tau\|_{p'}^{p'}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\,,$$

mistä väite seuraa. □

Lemma 4.13. *Olkoon $p \in [1, \infty]$ ja olkoon $\tau \in \ell^{p'}(\mathbb{K})$. Kuvaus $L_\tau \colon \ell^p(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$,*

$$L_\tau(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega(i)\tau(i)\,,$$

on rajoitettu funktionaali.[3]

Todistus. Kuvaus L_τ on hyvin määritelty, sillä sarja $\sum_{i=0}^{\infty} |\omega(i)\tau(i)|$ suppenee Hölderin epäyhtälön nojalla, joten $\sum_{i=0}^{\infty} \omega(i)\tau(i)$ suppenee. Se on lineaarinen koska

$$L_\tau(\lambda\omega + \lambda'\omega') = \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda\omega(i) + \lambda'\omega'(i))\tau(i) = \lambda L_\tau(\omega) + \lambda' L(\omega')\,,$$

ja se on rajoitettu funktionaali, koska

$$|L_\tau(\omega)| = \Big|\sum_{i=0}^{\infty} \omega(i)\tau(i)\Big| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\omega(i)\tau(i)| = \|\omega\tau\|_1 \leq \|\tau\|_{p'} \|\omega\|_p$$

Hölderin epäyhtälön nojalla. □

Määritellään kuvaus $T \colon \ell^{p'}(\mathbb{K}) \to (\ell^p(\mathbb{K}))'$ asettamalla

$$T(\tau) = L_\tau\,.$$

Lemma 4.14. *T on lineaarikuvaus kaikilla $1 \leq p \leq \infty$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Olkoot V ja W normiavaruuksia. Lineaarikuvaus $L \colon V \to W$ on isometria eli isometrinen isomorfismi, jos $\|Lv\| = \|v\|$ kaikille $v \in V$.

On hyvä huomata, että lineaarisuuden nojalla isometrinen isomorfismi on isometria myös metristen avaruuksien teorian mielessä: kaikille $x, y \in V$ pätee $\|Lx - Ly\| = \|x - y\|$.

[3]Vertaa Esimerkkiin 3.3.

Lause 4.15. *Olkoon $1 \le p < \infty$. Tällöin kuvaus $T\colon \ell^{p'}(\mathbb{K}) \to (\ell^p(\mathbb{K}))'$ on isometrinen isomorfismi. Kuvaus $T\colon \ell^1 \to (c_0(\mathbb{K}))'$ on isometrinen isomorfismi.*

Todistus. Jos $T(\tau) = 0$, niin $0 = L_\tau(e_i) = \tau(i)$ kaikilla i, joten T on injektio.

Oletetaan, että $1 < p < \infty$ ja osoitetaan surjektiivisuus: Olkoon $F \in (\ell^p(\mathbb{K}))'$. Määritellään ehdokas jonoksi $\tau \in \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, jolle pätisi $T(\tau) = F$ asettamalla kuten edellä $\tau(i) = F(e_i)$ kaikilla i. Osoitetaan ensin, että $\tau \in \ell^{p'}(\mathbb{K})$. Olkoon $\widetilde{\tau} \in \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$,

$$\widetilde{\tau}(i) = \begin{cases} \dfrac{|\tau(i)|^{p'}}{\tau(i)}, & \text{kun } \tau(i) \neq 0 \\ 0 & \text{muuten}\,. \end{cases}$$

Jokaiselle $N \in \mathbb{N}$ pätee

$$\sum_{i=0}^{N} |\widetilde{\tau}(i)|^p = \sum_{i=0}^{N} |\tau(i)|^{p'}$$

ja käyttämällä tietoa, että F on rajoitettu lineaarikuvaus saamme

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N} |\tau(i)|^{p'} &= \sum_{i=0}^{N} \tau(i)\widetilde{\tau}(i) = \sum_{i=0}^{N} \widetilde{\tau}(i) F(e_i) = F\Big(\sum_{i=0}^{N} \widetilde{\tau}(i) e_i\Big) \\ &\le \|F\| \bigg(\sum_{i=0}^{N} |\widetilde{\tau}(i)|^p\bigg)^{1/p} = \|F\| \bigg(\sum_{i=0}^{N} |\tau(i)|^{p'}\bigg)^{1/p}, \end{aligned}$$

josta saadaan

$$\bigg(\sum_{i=0}^{N} |\tau(i)|^{p'}\bigg)^{\frac{1}{p'}} \le \|F\|$$

kaikille N, joten $\tau \in \ell^{p'}$ ja $\|\tau\|_{p'} \le \|F\|$.

Normien arvio toiseen suuntaan seuraa Hölderin epäyhtälöstä:

$$|L_\tau(\omega)| \le \|\omega\|_p \|\tau\|_{p'}\,,$$

joten $\|F\| \le \|\tau\|_{p'}$, kunhan osoitetaan, että $T(\tau) = F$: Selvästi $T(\tau)(e_i) = L_\tau e_i = F(e_i)$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, joten lineaarisuuden nojalla $T(\tau)|_{d^p} = F|_{d^p}$. Koska molemmat lineaarikuvaukset ovat rajoitettuja ja $d^p(\mathbb{K})$ on tiheä avaruudessa $\ell^p(\mathbb{K})$, väite seuraa. Olemme siis osoittaneet, että T on surjektio ja että kaikille $\tau \in \ell^{p'}(\mathbb{K})$ pätee $\|T(\tau)\| = \|\tau\|$, joten T on isometria.

Harjoituksissa todistetaan samaan tapaan, että $\ell^\infty(\mathbb{K})$ on isometrisesti isomorfinen avaruuden $(\ell^1(\mathbb{K}))'$ kanssa ja että $\ell^1(\mathbb{K})$ on isometrisesti isomorfinen avaruuden $(c_0(\mathbb{K}))'$ kanssa. on isometrinen isomorfismi. [4] □

Myöhemmin näemme Hahnin ja Banachin lauseen (Lause 10.6) avulla, että $(\ell^\infty(\mathbb{K}))'$ on aidosti suurempi avaruus kuin $T(\ell^1)$.

Seuraus 4.16. *$\ell^p(\mathbb{K})$ on Banachin avaruus jokaisella $p \in [1, \infty]$.* □

Todistus. Lauseen 4.15 mukaan jokainen $\ell^p(\mathbb{K})$ on jonkin normiavaruuden duaali. Väite seuraa Seurauksesta 4.8. □

[4] Esimerkissä 2.11 osoitimme, että $d^\infty(\mathbb{K})$ ei ole tiheä avaruudessa $\ell^\infty(\mathbb{K})$.

4.3 Bairen lause

Täydellisten metristen avaruuksien tulokset ovat käytettävissä Banachin avaruuksissa. Palautamme mieleen Bairen lauseen topologian kurssilta jossa sitä käsiteltiin syksyllä 2017 luvussa 9.4.

Topologinen avaruus on Bairen avaruus, jos sen tiheiden avoimien joukkojen numeroituvat leikkaukset ovat tiheitä. Topologisen avaruuden osajoukko on harva[a], jos sen sulkeumalla ei ole sisäpisteitä.

[a]nowhere dense

Propositio 4.17. *Topologinen avaruus on Bairen avaruus, jos ja vain jos sen suljettujen harvojen joukkojen numeroituvilla yhdisteillä ei ole sisäpisteitä.*[5] □

Todistus. Topologian kurssilla □

Lause 4.18 (Bairen lause)**.** *Täydellinen metrinen avaruus on Bairen avaruus.*

Todistus. Topologian kurssilla □

Käytämme Bairen lausetta myöhemmin kurssilla Banachin ja Steinhausin lauseen 6.1 todistuksessa. Tässä luvussa osoitamme harjoitustehtävänä seuraavan tuloksen:

Propositio 4.19. *Ääretönulotteisen Banachin avaruuden Hamelin kanta on ylinumeroituva.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Harjoitustehtäviä

4.1. Olkoon $X \neq \emptyset$ ja olkoon V Banachin avaruus. Olkoon $\mathscr{B}(X,V)$ rajoitettujen funktioiden $f\colon X \to V$ vektoriavaruus. Selvästi lauseke

$$\|f\| = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_V$$

määrää normin avaruudessa $\mathscr{B}(X,V)$. Osoita, että $\big(\mathscr{B}(X,V), \|\cdot\|_\infty\big)$ on Banachin avaruus.

4.2. Olkoot $\|\cdot\|$ ja $\|\cdot\|'$ ekvivalentteja normeja vektoriavaruudessa V. Osoita, että $(V,\|\cdot\|)$ on Banachin avaruus, jos ja vain jos $(V,\|\cdot\|')$ on Banachin avaruus.

4.3. Olkoot X ja Y Banachin avaruuksia. Varustetaan vektoriavaruus $X\times Y$ normilla

$$\|(x,y)\| = \max(\|x\|_X, \|y\|_Y)\,.$$

Osoita, että $X \times Y$ on Banachin avaruus.

[5]Suljettu joukko on harva, jos ja vain jos sillä ei ole sisäpisteitä.

4.4. Osoita, että $c(\mathbb{K})$ on avaruuden $(\ell^\infty(\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ suljettu aliavaruus. [6]

4.5. Olkoot $1 \le p < q < \infty$. Osoita, että $\ell^p(\mathbb{K})$ on avaruuden $\ell^q(\mathbb{K})$ tiheä aliavaruus. [7]

4.6. Olkoot $\omega \in \ell^1(\mathbb{K})$ ja $\omega' \in \ell^\infty(\mathbb{K})$. Osoita, että $\omega\omega' \in \ell^1(\mathbb{K})$ ja

$$\|\omega\omega'\|_1 \le \|\omega\|_1 \|\omega'\|_\infty .$$

4.7. Olkoon $p \in [1, \infty]$ ja olkoon $\tau \in \ell^{p'}$. Olkoon $L_\tau \colon \ell^p(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$,

$$L_\tau(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega(i)\tau(i) .$$

Osoita, että kuvaus $T \colon \ell^{p'}(\mathbb{K}) \to (\ell^p(\mathbb{K}))'$

$$T(\tau) = L_\tau$$

on lineaarinen.

4.8. Osoita, että $\ell^\infty(\mathbb{K})$ on isometrisesti isomorfinen avaruuden $(\ell^1(\mathbb{K}))'$ kanssa.

4.9. Osoita, että $\overline{d^\infty(\mathbb{K})} = c_0(\mathbb{K})$.

4.10. Osoita, että $\ell^1(\mathbb{K})$ on isometrisesti isomorfinen avaruuden $(c_0(\mathbb{K}))'$ kanssa.

4.11. Osoita, että ääretönulotteisen Banachin avaruuden Hamelin kanta on ylinumeroituva. [8]

4.12. Onko reaalisten polynomien vektoriavaruudella $\mathbb{R}[X]$ normia $\|\cdot\|$, jolle normiavaruus $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$ on Banachin avaruus?

Olkoot $1 \le p < q$. Olkoon $i_{pq} \colon \ell^p(\mathbb{K}) \to \ell^q(\mathbb{K})$ kuvaus $i_{pq}(\omega) = \omega$.

4.13. Olkoon $r > 0$. Osoita, että $i_{pq}(\overline{B}(0, r))$ on suljettu joukko, jolla ei ole sisäpisteitä.

4.14. Olkoon $q > 1$. Osoita, että

$$\bigcup_{1 \le p < q} i_{pq}(\ell^p)$$

on avaruuden ℓ^q aito aliavaruus.[9]

[6] Olkoon $(f_k)_{k=1}^\infty$ Cauchyn jono avaruudessa c. Koska ℓ^∞ on Banachin avaruus, jonolla $(f_k)_{k=1}^\infty$ on raja-arvo. Osoita, että raja-arvona saatu jono on suppeneva.

[7] Esimerkki 2.11

[8] Käytä Bairen kategorialausetta.

[9] Käytä tehtävää 4.13 ja Bairen kategorialausetta. Tätä varten pitää siirtyä numeroituviin yhdisteisiin.

Luku 5

Tekijäavaruudet

Tässä luvussa tarkastelemme vektoriavaruuden aliavaruuksien avulla muodostettuja tekijäavaruuksia. Osoitamme tämän konstruktion avulla, että jokainen normiavaruus voidaan upottaa isometrisesti Banachin avaruuteen. Tarkastelemme myös mittateorian kurssilta tuttuja L^p-avaruuksia p-integroituvien funktioiden avaruuksien tekijäavaruuksina.

5.1 Tekijäavaruus

Olkoon V vektoriavaruus ja olkoon H sen vektorialiavaruus. Alkion $v \in V$ sivuluokka on

$$v + H = \{v + h : h \in H\} .$$

Sivuluokat muodostavat tekijäjoukon

$$V/H = \{v + H : v \in V\}$$

.

Lemma 5.1. *Olkoon V vektoriavaruus ja olkoon H sen vektorialiavaruus. Lausekkeet*

$$(x + H) + (y + H) = (x + y) + H$$

ja

$$\lambda(x + H) = \lambda x + H$$

kaikille $x, y \in V$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, määräävät laskutoimituksen ja vakiolla kertomisen tekijäjoukossa V/H. Kolmikko $(V/H, +, \cdot)$ on vektoriavaruus.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Olkoon V vektoriavaruus ja olkoon H sen vektorialiavaruus. Vektoriavaruus $(V/H, +, \cdot)$ on aliavaruutta H vastaava tekijä(vektori)avaruus.

Tekijäavaruuden avulla voi muodostaa monenlaisia hyödyllisiä normiavaruuksia. Tarkastelemme näitä sovelluksia luvuissa 5.2 ja 5.3. Seuraavat aputulokset ovat oleellisia havaintoja.

Lemma 5.2. *Vektoriavaruuden minkä tahansa seminormin p ydin*

$$\ker p = \{v \in V : p(v) = 0\}$$

on vektorialiavaruus.

Todistus. Seminormille pätee aina $p(0) = 0$, joten $0 \in \ker p$. Olkoot $v, w \in \ker p$ ja olkoot $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Tällöin

$$0 \leq p(\alpha v + \beta w) \leq |\alpha|\, p(v) + |\beta|\, p(w) = 0\,,$$

joten $\alpha v + \beta w \in \ker p$. □

Lemma 5.3. *Olkoon p seminormi vektoriavaruudessa V. Lauseke*

$$\|v + \ker p\| = p(v)$$

määrittelee normin tekijäavaruudessa $V/\ker p$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

5.2 Normiavaruuden täydellistäminen

Tässä luvussa osoitamme, että jokainen normiavaruus V voidaan kuvata lineaarisella isometrialla jonkin Banachin avaruuden W tiheäksi aliavaruudeksi. Tälle tulokselle on useita erilaisia todistuksia. Luvussa 11.3 todistamme saman tuloksen käyttämällä normiavaruuden V duaalin duaalia. Osoitamme myös, että tällainen Banachin avaruus W on isometriaa vaille yksikäsitteinen.

Olkoon $\mathscr{C}(V)$ avaruuden V Cauchyn jonojen vektoriavaruus.

Lemma 5.4. *Olkoon V normiavaruus. Lauseke*

$$p((v_k)_{k\in\mathbb{N}}) = \lim_{k\to\infty} \|v_k\|$$

määrittelee seminormin avaruudessa $\mathscr{C}(V)$.

Todistus. Osoitetaan ensin, että funktio p on hyvin määritelty: Käänteisen kolmioepäyhtälön nojalla $|\|v_i\| - \|v_j\|| \leq \|v_i - v_j\|$, joten $(\|v_k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ on Cauchyn jono reaalilukujen joukossa, joten se suppenee kohti raja-arvoa joukossa $[0, \infty[$.

Normin homogeenisuus seuraa Lemmasta 2.12 ja kolmioepäyhtälö seuraa normiavaruuden V kolmioepäyhtälöstä. □

Lemma 5.5. *Olkoon V normiavaruus ja olkoon $\|\cdot\|_{\mathscr{C}(V)}$ Lemmassa 5.4 määritellyn seminormin määräämä normi avaruudessa $\mathscr{C}(V)/\ker p$. Kuvaus $\phi\colon V \to \mathscr{C}(V)/\ker p$,*

$$\phi(v) = (v)_{k\in\mathbb{N}} + \ker p\,,$$

on lineaarinen isometrinen upotus. Lisäksi $\overline{\phi(V)} = \mathscr{C}(V)/\ker p$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 5.6. *Olkoon V normiavaruus ja olkoon $\|\cdot\|_{\mathscr{C}(V)}$ Lemmassa 5.4 määritellyn seminormin määräämä normi avaruudessa $\mathscr{C}(V)/\ker p$. Tällöin $(\mathscr{C}(V)/\ker p, \|\cdot\|_{\mathscr{C}(V)})$ on Banachin avaruus.*

Todistus. Olkoon $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyn jono avaruudessa $\mathscr{C}(V)/\ker p$. Muodostetaan Lemman 5.5 avulla avaruuden V Cauchyn jono c_∞, joka on jonon $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ raja-arvo normiavaruudessa $\mathscr{C}(V)/\ker p$.

Jokaisella $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ valitaan Lemman 5.5 avulla $v_k \in V$ siten, että $\|\phi(v_k) - c_k\| < \frac{1}{k}$. Tällöin $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on Cauchyn jono avaruudessa V: Olkoon $\epsilon > 0$. Olkoon $N_\epsilon > 0$ siten, että $\|c_n - c_m\| < \frac{\epsilon}{3}$ ja ja $m, n > \frac{3}{\epsilon}$. Tällöin

$$\|v_n - v_m\|_V = \|\phi(v_n) - \phi(v_m)\| \le \|\phi(v_n) - c_n\| + \|c_n - c_m\| + \|c_m - \phi(v_m)\| < \epsilon\,.$$

Olkoon siis

$$c_\infty = (v_k) + \ker p \in \mathscr{C}(V)/\ker p\,.$$

Tällöin

$$\|c_\infty - c_k\| \le \|c_\infty - \phi(v_k)\| + \|\phi(v_k) - c_k\| \le \epsilon + \frac{1}{k}\,,$$

joka saadaan edellisen nojalla pieneksi valitsemalla k riittävän isoksi. Siis $c_k \to c$, kun $k \to \infty$. □

Seuraus 5.7. *Jokainen normiavaruus uppoaa isometrisesti Banachin avaruuden tiheäksi aliavaruudeksi.* □

Olkoon V normiavaruus. Jos on lineaarinen isometrinen upotus $i\colon V \to W$ Banachin avaruuteen W, jolle $\overline{i(V)} = W$, niin pari (W, i) on avaruuden V täydellistymä.[a]

[a] Usein Banachin avaruutta W sanotaan normiavaruuden V täydellistymäksi.

Olkoon X normiavaruuden V aliavaruus ja olkoon W normiavaruus. Jos lineaarikuvauksille $T \in \mathrm{Lin_b}(X, W)$ ja $\widehat{T} \in \mathrm{Lin_b}(V, W)$ pätee $\widehat{T}|_X = T$, niin $\widehat{T}$ on rajoitetun lineaarikuvauksen T rajoitettu jatko avaruudessa V.

Propositio 5.8. *Olkoon X normiavaruuden V tiheä aliavaruus ja olkoon W Banachin avaruus. Jokaisella operaattorilla $T \in \mathrm{Lin_b}(X, W)$, on yksikäsitteinen rajoitettu jatko $\widehat{T}$ avaruudessa V. Lisäksi $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.*

Todistus. Harjoitustehtävä □

Lause 5.9. *Normiavaruuden täydellistymä on isometriaa vaille yksikäsitteinen.*

Todistus. Olkoot (i_1, W_1) ja (i_2, W_2) normiavaruuden V täydellistymiä. Proposition 5.8 nojalla isometrialla $j_{12} = i_2 \circ i_1^{-1}\colon i_1(V) \to W_2$ on yksikäsitteinen jatko rajoitetuksi lineaarikuvaukseksi $\widehat{j_{12}}\colon W_1 \to W_2$ ja isometrialla $j_{21} = i_1 \circ i_2^{-1}\colon i_2(V) \to W_1$ on yksikäsitteinen jatko rajoitetuksi lineaarikuvaukseksi $\widehat{j_{21}}\colon W_2 \to W_1$. Proposition 5.8 nojalla $\|\widehat{j_{21}}\| = \|\widehat{j_{12}}\| = 1$.

Kuvaus $\widehat{j_{21}} \circ \widehat{j_{12}}$ on identtisen kuvauksen $\mathrm{id}_{V_1} : i_1(V)$ rajoitettu jatko ja kuvaus $\widehat{j_{12}} \circ \widehat{j_{21}}$ on identtisen kuvauksen $\mathrm{id}_{V_2} : i_2(V)$ rajoitettu jatko. Rajoitetun jatkon yksikäsitteisyydestä seuraa, että $\widehat{j_{21}} \circ \widehat{j_{12}} = \mathrm{id}_{W_1}$ ja $\widehat{j_{12}} \circ \widehat{j_{21}} = \mathrm{id}_{W_2}$. Jokaiselle $w \in W_1$ pätee siis

$$\|w\| = \|\widehat{j_{21}} \circ \widehat{j_{12}}(w)\| \leq \|\widehat{j_{12}}(w)\| \leq \|w\| ,$$

joten $\widehat{j_{12}}$ on isometrinen upotus ja vastaavalla tavalla nähdään, että $\widehat{j_{21}}$ on isometrinen upotus, joka on edellä nähdyn nojalla kuvauksen $\widehat{j_{12}}$ käänteiskuvaus. □

5.3 L^p-avaruudet

Olkoon $(Z, \mu) = (Z, \mathscr{B}, \mu)$ mitta-avaruus: $Z \neq \emptyset$, $\mathscr{B}$ sigma-algebra ja μ mitta. Olkoon $1 \leq p < \infty$ ja olkoon $\mathscr{L}^p(Z, \mu)$ niiden mitallisten funktioiden $f \colon Z \to \mathbb{R}$ avaruus, joille pätee

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p \, d\mu < \infty .$$

Integraalin perusominaisuuksien nojalla lauseke $\|f\|_p$ määrää seminormin, joka ei yleensä ole normi. Vastaavasti määritellään $\mathscr{L}^\infty(Z, \mu)$ niiden mitallisten funktioiden f avaruutena, joille

$$\|f\|_\infty = \mathrm{esssup}_{x \in Z} |f(x)| = \inf\{c > 0 : \mu\{y \in Z : |f(y)| > c\} = 0\}$$

on äärellinen.

Lemma 5.10 (Minkowskin epäyhtälö)**.** *Lauseke $\|f\|_p$ on seminormi avaruudessa $\mathscr{L}^p$ kaikilla $p \geq 1$ ja $p = \infty$.*

Todistus. Mitta- ja integraaliteorian luennoissa. □

Mitta-ja integraaliteoriasta muistamme, että esimerkiksi avaruudessa $\mathbb{R}$ varustettuna Lebesguen mitalla on paljon mitallisia funktioita, jotka ovat 0 melkein kaikkialla. Tällaiset funktiot muodostavat seminormin $\|\cdot\|$ ytimen kaikilla p.

Tekijäavaruus

$$L^p(Z, \mu) = \mathscr{L}^p(Z, \mu) / \ker \|\cdot\|_p$$

varustettuna tekijänormilla $\|\cdot\|_p$ on Lebesguen avaruus, jota kutsutaan L^p-avaruudeksi.

Lause 5.11. *Lebesguen avaruus on Banachin avaruus kaikilla p.*

Todistus. Mitta- ja integraaliteorian luennoissa. □

Esimerkki 5.12. $\ell^p(\mathbb{R}) = \mathscr{L}^p(\mathbb{N}, \#) = L^p(\mathbb{N}, \#)$, kun $\#$ on lukumäärämitta.

Lemma 5.13. *[Hölderin epäyhtälö] Olkoon (Z, μ) mitta-avaruus Jos $f \in \mathscr{L}^1(Z, \mu)$ ja $g' \in \mathscr{L}^\infty(Z, \mu)$, niin $fg \in \mathscr{L}^1(Z, \mu)$ ja*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty .$$

Olkoon $p > 1$ ja olkoon $p' = \frac{p}{p-1}$. Jos $f \in \mathscr{L}^p$ ja $g \in \mathscr{L}^{p'}$, niin $fg \in \mathscr{L}^1(Z, \mu)$ ja

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

Todistus. Samaan tapaan kuin Lemma 4.11. Mitta- ja integraaliteorian luennoissa. □

Lause 5.14. *Olkoon* $1 \le p < \infty$ *tai* $p = \infty$. *Tällöin kuvaus* $T\colon L^{p'}(Z,\mu) \to (L^p(Z,\mu))'$,

$$(Tg)f = \int_Z fg\,d\mu\,,$$

on isometrinen upotus.

Todistus. Kuvaus T on lineaarinen integraalin lineaarisuuden nojalla.

Hölderin epäyhtälö (Lemma 5.13) antaa

$$|T(g)f| \le \int_Z |fg|\,d\mu = \|fg\|_1 \le \|g\|_{p'}\,\|f\|_p\,,$$

joten

$$\|T(g)\| = \sup_{f\neq 0} \frac{|T(g)f|}{\|f\|_p} \le \|g\|_{p'}\,.$$

Tarkastellaan ensin tapaus $p = \infty$, $p' = 1$. Seuraavissa lausekkeissa käytämme sopimusta $\frac{0}{0} = 0$. Määritellään kaikille $g \in L^1(Z,\mu) - \{0\}$

$$f_g = \frac{g}{|g|}\,.$$

Tällöin $f_g \in L^\infty(Z,\mu)$, $\|f_g\|_\infty = 1$ ja

$$T(g)(f_g) = \int_Z \frac{g}{|g|}\,g\,d\mu = \|g\|_1\,.$$

Siis $\|T(g)\| = \|g\|_1$.

Jos $1 < p < \infty$, niin kaikille $g \in L^{p'}(Z,\mu)$ pätee

$$f_g = \frac{g}{|g|}\left(\frac{|g|}{\|g\|_{p'}}\right)^{\frac{p'}{p}} \in L^p(Z,\mu)\,,$$

$\|f_g\|_p = 1$ ja

$$T(g)(f_g) = \int_Z \frac{g}{|g|}\left(\frac{|g|}{\|g\|_{p'}}\right)^{\frac{p'}{p}} g\,d\mu = \frac{1}{\|g\|_{p'}^{\frac{p'}{p}}} \int_Z |g|^{\frac{p'}{p}+1}\,d\mu = \|g\|_{p'}\,,$$

joten $\|T(g)\| = \|g\|_{p'}$.

Tapauksessa $p = 1$ valitaan $g \in \mathscr{L}^\infty(Z,\mu)$, jolle $\|g\|_\infty \neq 0$ ja jokaiselle $\epsilon > 0$ joukko

$$A \subset \{z \in Z : |g(z)| > \|g\|_\infty - \epsilon\}$$

siten, että $0 < \mu(A) < \infty$. Määritellään

$$f_g = \frac{1}{\mu(A)}\chi_A \frac{g}{|g|}\,.$$

Tällöin $\|f_g\|_1 = 1$ ja

$$T(g)(f_g) = \frac{1}{\mu(A)}\int_A |g(z)| \ge \|g\|_\infty - \epsilon$$

joukon A määritelmän nojalla. Rajalla $\epsilon \to 0$ saadaan $\|T(g)\| = \|g\|_\infty$. □

Mitta-avaruus (Z, μ) on σ-äärellinen, jos avaruus Z voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä äärellismittaisista mitallisista joukoista.

Lause 5.15. *Olkoon* (Z, μ) σ*-äärellinen mitta-avaruus ja olkoon* $1 \leq p < \infty$*. Kuvaus* $T\colon L^{p'}(Z, \mu) \to (L^p(Z, \mu))'$,

$$(Tg)f = \int_Z fg\, d\mu\,,$$

on isometria.

Todistus. Tarvitaan hieman enemmän mitta- ja integraaliteoriaa kuin kurssilla. Katso esimerkiksi [EW, Luku 6.3], [Wer, Satz II.2.4]. Tarkastelemme tapausta $p = 2$ Hilbertin avaruuksien yhteydessä Luvussa 8.4. $\square$

Seuraus 5.16. *Olkoon* $\Omega \subset \mathbb{R}^n \neq \emptyset$ *mitallinen ja olkoon* λ *Lebesguen mitta. Olkoon* $1 \leq p < \infty$*. Tällöin kuvaus* $T\colon L^{p'}(\Omega, \lambda) \to (L^p(\Omega, \lambda))'$,

$$(Tg)f = \int_Z fg\, d\mu\,,$$

on isometria.

Avaruuden L^∞ duaali on jälleen monimutkaisempi. Tätä aihetta saatetaan käsitellä kurssilla Reaalianalyysi.

Harjoitustehtäviä

5.1. Olkoon V seminormi vektoriavaruudessa V. Osoita, että

$$\|v + \ker p\| = p(v)$$

on normi tekijäavaruudessa $V/\ker p$.

Olkoon V normiavaruus. Määritellään

$$p((v_k)_{k\in\mathbb{N}}) = \lim_{k\to\infty} \|v_k\|$$

jokaiselle avaruuden V Cauchyn jonolle $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Olkoon $\phi\colon V \to \mathscr{C}(V)/\ker p$ kuvaus

$$\phi(v) = (v)_{k\in\mathbb{N}} + \ker p\,,$$

joka liittää vektoriin $v \in V$ vakiojonon $(v)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{C}(V)$ luokan tekijäavaruudessa $\mathscr{C}(V)/\ker p$.

5.2. Osoita, että ϕ on lineaarinen isometrinen upotus.

5.3. Osoita, että $\phi(V)$ on normiavaruuden $\mathscr{C}(V)/\ker p$ tiheä aliavaruus.

Olkoon X normiavaruuden V tiheä vektorialiavaruus. Olkoon W Banachin avaruus ja olkoon $T \in \mathrm{Lin}_\mathrm{b}(X, W)$. Jokaisella $v \in V$ on avaruuden X jono $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, jolle pätee $v = \lim_{k\to\infty} x_k$. Asetetaan

$$\widehat{T}(v) = \lim_{k\to\infty} T(x_k)\,.$$

5.4. Osoita, että kuvauksen $\widehat{T} \colon V \to W$ määritelmä on on hyvin asetettu ja että se on riippumaton jonon $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ valinnasta. Osoita, että $\widehat{T}$ on lineaarikuvaus, jolle $\widehat{T}|_X = T$.

5.5. Osoita, että $\widehat{T} \in \mathrm{Lin}_\mathrm{b}(V, W)$ ja että $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.

5.6. Olkoot $\widehat{T}, \widetilde{T} \in \mathrm{Lin}_\mathrm{b}(V, W)$ kuvauksia, joille $\widehat{T}|_X = \widetilde{T}|_X$. Osoita, että $\widehat{T} = \widetilde{T}$.

5.7. Osoita, että isometrisen upotuksen $T \colon X \to W$ rajoitettu jatko on isometrinen upotus.

Luku 6

Banachin avaruuksien operaattoriteorian keskeisiä lauseita

Tässä luvussa todistamme kolme tärkeää Banachin avaruuksien operaattoreita koskevaa lausetta. Kaikissa näissä tuloksissa täydellisyys on oleellista ja sitä käytetään Bairen lauseen kautta.

6.1 Banachin ja Steinhausin lause

Lause 6.1 (Banachin ja Steinhausin lause eli tasaisen rajoittuneisuuden periaate)**.** *Olkoon X Banachin avaruus ja olkoon Y normiavaruus. Olkoon I indeksijoukko ja olkoot $T_\alpha \in \mathrm{Lin}_\mathrm{b}(X, Y)$ kaikilla $\alpha \in I$. Jos joukko $\{T_\alpha x : \alpha \in I\}$ on rajoitettu kaikilla $x \in X$, niin on $M > 0$, jolle $\|T_\alpha\| \leq M$ kaikilla $\alpha \in I$.*

Todistus. Olkoon $p(x) = \|x\|$. Joukot

$$E_n = \{x \in X : \sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| \leq n\} = \bigcap_\alpha (p \circ T_\alpha)^{-1}[0, n] \,.$$

ovat suljettujen joukkojen leikkauksina suljettuja ja oletuksen nojalla

$$X = \bigcup_{\alpha \in I} E_n \,.$$

Bairen lauseen[1] nojalla jollain joukolla E_N on sisäpiste. Siis jollain $x \in E_N$ ja $r > 0$ pätee $B(x, r) \subset E_N$. Normin ominaisuuksien nojalla $-x \in E_N$, jos ja vain jos $x \in E_N$. Joukon E_n konveksiudesta seuraa, että $B(0, r) \subset E_N$, joten kaikille $\alpha \in I$ pätee

$$\|T_\alpha\| = \sup_{\|x\|=r} \frac{\|T_\alpha x\|}{r} \leq \frac{N}{r} \,.$$

Väitteen luvuksi M voidaan siis valita $\frac{N}{r}$. □

[1] Lause 4.18

Jos jono $T_n \in \mathrm{Lin_b}(X, Y)$ suppenee avaruudessa $\mathrm{Lin_b}(X, Y)$ kohti operaattoria T, sanotaan, että se suppenee tasaisesti tai operaattorinormin suhteen. Jos $T_n x \to Tx \in Y$ kaikille $x \in X$, niin sanotaan, että jono T_n on vahvasti suppeneva. Jos on $T \in \mathrm{Lin_b}(X, Y)$, jolle $Tx = \lim T_n x$ kaikilla $x \in X$, niin jono T_n suppenee vahvasti kohti operaattoria T.[a]

[a]Tämä terminologia on hieman murheellista. Lisäksi vielä joissain lähteissä vahva suppeneminen tarkoittaa suppenemista normin suhteen.

Määritelmästä on selvää, että vahvasti suppenevan jonon raja-arvo, jos sellainen on, on yksikäsitteinen.

Propositio 6.2. *Tasaisesti suppeneva jono operaattoreita suppenee vahvasti samaan raja-arvoon.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Seuraava esimerkki osoittaa, että vahvasta suppenemisesta ei seuraa tasainen suppeneminen:

Esimerkki 6.3. Olkoon $T_k \in \mathrm{Lin_b}(\ell^1(\mathbb{K}), \ell^1(\mathbb{K}))$,

$$T_k\omega(j) = \begin{cases} 0, & \text{kun } j < k \\ \omega(j) & \text{kun } j \geq k \end{cases}$$

Tällöin $T_k\omega \to 0$ kaikilla $\omega \in \ell^1(\mathbb{K})$, joten $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suppenee vahvasti kohti nollaoperaattoria. Kuitenkin

$$\|T_k\| = \sup_{\|\omega\|_1=1} \|T_k e_k\| = 1\,,$$

joten $\|T_k - 0\| = \|T_k\| \not\to 0$, kun $k \to \infty$.

Seuraava esimerkki osoittaa, että yleisessä tapauksessa vahvasti suppeneva jono ei välttämättä suppene vahvasti.

Esimerkki 6.4. Harjoitustehtävässä 4.12 osoitettiin, että reaalisten polynomien avaruus $\mathbb{R}[x]$ ei ole Banachin avaruus millään normilla koska sillä on numeroituva kanta. Tarkastellaan avaruutta $\mathbb{R}[x]$ normilla

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

varustettuna. Olkoon $T_n \in \mathrm{Lin_b}(\mathbb{R}[x], \mathbb{R})$,

$$T_n(f) = n\Big(f(1) - f(1 - \frac{1}{n})\Big)\,.$$

Nythän T_n on selvästi lineaarinen ja

$$|T_n f| \leq 2\,n\,\|f\|_\infty\,.$$

Lisäksi $T_n f \to f'(1)$ kaikilla $f \in \mathbb{R}[x]$, joten jono T_n on vahvasti suppeneva. Jonon määräämä rajaoperaattori $T\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$,

$$Tf = f'(1)$$

on lineaarinen mutta ei rajoitettu: Jos $p_n(x) = x^n$, niin $\|p_n\| = 1$ ja $Tp_n = n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siis jono T_n ei suppene vahvasti avaruudessa $(\mathbb{R}[x], \|\cdot\|)$.

Seuraus 6.5. *Olkoon X Banachin avaruus ja olkoon Y normiavaruus. Olkoon $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vahvasti suppeneva jono avaruudessa $\mathrm{Lin_b}(X,Y)$. Tällöin $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee vahvasti kohti jotain operaattoria $T \in \mathrm{Lin_b}(X,Y)$.*

Todistus. Jono $T_n x$ on rajoitettu jokaisella $x \in X$ koska se on suppeneva. Siis Banachin ja Steinhausin lauseen nojalla $(\|T_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ on rajoitettu. Määritellään kuvaus $T\colon X \to Y$ asettamalla

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$$

kaikille $x \in X$. Kuten Proposition 4.7 todistuksessa nähdään, että T on lineaarinen ja rajoitettu. □

6.2 Avoimen kuvauksen lause

Topologisten avaruuksien välinen kuvaus on avoin, jos jokaisen avoimen joukon kuva on avoin.

Jos bijektio on jatkuva ja avoin, niin se on homeomorfismi.[2] Äärellisulotteisten normiavaruuksien väliset bijektiot ovat homeomorfismeja Proposition 3.2 nojalla. Harjoitustehtävässä 3.8 tarkastelimme sellaista esimerkkiä rajoitetusta lineaarisesta bijektiosta ääretönulotteisten normiavaruuksien välillä, jonka käänteiskuvaus ei ole rajoitettu. Avoimen kuvauksen lause kertoo muun muassa, milloin rajoitettu lineaarinen bijektio on homeomorfismi.

Lemma 6.6. *Olkoon X normiavaruus ja olkoon Y Banachin avaruus. Jos $T \in \mathrm{Lin_b}(X,Y)$ on surjektio, niin on $\delta > 0$ siten, että*

$$B(0,\delta) \subset \overline{T(B(0,1))}\,.$$

Todistus. Koska $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(0,n)$ ja T on surjektio, pätee

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B(0,n))}\,.$$

Bairen lauseen nojalla on $N \in \mathbb{N}$, $z \in Y$ ja $r > 0$, joille $B(z,r) \subset \overline{T(B(0,N))}$. Koska $\overline{T(B(0,N))}$ on symmetrinen, pätee myös $B(-z,r) \subset \overline{T(B(0,N))}$. Konveksiuden nojalla

$$y = \frac{1}{2}((z+y) + (-z+y)) \in \overline{T(B(0,N))}$$

kaikilla $y \in B(0,r)$, joten $B(0,r) \subset \overline{T(B(0,N))}$ ja siis $B(0,\frac{r}{N}) \subset \overline{T(B(0,1))}$. □

Lause 6.7 (Avoimen kuvauksen lause eli Banachin ja Schauderin lause)**.** *Olkoot X ja Y Banachin avaruuksia ja olkoon $T \in \mathrm{Lin_b}(X,Y)$ surjektiivinen. Tällöin T on avoin kuvaus.*

[2] Katso Seuraus 6.8.

Todistus. Olkoon $T \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{b}}(X,Y)$. Riittää osoittaa[3], että 0 on avoimen yksikköpallon kuvan sisäpiste. Olkoot $\epsilon_k > 0$ siten, että

$$\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k < 1 \,.$$

Lemman 6.6 ja lineaarisuuden nojalla jokaisella $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ on $\delta_k > 0$ siten, että

$$B(0,\delta_k) \subset \overline{TB(0,\epsilon_k)} \,. \tag{6.1}$$

Voimme olettaa, että $\delta_k \to 0$, kun $k \to \infty$.

Osoitamme, että $B(0,\delta_1) \subset TB(0,1)$. Olkoon $y \in B(0,\delta_1) \subset Y$. Inkluusion (6.1) nojalla $B(0,\delta_1) \subset \overline{TB(0,\epsilon_1)}$. Tiheyden nojalla on siis $x_1 \in B(0,\epsilon_1)$, jolle $\|y - T(x_1)\| < \delta_2$. Siis $y - T(x_1) \in B(0,\delta_2)$, joten vastaavasti inkluusion (6.1) nojalla on $x_2 \in B(0,\epsilon_2)$, jolle $\|y - T(x_1) - T(x_2)\| = \|(y - T(x_1)) - T(x_2)\| < \delta_3$. Jatkamalla näin saadaan jono $x_k \in B(0,\epsilon_k)$, jolle pätee

$$\Big\|y - T\Big(\sum_{j=1}^{k} x_j\Big)\Big\| < \delta_{k+1} \tag{6.2}$$

kaikilla k. Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee itseisesti, koska

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k < 1 \,.$$

Koska X on Banachin avaruus, sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee Lauseen 4.5 nojalla kohti jotain pistettä

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \in \overline{B}\Big(0, \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k\Big) \subset B(0,1) \,,$$

jolle pätee epäyhtälöiden (6.2) nojalla $Tx = y$. Siis $B(0,\delta_1) \subset TB(0,1)$. □

Seuraus 6.8. *Olkoot X ja Y Banachin avaruuksia ja olkoon $T \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{b}}(X,Y)$ bijektio. Tällöin T on homeomorfismi.*

Todistus. Olkoon $U \subset X$ avoin. Tällöin $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ on avoin, koska T on avoin kuvaus. Siis T^{-1} on jatkuva. □

Seuraus 6.9. *Olkoon V vektoriavaruus, joka on Banachin avaruus normien $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ suhteen. Jos on $M > 0$ siten, että kaikille $v \in V$ pätee $\|v\|_2 \le M\,\|v\|_1$, niin normit $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ovat ekvivalentteja.*

Todistus. Identtinen kuvaus $(V, \|\cdot\|_1) \to (V, \|\cdot\|_2)$ on rajoitettu surjektio, joten Avoimen kuvauksen lauseen[4] nojalla sen käänteiskuvaus on rajoitettu. Siis on $N > 0$, jolle $\|v\|_1 \le N\,\|v\|_2$. □

[3] Harjoitustehtävä.

[4] Lause 6.7

Esimerkki 6.10. (1) Harjoitustehtävässä 2.12 osoitettiin, että normit

$$\|f\|_1 = \int_{[0,1]} |f|$$

ja

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

eivät ole ekvivalentteja vektoriavaruudessa $\mathrm{C}^0([0,1])$. Kuitenkin pätee

$$\|f\|_1 = \int_{[0,1]} |f| \le \int_{[0,1]} \|f\|_\infty = \|f\|_\infty\,,$$

joten identtinen kuvaus $\mathrm{id}\colon (\mathrm{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathrm{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_1)$ on jatkuva biektio. Sen käänteiskuvaus $\mathrm{id}\colon (\mathrm{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_1) \to (\mathrm{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ei kuitenkaan ole rajoitettu, joten id ei ole avoin kuvaus eikä siis homeomorfismi. Avoimen kuvauksen lauseen nojalla normiavaruus $(\mathrm{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_1)$ ei ole Banachin avaruus.
(2) Olkoon $T\colon \ell^\infty(\mathbb{K}) \to \ell^\infty(\mathbb{K})$ lineaarikuvaus, joka määritellään asettamalla

$$(T\omega)(k) = \frac{\omega(k)}{k+1}$$

jokaiselle $\omega \in \ell^\infty(\mathbb{K})$ ja jokaiselle $k \in \mathbb{N}$. Harjoitustehtävässä 3.8 osoitimme, että T on rajoitettu injektio ja että $T^{-1}\colon T(\ell^\infty(\mathbb{K})) \to \ell^\infty(\mathbb{K})$ ei ole rajoitettu. Seurauksen 6.8 nojalla $T(\ell^\infty(\mathbb{K}))$ ei ole suljettu, sillä muuten T^{-1} olisi rajoitettu. Saimme näin siis lyhyen ratkaisun Harjoitustehtävälle 3.9.

Joskus kuvauksen osoittaminen homeomorfismiksi onnistuu muista syistä ilman avoimen kuvauksen lausetta. Näin on esimerkiksi, jos kuvaus saadaan häiritsemällä identtistä kuvausta maltillisella tavalla:

Lause 6.11 (Neumannin sarja)**.** *Olkoon V Banachin avaruus ja olkoon $T \in \mathrm{Lin_b}(X,X)$, jolle $\|T\| < 1$. Tällöin $\mathrm{id}_X - T$ on bijektio ja sen käänteiskuvaus*

$$(\mathrm{id}_X - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

on rajoitettu,

$$\|(\mathrm{id}_X - T)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|T\|}\,.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

6.3 Suljetun kuvaajan lause

Lineaarikuvauksen $T\colon X \to Y$ kuvaaja eli graafi on vektoriavaruuden $X \times Y$ vektorialiavaruus

$$\mathscr{G}(T) = \{(x, Tx) : x \in X\} \subset X \times Y\,.$$

Lemma 6.12. *Lineaarikuvauksen $T\colon X \to Y$ kuvaaja on vektoriavaruuden $X \times Y$ vektorialiavaruus.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 6.13 (Suljetun graafin lause)**.** *Olkoot X ja Y Banachin avaruuksia. Jos operaattorin $T\colon X \to Y$ kuvaaja on suljettu, niin $T \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{b}}(X,Y)$.*

Todistus. Varustetaan $X \times Y$ normilla $\|(x,y)\|_1 = \|x\| + \|y\|$. Normiavaruus $X \times Y$ on Banachin avaruus Harjoitustehtävien 4.3 ja 2.10 nojalla. Oletuksen mukaan $\mathscr{G}(T)$ on Banachin avaruuden suljettuna aliavaruutena Banachin avaruus.

Tarkastellaan rajoitettua lineaarista bijektiota $p\colon \mathscr{G}(T) \to X$,

$$p(x,Tx) = x\,.$$

Avoimen kuvauksen lauseen Seurauksen 6.8 nojalla p^{-1} on rajoitettu. Siispä

$$\|x\| + \|Tx\| = \|(x,Tx)\| = \|p^{-1}x\| \leq \|p^{-1}\|\|x\|\,,$$

joten

$$\|Tx\| \leq \Big(\|p^{-1}\| - 1\Big)\|x\| \quad \square$$

Esimerkki 6.14. Olkoon $A = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$ ääretön matriisi, jolle pätee

- $M = \sup |a_{ij}| < \infty$ ja
- A määrää lineaarikuvauksen[5] $A\colon \ell^1(\mathbb{C}) \to \ell^1(\mathbb{C})$ asettamalla

$$A\omega(i) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}\omega(j)\,.$$

Osoitetaan suljetun graafin lauseen avulla, että operaattori A on rajoitettu.

Olkoon $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ jono avaruudessa $\ell^1(\mathbb{C})$ siten, että $\omega_n \to \omega \in \ell^1(\mathbb{C})$ ja $A\omega_n \to \tau \in \ell^1(\mathbb{C})$. Osoitetaan, että $A\omega = \tau$. Olkoon $\Lambda_k\colon \ell^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ funktionaali, joka määritellään asettamalla

$$\Lambda_k\sigma = A\sigma(k)$$

kaikille $\sigma \in \ell^1(\mathbb{C})$. Tällöin

$$|\Lambda_k\sigma| = |\sum_j a_{kj}\sigma(j)| \leq \sum_j |a_{kj}||\sigma(j)| \leq M\|\sigma\|_1$$

kaikille $\sigma \in \ell^1(\mathbb{C})$, joten Λ_k on rajoitettu. Siis

$$\tau(k) = \lim_{n\to\infty} A\omega_n(k) = \lim_{n\to\infty} \Lambda_k\omega_n = \Lambda_k(\lim_{n\to\infty}\omega_n) = \Lambda\omega = A\omega(k)$$

kaikilla k, joten $(\omega,\tau) \in \mathscr{G}(A)$. Suljetun graafin lauseen nojalla A on rajoitettu operaattori.

[5] Huomaa, että esimerkiksi vakiomatriisi $a_{ij} = 1$ ei määrää tällaista kuvausta.

Harjoitustehtäviä

6.1. Olkoon $T_k\colon d^\infty(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $T_k\omega = k\,\omega(k)$. Osoita, kuvausten T_k avulla, että Banachin ja Steinhausin lause ei päde ilman määrittelyavaruuden täydellisyyttä.

6.2. Osoita, että tasaisesti suppeneva jono operaattoreita suppenee vahvasti.

6.3. Olkoon X Banachin avaruus ja olkoon Y normiavaruus. Olkoot $T_k \in \mathrm{Lin}_\mathrm{b}(X,Y)$ siten, että $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|T_k\| = \infty$. Osoita, että on $x_0 \in X$, jolle $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|T_k x_0\|_Y = \infty$.

6.4. Olkoot X ja Y normiavaruuksia. Osoita, että lineaarikuvaus $T\colon X \to Y$ on avoin kuvaus, jos 0 on avoimen yksikköpallon kuvan $T(B(0,1))$ sisäpiste.

6.5. Olkoon $i_{12}\colon \ell^1(\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{R})$ kuvaus $\iota(\omega) = \omega$. Rajoittamalla maalijoukkoa saadaan kuvaus $i_{12}\colon \ell^1(\mathbb{R}) \to i_{12}(\ell^1(\mathbb{R}))$, joka on rajoitettu lineaarinen surjektio. Osoita, että se ei ole avoin.[6]

6.6. Olkoon X Banachin avaruus ja olkoon $T \in \mathrm{Lin}_\mathrm{b}(X,X)$ siten, että $\|T\| < 1$. Osoita, että sarja $\sum_{k=0}^\infty T^k$ suppenee ja määrää kuvauksen $\mathrm{id}_X - T$ käänteiskuvauksen. Osoita, että

$$\|(\mathrm{id}_X - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}\,.$$

Olkoot X ja Y Banachin avaruuksia ja olkoon $T \in \mathrm{Lin}_\mathrm{b}(X,Y)$ injektio.

6.7. Osoita, että jos $T(X)$ on suljettu, niin jollekin $\beta > 0$ pätee $\|Tx\| \geq \beta\|x\|$ kaikille $x \in X$.[7]

6.8. Osoita, että jos jollekin $\beta > 0$ pätee $\|Tx\| \geq \beta\|x\|$ kaikille $x \in X$, niin $T(X)$ on suljettu. [8]

6.9. Osoita, että lineaarikuvauksen $T\colon X \to Y$ kuvaaja on vektoriavaruuden $X \times Y$ vektorialiavaruus.

[6] Kannattaa ehkä ajatella aliavaruutta $d^2(\mathbb{R}) \subset \ell^2(\mathbb{R})$.
[7] Käytä avoimen kuvauksen lausetta.
[8] Mitä oletus kertoo kuvauksesta $T^{-1}\colon T(X) \to X$?

Osa II

Hilbertin avaruudet

Luku 7

Sisätuloavaruudet

Tässä luvussa aloitamme sisätuloavaruuksien tarkastelun. Havaitsemme, että sisätuloavaruudet antavat mielenkiintoiseia esimerkkejä normiavaruuksista.

7.1 Sisätuloavaruus

Olkoon V $\mathbb{K}$-vektoriavaruus. Kuvaus $(\cdot \mid \cdot) \colon V \times V \to \mathbb{K}$ on sisätulo, jos

(1) $(v \mid v) \geq 0$ kaikille $v \in V$ ja $(v \mid v) = 0$, jos ja vain jos $v = 0$,

(2) kuvaus $v \mapsto (v \mid v_0)$ on funktionaali kaikille $v_0 \in V$,

(3) $(v \mid w) = \overline{(w \mid v)}$ kaikille $v, w \in V$.

Pari $\big(V, (\cdot \mid \cdot)\big)$ on sisätuloavaruus.

Olkoot V ja W ja Z kompleksisia vektoriavaruuksia. Kuvaus $F \colon V \to W$ on antilineaarinen[a], jos $F(\lambda v) = \bar{\lambda} v$ kaikille $v \in V$ ja $\lambda \in \mathbb{C}$.

Jos X, Y ja U ovat $\mathbb{K}$-vektoriavaruuksia, niin kuvaus $B \colon X \times y \to U$ on bilineaarinen, jos kuvaukset $v \mapsto B(v, w_0)$ $w \mapsto (v_0, w)$ ovat lineaarisia kaikille $w_0 \in W$ ja kaikille $v_0 \in V$. Kuvaus $S \colon V \times W \to Z$ on sesquilineaarinen,[b] jos kuvaus $v \mapsto S(v, w_0)$ on lineaarinen kaikille $w_0 \in W$ ja kuvaus $w \mapsto (v_0, w)$ on antilineaarinen kaikille $v_0 \in V$.

[a] tai konjugaattilineaarinen

[b] sesqui=$1\frac{1}{2}$, latinaa

Reaalisen sisätuloavaruuden sisätulo on bilineaarinen ja kompleksinen sisätulo on sesquilineaarinen, koska se on antilineaarinen jälkimmäisen argumentin suhteen.

Esimerkki 7.1. (1) Tavallinen sisätulo avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

(2) Sisätulo

$$(z \mid w) = \sum_{k=1}^{n} z_k \, \overline{w}_k$$

avaruudessa $\mathbb{C}^n$.
(3) Olkoon (Z,μ) mitta-avaruus. Avaruuden $L^2(Z,\mu)$ luonnollinen sisätulo on

$$(f \mid g) = \int_Z f\, g\, d\mu\,.$$

Määrittely onnistuu täsmälleen eksponentilla 2 Hölderin epäyhtälön nojalla koska $2' = 2$. Erityisesti avaruudet $\ell^2(\mathbb{K})$ ovat sisätuloavaruuksia sisätulolla

$$(\omega \mid \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega(k)\overline{\tau(k)}\,.$$

(4) Mitta-avaruuden (Z,μ) neliöintegroituvien mitallisten kompleksiarvoisten funktioiden Lebesguen avaruus $L^2_{\mathbb{C}}(Z,\mu)$on on sisätuloavaruus varustettuna sisätulolla

$$(f \mid g) = \int_Z f\, \overline{g}\, d\mu\,.$$

Sisätulon ominaisuudet tarkastetaan kuten reaalisessa tapauksessa, jälkimmäisen funktion kompleksikonjugointi takaa, että ominaisuus (3) saadaan voimaan.

(5) Jos $\Big(V, (\cdot \mid \cdot)_V\Big)$ on sisätuloavaruus ja $W \subset V$ on vektorialiavaruus, niin W varustettuna sisätulolla $(\cdot \mid \cdot)_V$ on sisätuloavaruus.

Propositio 7.2 (Cauchyn epäyhtälö)**.** *Olkoon V sisätuloavaruus. Kaikille $x, y \in V$ pätee*

$$|(x \mid y)|^2 \le (x \mid x)\,(y \mid y)\,.$$

Epäyhtälössä pätee yhtäsuuruus, jos ja vain jos x ja y ovat lineaarisesti riippuvia.

Todistus. Voidaan olettaa, että $x, y \in V - \{0\}$. Kaikille $\lambda \in \mathbb{K}$ pätee

$$0 \le (x + \lambda y \mid x + \lambda y) = (x \mid x) + \overline{\lambda}\,(x \mid y) + \lambda\,(y \mid x) + |\lambda|^2 (y \mid y)\,. \tag{7.1}$$

Valitsemalla

$$\lambda = -\frac{(x \mid y)}{(y \mid y)}$$

saadaan

$$0 \le (x \mid x) - \overline{\frac{(x \mid y)}{(y \mid y)}}\,(x \mid y) - \overline{\frac{(x \mid y)}{(y \mid y)}}\,(y \mid x) + \left|\frac{(x \mid y)}{(y \mid y)}\right|^2 (y \mid y)\,,$$

josta haluttu epäyhtälö seuraa siistimällä lauseketta.

Jos Cauchyn epäyhtälössä pätee yhtäsuuruus, niin epäyhtälössä (7.1) pätee yhtäsuuruus, kun $\lambda = -\frac{(x|y)}{(y|y)}$. Siis

$$0 = \left(x - \frac{(x \mid y)}{(y \mid y)} y \;\middle|\; x - \frac{(x \mid y)}{(y \mid y)} y \right),$$

joten $x = \frac{(x|y)}{(y|y)} y$. □

7.2 Sisätuloavaruus normiavaruutena

Propositio 7.3. *Sisätulo määrittelee normin lausekkeella*

$$\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}\,.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Jos ei muuta erikseen mainita, niin sisätuloavaruudessa käytetään tätä normia.

Lemma 7.4. *Olkoon V sisätuloavaruus. Kaikille $x, y \in V$ pätee*

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(x \mid y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \\ \operatorname{Im}(x \mid y) = \frac{1}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2) \end{cases} \qquad \text{(Polaarikaavat)}$$

ja

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\,. \qquad \text{(Suunnikassääntö)}$$

Todistus. Suora lasku, harjoitustehtävä. □

Olkoot X, Y sisätuloavaruuksia. Lineaarikuvaus $L\colon X \to Y$ on (sisätuloavaruuksien) isomorfismi, jos

$$(Lx_1 \mid Lx_2) = (x_1 \mid x_2)$$

kaikille $x_1, x_2 \in X$.

Propositio 7.5. *Olkoot X, Y sisätuloavaruuksia. Lineaarikuvaus $L\colon X \to Y$ on sisätuloavaruuksien isomorfismi, jos ja vain jos se on normiavaruuksien X ja Y isometria.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 7.6. Suunnikassääntö ei ole voimassa normiavaruudessa $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$, jos $p \neq 2$:

$$2\,\|(1,0)\|_p^2 + 2\,\|(0,1)\|_p^2 = 4 = 2\,2^{\frac{2}{p}} = \|(1,1)\|_p^2 + \|(1,-1)\|_p^2$$

pätee täsmälleen silloin, kun $p = 2$. Proposition 7.4 nojalla normi $\|\cdot\|_p$ ei ole sisätulon määräämä normi. Samalla tavalla nähdään, että $\ell^p(\mathbb{K})$ on sisätuloavaruus, jos ja vain jos $p = 2$.

Lause 7.7. *Jokainen normiavaruus, jossa pätee suunnikassääntö on sisätuloavaruuden määräämä.*

Todistus. Osoitetaan, että polaarikaavassa esiintyvät lausekkeet määrittelevät sisätulon asettamalla

$$(x \mid y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) + \frac{i}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$$

ja että näin saatu sisätulo määrää alkuperäisen normin. Katso yksityiskohdat esimerkiksi [Wer, Satz V.1.7], [Fri, Thm. 6.1.5]. □

Lemma 7.8. *Olkoon $(V, (\cdot|\cdot))$ sisätuloavaruus. Sisätulon määräämä normi on aidosti subadditiivinen:*

$$\|x + y\| < \|x\| + \|y\| ,$$

ellei $x = \lambda y$ tai $y = \lambda x$ jollain $\lambda \geq 0$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lemma 7.9. *Olkoon $(V, (\cdot \mid \cdot))$ sisätuloavaruus. Funktionaali $v \mapsto (v \mid v_0)$ on rajoitettu jokaisella $v_0 \in V$. Sisätulo on jatkuva bilineaarikuvaus avaruudesta $V \times V$ kuntaan $\mathbb{K}$.*

Todistus. Olkoon $v_0 \in V$ ja olkoon $h \colon V \to \mathbb{K}$ kuvaus $h(v) = (v \mid v_0)$. Cauchyn epäyhtälön nojalla

$$|h(v)| = |(v \mid v_0)| \leq \|v_0\|\|v\| .$$

Toinen väite jätetään harjoitustehtäväksi. □

7.3 Hilbertin avaruus

Jos sisätuloavaruus V on normiavaruutena täydellinen, niin V on Hilbertin avaruus.

Esimerkki 7.10. (1) Avaruuden $L^2(Z, \mu)$ luonnollista sisätuloa vastaava normi on L^2-normi: Jos $f \in L^2(Z, \mu)$, niin

$$(f \mid f) = \int_Z f\overline{f}\, d\mu = \int_Z |f|^2\, d\mu = \|f\|_2^2 .$$

Lauseen 5.11 nojalla $L^2(Z, \mu)$ on Hilbertin avaruus. Erityisesti neliösummautuvien jonojen avaruus $\ell^2(\mathbb{K})$ on Hilbertin avaruus. Tämä seuraa erikoistapauksena Lauseesta 5.11 ja todistettiin myös duaalia tarkasteltaessa Seurauksessa 4.16.

(2) Koska Proposition 4.9 nojalla $\ell^p(\mathbb{K}) \subset \ell^2(\mathbb{K})$ kaikilla $1 \leq p \leq 2$, niin myös $\ell^p(\mathbb{K})$ on sisätuloavaruus, kun se varustetaan avaruuden $\ell^2(\mathbb{K})$ sisätulolla. Se ei kuitenkaan ole täydellinen kuten harjoitustehtävässä 4.5 osoitettiin.

On helppo nähdä, että kaikilla luokilla $f \in L^2([a, b])$ ei ole jatkuvaa edustajaa. Kompaktin välin jatkuvat funktiot ovat inegroituvia, joten $\mathrm{C}^0([a, b])$ on luonnollisella tavalla avaruuden $\subset L^2([a, b])$ aliavaruus. Seuraavan tuloksen mukaan $\mathrm{C}^0([a, b]) \subset L^2([a, b])$ on tiheä aliavaruus, joten sisätuloavaruus $\mathrm{C}^0([a, b])$ ei ole Hilbertin avaruus. Todistuksessa tarvitaan mittateorian koneistoa.

Propositio 7.11. $\mathrm{C}^0([a, b])$ *on Hilbertin avaruuden $L^2([a, b])$ tiheä aliavaruus.*

Todistus. Mitta- ja integraaliteorian kurssilla osoitetaan, että reaaliselle mitalliselle funktiolle, joka ei saa negatiivisia arvoja on kasvava jono $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ yksinkertaisia funktioita, joka suppenee pisteittäin funktioon f. Kun $f \in L^2([a, b])$, niin $s_k \in L^2([a, b])$. Koska $|f - s_k| < f$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, niin dominoidun konvergenssin lauseen[1] mukaan $s_k \to f$ avaruudessa $L^2([a, b])$, kun $k \to \infty$.. Erityisesti $\|s_k\|_\infty < \infty$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$

[1] Mitta-ja integraaliteorian kurssilla

Olkoon $\epsilon > 0$. Lusinin lauseen [Rud, Thm. 2.24][2] mukaan jokaisella $f \in L^2([a,b])$ ja jokaisella $\epsilon > 0$ on $g \in \mathrm{C}^0([a,b])$, jolle joukon

$$\Big\{t \in [a,b] : f(t) \neq g(t)\Big\}$$

mitta on korkeintaan ϵ ja lisäksi $\|g\|_\infty \leq \sup_{s\in[a,b]]} |f(s)|$. Tällöin erityisesti jokaiselle yksinkertaiselle funktiolle s on jatkuva g, jolle pätee

$$\|g - s\|_2 \leq \sqrt{\epsilon}\, 2\|s\|_\infty .$$

Siis $\mathrm{C}^0([a,b])$ on tiheä avaruudessa $L^2([a,b])$. □

Sisätuloavaruus täydellistää Hilbertin avaruudeksi samalla tavalla kuin normiavaruus voidaan täydellistää Banachin avaruudeksi.

Lause 7.12. *Olkoon V sisätuloavaruus. Tällöin on isomorfismia vaille yksikäsitteinen Hilbertin avaruus $\widehat{V}$ ja isomorfinen upotus $\phi \colon V \to \widehat{V}$ siten, että $\phi(V)$ on tiheä aliavaruus.*

Todistus. Lauseen 5.7 nojalla on isometriaa vaille yksikäsitteinen Banachin avaruus $\widehat{V}$, johon V uppoaa tiheäksi aliavaruudeksi. Kaikille $x, y \in \widehat{V}$ on jonot $x_k, y_k \in V$ siten, että $\phi(x_k) \to x$ ja $\phi(y_k) \to y$, kun $k \to \infty$.

Cauchyn epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}
\Big|(x_k \mid y_k) - (x_n \mid y_n)\Big| &= \Big|(x_k \mid y_k) - (x_k \mid y_n) + (x_k \mid y_n) - (x_n \mid y_n)\Big| \\
&= \Big|(x_k \mid y_k - y_n) - (x_n - x_k \mid y_n)\Big| \\
&\leq \Big|(x_k \mid y_k - y_n)| + |(x_n - x_k \mid y_n)\Big| \\
&= \|x_k\|\, \|y_k - y_n\| - \|x_n - x_k\|\, \|y_n\| .
\end{aligned}$$

Koska Cauchyn jonot x_k, y_k ovat rajoitettuja ja käyttämällä Cauchyn ehtoa, nähdään, että jono $((x_k|y_k))_k$ on Cauchyn jono kunnassa $\mathbb{K}$, joten se suppenee. Asetetaan

$$\langle x \mid y \rangle = \lim_{k\to\infty} (x_k \mid y_k) .$$

Tämä määritelmä on riippumaton jonojen $x_k, y_k \in V$ valinnasta Lemman 7.9 nojalla.

Funktio $(x, y) \mapsto \langle x \mid y \rangle$ on reaalisessa tapauksessa bilineaarinen ja kompleksisessa tapauksessa sesquilineaarinen: Ensimmäiselle komponentille lineaarisuus nähdään raja-arvolaskulla

$$\begin{aligned}
\langle \lambda x + \mu y \mid z \rangle &= \lim_{k\to\infty} (\lambda x_k + \mu y_k \mid z_k) \\
&= \lambda \lim_{k\to\infty} (x_k \mid z_k) + \mu \lim_{k\to\infty} (y_k \mid z_k)) \\
&= \lambda \langle x \mid z \rangle + \mu \langle y \mid z \rangle
\end{aligned}$$

ja toiselle samaan tapaan. Myös sisätulon (anti)symmetrisyysehto on helppo tarkastaa. Varmistetaan vielä, että $\langle x \mid x \rangle > 0$ kaikille $x \neq 0$: Koska $\phi(x_k) \to x$, kun $k \to \infty$, pätee jostain indeksistä N lähtien

$$(x_k \mid x_k) = \|x_k\| = \|\phi(x_k)\| > \frac{\|x\|}{2} ,$$

joten funktion $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ määritelmän nojalla $\langle x \mid x \rangle \geq \frac{\|x\|}{2} > 0$. □

[2] Reaalianalyysin kurssilla.

Itse asiassa Lauseen 7.12 todistuksen loppua tarkastelemalla huomataan, että

$$\langle x_k \mid x_k\rangle \leftarrow (x_k \mid x_k) = \|x_k\|^2 = \|\phi(x_k)\|^2 \to \|x\|^2\,,$$

kun $k \to \infty$, joten avaruuden $\widehat{V}$ normi on, kuten pitääkin, sisätulon $\langle \cdot \mid \cdot\rangle$ määräämä.

Lause 7.12 voidaan todistaa myös Lauseen 7.7 avulla, kun osoitetaan, että sisätuloavaruutta vastaavan normiavaruuden täydellistymässä pätee suunnikassääntö. Tällainen todistus esitetään muun muassa kirjoissa [Fri] ja [Wer].

Harjoitustehtäviä

7.1. Olkoon $(V, (\cdot|\cdot))$ sisätuloavaruus. Oletetaan, että vektoreille $u, v \in V$ pätee

$$(x \mid u) = (x \mid v)$$

kaikilla $x \in V$. Osoita, että $u = v$.

7.2. Osoita, että sisätulo määrää normin lausekkeella

$$\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}\,.$$

7.3. Osoita, että Propositio 7.3 ei päde kompleksisessa vektoriavaruudessa, jos sisätulon määritelmän ehto (3) korvataan symmetrisyysvaatimuksella $(v \mid w) = (w \mid v)$ kaikille $v, w \in V$.

7.4. Olkoon $(V, (\cdot \mid \cdot))$ kompleksinen sisätuloavaruus. Todista, että kaikille $x, y \in V$ pätee

$$\operatorname{Re}(x \mid y) = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\Big)$$

7.5. Olkoon $(V, (\cdot \mid \cdot))$ kompleksinen sisätuloavaruus. Todista, että kaikille $x, y \in V$ pätee

$$\operatorname{Im}(x \mid y) = \frac{1}{4}\Big(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\Big)\,.$$

7.6. Olkoot H_1 ja H_2 sisätuloavaruuksia. Olkoon $\phi\colon H_1 \to H_2$ isometrinen lineaarinen bijektio. Osoita, että

$$(\phi(x) \mid \phi(y)) = (x \mid y)$$

kaikille $x, y \in H_1$.

7.7. Osoita, että sisätuloavaruuden normille pätee suunnikassääntö.

7.8. Osoita, että suunnikassääntö ei ole voimassa normiavaruudessa $\ell^p(\mathbb{K})$, kun $p \neq 2$.

7.9. Olkoon $(V, (\cdot \mid \cdot))$ sisätuloavaruus. Osoita, että sisätulon määräämä normi on aidosti subadditiivinen: Kaikille $x, y \in V$ pätee

$$\|x+y\| < \|x\| + \|y\|\,,$$

ellei $x = \lambda y$ tai $y = \lambda x$ jollain $\lambda \geq 0$.

7.10. Osoita, että $\|\cdot\|_1$ ei ole aidosti subadditiivinen normi avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

7.11. Olkoon $(V, (\cdot|\cdot))$ sisätuloavaruus. Osoita, että sisätulo on jatkuva kuvaus avaruudesta $V \times V$ kuntaan $\mathbb{K}$.

7.12. Osoita esimerkillä, että sisätuloavaruus $\mathrm{C}^0([0,1]) \subset L^2([0,1])$ ei ole Hilbertin avaruus.

7.13. Osoita, että Banachin avaruuden $\mathrm{C}^0([0,1])$ normi ei ole sisätulon määräämä.

7.14. Olkoon $(x_k)_{k=1}^\infty$ Hilbertin avaruuden H jono ja olkoon $x \in H$ siten, että pätee $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k \mid x) = (x \mid x)$ ja $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k\| = \|x\|$. Osoita, että jono $(x_k)_{k=1}^\infty$ suppenee ja että sen raja-arvo on x.

7.15. Anna esimerkki Hilbertin avaruudesta H ja jonosta $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $h_k \in H$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ siten, että $\lim\limits_{k\to\infty}(h_k \mid x) = (0 \mid x)$ kaikille $x \in H$ ja jono $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ei suppene nollavektoriin.

7.16. Olkoon $(V, (\cdot \mid \cdot)$ sisätuloavaruus, olkoon W vektoriavaruus ja olkoon $\Phi\colon W \to V$ lineaarinen bijektio. Osoita, että lauseke $\langle w_1 \mid w_2 \rangle = (\Phi(w_1) \mid \Phi(w_2))$ määrittelee sisätulon avaruudessa W.

7.17. Olkoot $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$. Anna esimerkki isometrisestä isomorfismista $g\colon L^2([a,b]) \to L^2([c,d])$.

Luku 8

Hilbertin avaruuden geometriaa

Tässä luvussa tarkastelemme konvekseja joukkoja sisätuloavaruuksissa. Määrittelemme lähimmän pisteen kuvauksen konveksille osajoukolle Hilbertin avaruudessa ja sen erikoistapauksena saamme ortogonaaliprojektion, kun konveksi joukko on suljettu vektorialiavaruus. Luvun lopuksi todistamme Fréchet'n ja Rieszin esityslauseen, joka antaa isometrisen isomorfismin Hilbertin avaruudesta duaalinsa.

8.1 Konveksit joukot ja lähimmän pisteen kuvaus

Normiavaruuden suljetut pallot ovat konvekseja kolmioepäyhtälön nojalla. Sisätuloavaruksien normeilla on vahvempi ominaisuus:

Seuraus 8.1. *Sisätuloavaruudessa suljetut pallot ovat aidosti konvekseja.*

Todistus. Riittää osoittaa väite pallolle $\overline{B}(0,1)$. Olkoot $x, y \in V$, $\|x\|, \|y\| \leq 1$, $x \neq y$. Jos x ja y ovat samalla säteellä, niin

$$\|sx + (1-s)y\| < \max(\|x\|, \|y\|)\,.$$

Muuten taas Lemman 7.8 nojalla

$$\|sx + (1-s)y\| < s\|x\| + (1-s)\|y\| < 1\,. \quad \square$$

Esimerkki 8.2. (1) Normiavaruuden $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ suljetut pallot eivät ole aidosti konvekseja: pisteitä$(1,-1)$ ja$(1,1)$ yhdistävä jana sisältyy suljetun yksikköpallon reunaan.
(3) Normiavaruuksien $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ suljetut pallot ovat aidosti konvekseja, kun $1 < p < \infty$,[1] vaikka vain $\|\cdot\|_2$ on sisätulon määräämä normi.

Lause 8.3. *Olkoon H Hilbertin avaruus. Olkoon $K \subset H$ suljettu konveksi osajoukko. Jokaiselle $h \in H$ on yksikäsitteinen $h_K \in K$, jolle*

$$\|h - h_K\| = \inf_{k \in K} \|h - k\| = d(h, K)\,.$$

[1] Katso kuva 2.1.

Todistus. Siirtämällä joukkoa K voimme olettaa, että $h = 0$. Etäisyyden määritelmän nojalla on pisteet $k_j \in K$, joille $\|k_j\| \to d(0, K)$, kun $j \to \infty$. Osoitetaan, että $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ on Cauchyn jono. Koska $\frac{1}{2}(k_n + k_m) \in K$ konveksisuuden nojalla, niin

$$\Big\|\frac{1}{2}(k_n + k_m)\Big\| \geq d(0, K)$$

kaikilla $n, m \in \mathbb{N}$. Suunnikassäännön nojalla

$$\|k_n - k_m\|^2 = 2\Big(\|k_n\|^2 + \|k_m\|^2\Big) - \|(k_n + k_m)\|^2 \to 0\,,$$

kun $n, m \to \infty$, sillä $\|k_j\| \to d(0, K)$, kun $j \to \infty$. Siis jono $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ on Cauchyn jono Hilbertin avaruuden suljetussa osajoukossa K. Siis se suppenee kohti jotain pistettä $k_h \in K$. Koska jonolta $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ei edellytetty muuta kuin $\|k_j\| \to d(0, K)$, kun $j \to \infty$, piste h_K on yksikäsitteinen lähin piste. □

Pisteen h_K yksikäsitteisyyttä voi perustella myös pallon $\overline{B}(0, \|k_h\|)$ aidolla konveksiudella: Jos olisi $k_h' \in K - k_h$, joille $\|k_h\| = \|k_h'\|$, niin $\frac{1}{2}(k_h + k_h') \in K$ ja normin aidon subadditiivisuuden nojalla $\|\frac{1}{2}(k_h + k_h')\| < \|k_h\|$, mikä on ristiriita.

Lauseen 8.3 väite ei päde kaikissa Banachin avaruuksissa.

Esimerkki 8.4. Olkoon K Banachin avaruuden $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ aliavaruus $\mathbb{R}\times\{0\}$ ja olkoon $h = (0, 1)$. Tällöin $d(h, K) = 1 = d(h, (0, s))$ kaikilla $-1 \leq s \leq 1$.

Olkoon H Hilbertin avaruus ja olkoon $K \subset H$ suljettu konveksi osajoukko. Lähimmän pisteen kuvaus $P_K \colon H \to K$ on kuvaus, jolle pätee

$$\|h - P_K(h)\| = d(h, K)$$

kaikilla $h \in H$.

Lauseen 8.3 nojalla lähimmän pisteen kuvaus on hyvin määritelty.

Esimerkki 8.5. Olkoon V sisätuloavaruus. Tällöin

$$P_{\overline{B}(0,1)}(x) = \begin{cases} x & \text{, jos } x \in \overline{B}(0,1) \\ \dfrac{x}{\|x\|} & \text{muuten.} \end{cases}$$

Seuraava tulos on lähimmän pisteen karakterisointi sisätulon ja varsinkin reaalisessa tapauksessa kulman avulla:

Propositio 8.6. *Olkoon H Hilbertin avaruus. Olkoon $K \subset H$ suljettu konveksi osajoukko. Olkoot $h \in H$ ja $k \in K$. Tällöin $\|h - k\| = d(h, K)$, jos ja vain jos*

$$\mathrm{Re}\,(h - k \mid z - k) \leq 0$$

kaikilla $z \in K$.

Todistus. Oletetaan, että $\|h - k\| = d(h, K)$. Olkoon $z \in K$ ja olkoon $0 < t < 1$. Konveksiuden nojalla $k + t(z - k) \in K$, joten

$$\|h - k\|^2 \leq \|h - (k + t(z - k))\|^2 = \|h - k\|^2 - 2t\,\mathrm{Re}\,(h - k \mid z - k) + t^2\|z - k\|^2\,.$$

Siis

$$\mathrm{Re}\,(h-k \mid z-k) \leq \frac{t}{2}\|z-k\|^2$$

kaikille $0 < t < 1$, mistä $\mathrm{Re}\,(h-k \mid z-k) \leq 0$ seuraakin.

Oletetaan, että kaikille $z \in K$ pätee $\mathrm{Re}\,(h-k \mid z-k) \leq 0$. Tällöin

$$\|h-z\|^2 = \|h-k-(z-k)\|^2 = \|h-k\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(h-k \mid z-k) + \|z-k\|^2 \geq \|h-k\|^2$$

kaikille $z \in K$, joten k on lähin piste. □

Reaalisessa tapauksessa muistamme aiemmilta kursseilta, että Proposition 8.6 ehto $(h-k \mid z-k) \leq 0$ on yhtäpitävä sen kanssa, että vektorien $h-k$ ja $z-k$ välinen kulma on vähintään $\frac{\pi}{2}$.

Seuraus 8.7. *Olkoon H Hilbertin avaruus. Olkoon $K \subset H$ suljettu konveksi osajoukko ja olkoon $P_K\colon H \to K$ lähimmän pisteen kuvaus. Kaikille $x, y \in H$ pätee*

$$\|P_K(x) - P_K(y)\| \leq \|x-y\|\,.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

8.2 Ortogonaalisuus

Olkoon V sisätuloavaruus. Vektorit $v, w \in V$ ovat ortogonaalisia, $v \perp w$, jos $(w \mid v) = 0$.

Lemma 8.8 (Pythagoraan lause)**.** *Jos $(x \mid y) = 0$, niin*

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2\,.$$

Todistus. $\|x+y\|^2 = (x+y \mid x+y) = (x \mid x) + (x \mid y) + (y \mid x) + (y \mid y) = \|x\|^2 + \|y\|^2$. □

Osajoukon $A \subset V$ ortogonaalikomplementti on

$$A^\perp = \{v \in V : (v \mid a) = 0\ \forall a \in A\}\,.$$

Propositio 8.9. *Olkoon V sisätuloavaruus. Jokaisen osajoukon $A \subset V$ ortogonaalikomplementti on suljettu aliavaruus.*

Todistus. Lemman 7.9 nojalla kuvaus $h_a\colon V \to \mathbb{K}$, $h(a) = (v \mid a)$ on rajoitettu funktionaali jokaisella $a \in A$. Seurauksen 3.6 nojalla $\ker h_a$ on avaruuden V suljettu aliavaruus. Siis

$$A^\perp = \bigcap_{a \in A} \ker h_a$$

on suljettu aliavaruus. □

Propositio 8.10. *Olkoon V sisätuloavaruus. Tällöin*

(1) kaikille osajoukoille $B \subset A \subset V$ pätee $A^\perp \subset B^\perp$.

(2) kaikille aliavaruuksille $U \subset V$ pätee $U^\perp = \overline{U}^\perp$.

(3) kaikille osajoukoille A pätee $A \subset (A^\perp)^\perp$.

(4) $\{0\}^\perp = V$ ja $V^\perp = \{0\}$.

(5) Kaikille $A \subset V$ pätee $A \cap A^\perp \subset \{0\}$.

Todistus. (1) on selvä.

(2) Kohdan (1) nojalla pätee $\overline{U}^\perp \subset U^\perp$. Osoitetaan inkluusio toiseen suuntaan. Olkoon $v \in U^\perp$. Jokaiselle $u \in \overline{U}$ on jono vektoreita $u_k \in U$, jolle pätee $\lim_{k\to\infty} u_k = u$. Koska kuvaus $x \mapsto (x \mid v)$ on jatkuva Lemman 7.9 nojalla, saadaan

$$(u \mid v) = \lim_{k\to\infty} (u_k \mid v) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0\,.$$

Siis $U^\perp \subset \overline{U}^\perp$.

(3) Harjoitustehtävä.

(4) $(0 \mid v) = 0$ kaikille $v \in V$, joten $\{0\}^\perp = V$. Koska jokaiselle $v \in V - \{0\}$ pätee $(v \mid v) > 0$, $v \notin V^\perp$. Siis $V^\perp = \{0\}$.

(5) Todistetaan samalla päättelyllä kuin kohdan (4) jälkimmäinen väite. □

Seuraus 8.11. *Jos H on sisätuloavaruuden tiheä aliavaruus, niin $H^\perp = \{0\}$.*

Todistus. Seuraa Proposition 8.10 kohdista (2) ja (4). □

8.3 Ortogonaaliprojektio

Lause 8.12. *Olkoon H Hilbertin avaruus. Olkoon $U \subset H$ suljettu aliavaruus ja olkoon $u \in U$. Tällöin $h - u \in U^\perp$, jos ja vain jos $\|h - u\| = d(h, U)$.*

Todistus. Oletetaan, että $h - u \in U^\perp$. Tällöin kaikille $z \in U$ pätee

$$0 = (h - u \mid z - u) = 2\,\mathrm{Re}\,(h - u \mid z - u)\,.$$

Proposition 8.6 nojalla $\|h - u\| = d(h, U)$.

Oletetaan sitten, että $\|h - u\| = d(h, U)$. Kaikilla $z \in U$ ja $t \in \mathbb{K}$ pätee Proposition 8.6 nojalla

$$0 \geq \mathrm{Re}\,(h - u \mid (u + tz) - u) = \mathrm{Re}\,(h - u \mid tz) = \mathrm{Re}\,(\bar{t}(h - u \mid z))\,.$$

Valitsemalla $t = (h - u \mid z)$ saadaan $|(h - u \mid z)|^2 \leq 0$ kaikilla $z \in U$, joten $(h - u \mid z) = 0$ kaikilla $z \in U$. □

Seuraus 8.13. *Olkoon H Hilbertin avaruus. Olkoon $U \subset H$ suljettu aliavaruus. Jokaiselle $h \in H$ on yksikäsitteinen $h_U \in U$, jolle $h - h_U \in U^\perp$ ja*

$$\|h - h_U\| = d(h, U)\,.$$

Todistus. Lauseen 8.3 nojalla aliavaruudessa U on yksikäsitteinen lähin piste h_U. Väite $h - h_U \in U^\perp$ seuraa Lauseesta 8.12 □

Olkoot X ja Y vektoriavaruuden V aliavaruuksia. Jos jokainen $v \in V$ voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa $v = x + y$ joillekin $x \in X$ ja $y \in Y$, niin V on aliavaruuksien X ja Y suora summa,

$$V = X \oplus V.$$

Jos V on sisätuloavaruus ja X ja Y ovat lisäksi ortogonaalisia, niin V on aliavaruuksien X ja Y ortogonaalinen suora summa,

$$V = X \overset{\perp}{\oplus} V.$$

.

Seuraus 8.14. *Olkoon H Hilbertin avaruus ja olkoon U sen suljettu aliavaruus. Tällöin*

$$H = U \overset{\perp}{\oplus} U^{\perp}.$$

Todistus. Seurauksen 8.13 nojalla jokaisella vektorilla $h \in H$ on esitys $h = u + p$, missä $u \in U$ ja $p \in U^{\perp}$. Jos on $u, v \in U$ ja $p, q \in U^{\perp}$, joille $u + p = h = v + q$, niin

$$U \ni u - v = q - p \in U^{\perp},$$

joten $u = v$ ja $p = q$, joten esitys on yksikäsitteinen. □

Olkoon H Hilbertin avaruus ja olkoon $U \subset H$ suljettu aliavaruus. Lähimmän pisteen kuvaus $P_U : H \to H$ suljetulle aliavaruudelle U on ortogonaaliprojektio aliavaruudelle U.

Propositio 8.15. *Olkoon U Hilbertin avaruuden H suljettu aliavaruus. Ortogonaaliprojektio P_U on rajoitettu lineaarikuvaus, jolle pätee $\|P_U\| \leq 1$ ja jos $U \neq \{0\}$, niin $\|P_U\| = 1$.*

Todistus. Osoitetaan kuvauksen lineaarisuus. Olkoot $x, y \in H$ ja olkoot $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Tällöin $x - P_U x \in U^{\perp}$ ja $y - P_U y \in U^{\perp}$. Koska U ja $U^{\perp}$ ovat aliavaruuksia, pätee

$$\lambda P_U x + \mu P_U y \in U$$

ja

$$\lambda x + \mu y - (\lambda P_U x + \mu P_U y) = \lambda(x - P_U x) + \mu(y - P_U y) \in U^{\perp}.$$

Siis $P_U(\lambda x + \mu y) = \lambda P_U x + \mu P_U y$.

Pythagoraan lauseen nojalla kaikille $x \in H$ pätee

$$\|x\|^2 = \|P_U x\|^2 + \|x - P_U x\|^2 \geq \|P_U x\|^2,$$

joten $\|P_U\| \leq 1$. Jos $x \in U - \{0\}$, niin $P_U x = x$, joten $\|P_U\| = 1$. □

Propositio 8.16. *Olkoon U Hilbertin avaruuden H suljettu aliavaruus.*

(1) $P_U \circ P_U = P_U$,

(2) $\ker P_U = U^{\perp}$,

(3) $\mathrm{id} - P_U = P_{U^{\perp}}$.

(4) $(P_U x \mid y) = (x \mid P_U y)$ *kaikille* $x, y \in H$.

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Olkoon H Hilbertin avaruus ja olkoon U sen suljettu aliavaruus. Proposition 8.9 nojalla $U^\perp$ on suljettu aliavaruus, joten ortogonaaliprojektio avaruudelle $U^\perp$ on määritelty. Seurauksen 8.14 nojalla jokaiselle $h \in H$ pätee

$$h = P_U h + P_{U^\perp} h\,.$$

Pythagoraan lauseen nojalla

$$\|h\|^2 = \|P_U h\|^2 + \|P_{U^\perp} h\|^2$$

Seuraus 8.17. $(U^\perp)^\perp = \overline{U}$.

Todistus. Koska $\overline{U}$ on suljettu aliavaruus, saamme 8.16 kohdan (3) ja Proposition 8.10 kohdan (2) nojalla

$$P_{\overline{U}} = \mathrm{id} - P_{\overline{U}^\perp} = \mathrm{id} - P_{U^\perp} = P_{U^{\perp\perp}}$$

Siis $U^{\perp\perp} = \overline{U}$. $\square$

Seuraus 8.18. *Jos* U *on Hilbertin avaruuden* H *suljettu aito aliavaruus, niin* $U^\perp \neq \{0\}$. *Jos* $M \neq \emptyset$ *on Hilbertin avaruuden* H *osajoukko, niin* $\langle M \rangle$ *on tiheä, jos ja vain jos* $M^\perp = \{0\}$.

Todistus. Jos U on suljettu aito aliavaruus, niin $U = U^{\perp\perp} \neq H$, joten $U^\perp \neq \{0\}$. $\square$

8.4 Fréchet'n ja Rieszin esityslause

Lauseessa 4.15 osoitimme, että $\ell^2(\mathbb{K})$ on isometrisesti isomorfinen duaalinsa kanssa. Tässä luvussa muun muassa yleistämme tämän tuloksen kaikille Hilbertin avaruuksille.

Propositio 8.19. *Olkoon* H *sisätuloavaruus ja olkoon* $T\colon H \to H'$ *kuvaus*

$$(Ty)(x) = (x \mid y)$$

kaikille $x, y \in H$. *Kuvaus* T *on lineaarinen isometrinen upotus, jos* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. *Se on konjugaattilineaarinen isometrinen upotus, jos* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Todistus. Harjoitus. $\square$

Esimerkki 8.20. Jos $H = \ell^2(\mathbb{K})$, niin Proposition 8.19 kuvaus T on sama kuin Luvussa 4 määritelty T:

$$(T\tau)\omega = (\omega \mid \tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega(j)\overline{\tau}(j)\,.$$

Tiedämme siis Lauseen 4.15 nojalla, että $T\colon \ell^2(\mathbb{K}) \to (\ell^2(\mathbb{K}))'$ on isometrinen isomorfismi.

Lause 8.21 (Fréchet'n ja Rieszin esityslause)**.** *Olkoon* H *Hilbertin avaruus. Jokaisella* $y' \in H'$ *on yksikäsitteinen* $y \in H$, *jolle*

$$y'(x) = (x \mid y)$$

kaikille $x \in H$. *Lisäksi* $\|y'\| = \|y\|$.

Todistus. Jos $y' = 0$, valitaan $y = 0$. Olkoon $y' \neq 0$. Tällöin $\ker y'$ on Hilbertin avaruuden H suljettu aito aliavaruus. Seurauksen 8.18 nojalla on $(\ker y')^\perp \neq \{0\}$. Rajoittumakuvaus $y'|_{(\ker y')^\perp}$ on injektio, koska se on lineaarikuvaus ja ytimen määritelmän nojalla pätee $y'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in (\ker y')^\perp - \{0\}$. Siis $\dim(\ker y')^\perp = 1$.

Olkoon $z \in (\ker y')^\perp - \{0\}$ ja olkoon $x \in H$. Tällöin $y'(z)x - y'(x)z \in \ker y'$, joten

$$0 = (y'(z)\,x - y'(x)\,z \mid z) = y'(z)(x \mid z) - y'(x)\|z\|^2\,,$$

josta järjestämällä saadaan

$$y'(x) = \left(x \,\middle|\, \frac{y'(z)}{\|z\|^2}\,z\right).$$

kaikille $x \in H$. Pisteen y yksikäsitteisyys seuraa Harjoitustehtävästä 7.1.

Väite $\|y'\| = \|y\|$ seuraa Propositiosta 8.19 □

Nyt saamme täydennettyä Proposition 8.19 hienoksi tulokseksi.

Seuraus 8.22. *Olkoon H Hilbertin avaruus ja olkoon $T\colon H \to H'$ kuvaus*

$$(Tx)(y) = (y \mid x)$$

kaikille $x, y \in H$. Kuvaus T on lineaarinen isometrinen isomorfismi, jos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Se on konjugaattilineaarinen isometrinen kuvaus, jos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. □

Seuraus 8.23. *H' on Hilbertin avaruus sisätulolla*

$$(x' \mid y') = (T^{-1}y' \mid T^{-1}x')\,.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Harjoitustehtäviä

8.1. Olkoon

$$A = \Big\{f \in \mathrm{C}^0([0,1]) : f(1) = 1\Big\}.$$

Osoita, että A on normiavaruuden $\mathrm{C}^0([0,1])$ suljettu konveksi osajoukko, jossa on äärettömän monta normin minimoivaa alkiota.

8.2. Olkoon

$$B = \Big\{f \in \mathrm{C}^0([0,1]) : f(0) = 0,\ \int_0^1 f(t)\,dt = 1\Big\}.$$

Osoita, että B on normiavaruuden $\mathrm{C}^0([0,1])$ suljettu konveksi osajoukko, jossa ei ole normin minimoivaa alkiota.

8.3. Olkoon H Hilbertin avaruus. Olkoon $K \subset H$ suljettu konveksi osajoukko ja olkoon $P_K\colon H \to K$ lähimmän pisteen kuvaus. Osoita, että kaikille $x, y \in H$ pätee[2]

$$\|P_K(x) - P_K(y)\| \leq \|x - y\|\,.$$

[2]Käytä Propositiota 8.6 molempien pisteiden kuville, tee hieman laskelmia ja käytä Cauchyn epäyhtälöä.

8.4. Olkoon H Hilbertin avaruus. Osoita, että $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$ kaikille $A \subset H$. Anna esimerkki jonkin sisätuloavaruuden aliavaruudesta A, jolle $(A^{\perp})^{\perp} \neq A$.

8.5. Olkoon H Hilbertin avaruus ja olkoon U avaruuden H suljettu aliavaruus. Osoita, että

(1) $\ker P_U = U^{\perp}$,

(2) $\mathrm{id} - P_U = P_{U^{\perp}}$.

8.6. Olkoon H Hilbertin avaruus ja olkoon U avaruuden H suljettu aliavaruus. Osoita, että $(P_U x \mid y) = (x \mid P_U y)$ kaikille $x, y \in H$.

Olkoon $P \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{b}}(H, H)$ operaattori, jolle pätee $P \circ P = P$ ja $(x \mid Py) = (Px \mid y)$ kaikille $x, y \in H$.

8.7. Osoita, että $U = P(H)$ on suljettu aliavaruus.

8.8. Osoita, että $P = P_U$.

8.9. Olkoon H reaalinen sisätuloavaruus ja olkoon $T \colon H \to H'$ kuvaus

$$(Tx)(y) = (y \mid x)$$

kaikille $x, y \in H$. Osoita, että kuvaus T on lineaarinen isometrinen upotus.

8.10. Olkoon H Hilbertin avaruus. Osoita, että sen duaali H' on Hilbertin avaruus sisätulolla

$$(x' \mid y')' = (T^{-1}y' \mid T^{-1}x')\,.$$

8.11. Olkoon $M \neq \emptyset$ Hilbertin avaruuden H osajoukko. Osoita, että $\langle M \rangle$ on tiheä, jos ja vain jos $M^{\perp} = \{0\}$.

8.12. Olkoon H Hilbertin avaruus ja olkoon $U \subset H$ vektorialiavaruus. Osoita, että jokaisella rajoitetulla funktionaalilla $u' \in U'$ on rajoitettu jatko funktionaaliksi $\widehat{u}' \in H'$.

Luku 9

Ortonormaalit kannat

Tässä luvussa tarkastelemme ortonormaaleja joukkoja sisätuloavaruuksissa ja erityisesti Hilbertin avaruuksien ortonormaaleja kantoja. Todistamme Besselin epäyhtälön, Parsevalin yhtälön ja Rieszin ja Fischerin lauseen. Luvun lopuksi tarkastelemme trigonometrisia Fourier'n sarjoja.

9.1 Ortonormaalit joukot

Olkoon H sisätuloavaruus. Joukko $E \subset H$ on ortonormaali, jos $\|e\| = 1$ kaikilla $e \in e$ ja $(e \mid f) = 0$ kaikilla $e, f \in E$, $e \neq f$.

Lemma 9.1. *Ortonormaali joukko on lineaarisesti riippumaton.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 9.2. Joukko $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ on ortonormaali joukko avaruudessa $\ell^2(\mathbb{K})$:

$$(e_n \mid e_m) = \sum_{j=0}^{\infty} e_n(j)e_m(j) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_{nj}\delta(mj) = \delta_{mn}\,.$$

Propositio 9.3. *Olkoon H sisätuloavaruus. Olkoon U sen äärellisulotteinen aliavaruus ja olkoon $e_1, \ldots, e_N$ aliavaruuden U ortonormaali (Hamelin) kanta. Tällöin*

$$P_U v = \sum_{j=1}^{N} (v \mid e_j)\, e_j$$

ja

$$\|P_U v\|^2 = \sum_{j=1}^{N} |(v \mid e_j)|^2\,.$$

Erityisesti kaikille $u \in U$ pätee

$$\|u\|^2 = \sum_{j=1}^{N} |(u \mid e_j)|^2 .$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 9.4 (Gram ja Schmidt)**.** *Olkoon H Hilbertin avaruus. Olkoon B äärellinen tai numeroituva lineaarisesti riippumaton joukko. Tällöin on ortonormaali joukko E, jolle pätee $\langle E \rangle = \langle B \rangle$.*

Todistus. Väite todistetaan lineaarialgebran ensimmäisiltä kursseilta tutulla Gramin ja Schmidtin menetelmällä: Olkoon $N = \mathbb{N}$ tai $N = \mathbb{N} \cap [0, N]$ ja olkoon $\{v_n \in H : n \in N\}$ lineaarisesti riippumaton joukko avaruudessa H. Määrittelemme ortonormaalin joukon E induktiivisesti. Aloitamme asettamalla $e_0 = \frac{v_0}{\|v_0\|}$. Olkoon

$$e_{k+1} = \frac{v_{k+1} - P_{\langle e_1, e_2, \ldots e_k \rangle}(v_{k+1})}{\|v_{k+1} - P_{\langle e_1, e_2, \ldots e_k \rangle}(v_{k+1})\|} .$$

Tällöin $\{e_1, e_2, \ldots e_{k+1}\}$ on lineaarisesti riippumaton ja

$$\langle e_1, e_2, \ldots e_{k+1} \rangle = \langle v_1, v_2, \ldots v_{k+1} \rangle .$$

Induktio antaa siis

$$\langle e_n : n \in N \rangle = \langle v_n : n \in N \rangle . \quad \square$$

Gramin ja Schmidtin menetelmä toimii yleisessä sisätuloavaruudessa sillä ortogonaaliprojektion P_U olemassaoloon riittää aliavaruuden täydellisyys, koko avaruuden täydellisyyttä ei tarvita. Äärellisulotteinen aliavaruus on täydellinen kuten luvussa 4 todistettiin.

Esimerkki 9.5. [Legendren polynomit] Jos sovellamme Gramin ja Schmidtin menetelmää avaruudessa $L^2([-1, 1])$ lineaarisesti riippumattomaan joukkoon $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$, missä $p_n(x) = x^n$ kaikille $x \in [-1, 1]$, saamme ortonormaalin joukon

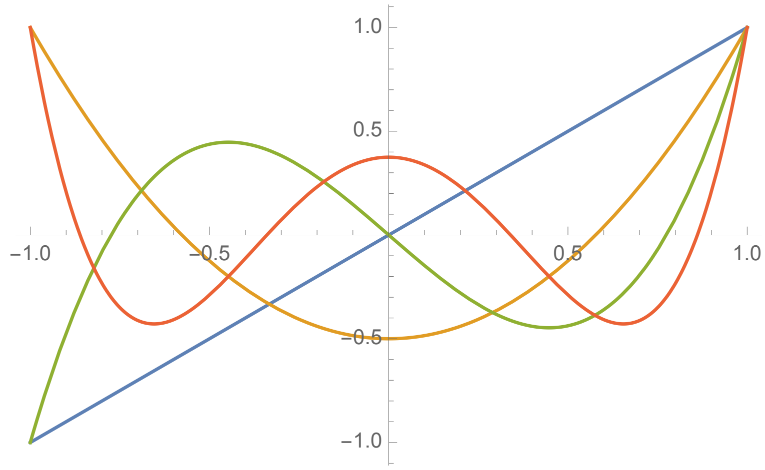
$$L = \left\{ \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n : n \in \mathbb{N} \right\},$$

missä P_n on n:s Legendren polynomi

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \frac{(2(n-j))!}{2^n\, j!\, (n-j)!(n-2j)!} x^{n-2j} .$$

Lauseen 9.4 nojalla L on polynomifunktioiden avaruuden Hamelin kanta, joka on ortonormaali avaruuden $L^2([-1, 1])$ sisätulon suhteen. Ensimmäiset Legendren polynomit ovat

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right) \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)
\end{aligned}$$



Kuva 9.1: Legendren polynomifunktioiden P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 kuvaajat välillä $[-1, 1]$.

Lause 9.6 (Besselin epäyhtälö)**.** *Olkoon E numeroituva tai äärellinen ortonormaali joukko sisätuloavaruudessa V. Tällöin*

$$\sum_{e \in E} |(x \mid e)|^2 \leq \|x\|^2$$

kaikille $x \in V$

Todistus. Tarkastellaan tapausta, jossa E on numeroituvasti ääretön, äärellinen tapaus saadaan samalla todistuksella. Koska sarjan $\sum_{e \in E} |(v \mid e_j)|^2$ termit ovat positiivisia tai 0, sarjan termien järjestäminen ei vaikuta sarjan suppenemiseen eikä summaan. Olkoon $E = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$. Pythagoraan lauseen nojalla kaikille $N \in \mathbb{N}$ pätee

$$\|x\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^{N} (v \mid e_j)\, e_j \right\|^2 + \left\| x - \sum_{j=1}^{N} (v \mid e_j)\, e_j \right\|^2 \geq \left\| \sum_{j=1}^{N} (v \mid e_j)\, e_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{N} |(v \mid e_j)|^2 \,,$$

mistä väite seuraakin, koska sarjan $\sum_{j=1}^{\infty} |(v \mid e_j)|^2$ termit ovat positiivisia tai 0. □

Gramin ja Schmidtin menetelmä soveltuu rakenteensa vuoksi ainoastaan äärellisten ja numeroituvien ortonormaalien joukkojen muodostamiseen. Joissakin sisätuloavaruuksissa on suurempiakin ortonormaaleja joukkoja:

Esimerkki 9.7. Olkoon A ylinumeroituva joukko. Yhden pisteen joukkojen karakteristiset funktiot $\chi_{\{x\}}$, $x \in A$ muodostavat ylinumeroituvan ortonormaalin joukon avaruudessa $L^2(A, \#)$.

Seuraus 9.8. *Olkoon E on ortonormaali joukko sisätuloavaruudessa V ja olkoon $h \in V$. Tällöin $(h \mid e) \neq 0$ korkeintaan numeroituvan monelle $e \in E$.*

Todistus. Olkoon

$$E(h, n) = \left\{ e \in E : |(h \mid e)| \geq \frac{1}{n} \right\}$$

ja olkoon

$$E(h) = \{ e \in E : (h \mid e) \neq 0 \} \,.$$

Besselin epäyhtälön nojalla $E(h,n)$ on äärellinen, joten

$$E(h) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(h,n)$$

on numeroituva. $\square$

Seuraus 9.9 (Yleinen Besselin epäyhtälö)**.** *Olkoon E ortonormaali joukko sisätuloavaruudessa V. Tällöin*

$$\sum_{e\in E} |(x \mid e)|^2 \leq \|x\|^2$$

kaikille $x \in V$. $\square$

Lemma 9.10. *Olkoon V sisätuloavaruus. Olkoon $\{e_i : i \in \mathbb{N}\} \subset V$ ortonormaali joukko ja olkoot $x, y \in V$. Sarja*

$$\sum_{i=0}^{\infty} (x \mid e_i)(e_i \mid y)$$

suppenee itseisesti.

Todistus. Olkoot $\omega, \tau \colon \mathbb{N} \to \mathbb{K}$,

$$\omega(i) = (x \mid e_i) \quad \text{ja} \quad \tau(i) = (y \mid e_i).$$

Besselin epäyhtälön nojalla

$$\sum_{i=0}^{\infty} |(x \mid e_i)|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{ja} \quad \sum_{i=0}^{\infty} |(y \mid e_i)|^2 \leq \|y\|^2 ,$$

joten $\omega, \tau \in \ell^2(\mathbb{K})$. Hölderin epäyhtälön nojalla sarja $\sum\limits_{i=0}^{\infty} |(x \mid e_i)(e_i \mid y)|$ suppenee ja

$$\sum_{i=0}^{\infty} |(x \mid e_i)(e_i \mid y)| = \|\omega\tau\|_1 \leq \|\omega\|_2 \|\tau\|_2 \leq \|x\| \|y\| . \quad \square$$

Lause 9.11. *Olkoon H Hilbertin avaruus ja olkoon $E \subset H$ ortonormaali joukko. Olkoon $h \in H$. Tällöin*

(1) Sarja $\sum\limits_{e\in E} (h \mid e)\, e$ suppenee riippumatta joukon $E(h)$ järjestyksestä.

(2) $h_E = P_{\overline{\langle E \rangle}} h$.

Todistus. (1) Olkoon $E = \{e_i : i \in \mathbb{N}\}$. Pythagoraan lauseen ja Besselin epäyhtälön nojalla kaikille $M \leq N$ pätee

$$\Big\| \sum_{j=M}^{N} (h \mid e_j) e_j \Big\|^2 = \sum_{j=M}^{N} \Big|(h \mid e_j)\Big|^2 \leq \|h\|^2 .$$

Koska sarja $\sum_{j=0}^{\infty} \Big|(h \mid e_j)\Big|^2$ suppenee, pätee $\sum_{j=M}^{N} \Big|(h \mid e_j)\Big|^2 \to 0$, kun $k \to \infty$. Siis sarjan $\sum_{j=0}^{\infty} (h \mid e_j) e_j$ osasummien jono on Cauchyn jono, joten sarja $\sum_{j=0}^{\infty} (h \mid e_j) e_j$ suppenee.

(2) Selvästi $\sum_{e\in E}(h \mid e)\, e \in \overline{\langle E\rangle}$. On vielä osoitettava, että $h - \sum_{e\in E}(h \mid e)e \in \overline{\langle E\rangle}^{\perp}$. Proposition 8.10 nojalla $\overline{\langle E\rangle}^{\perp} = \langle E\rangle^{\perp}$, joten lineaarisuuden nojalla riittää osoittaa, että $\big(h - \sum_{e\in E}(h \mid e)e \mid e'\big) = 0$ kaikille $e' \in E$.

Jos $e' \in E - E(h)$, niin $(h \mid e') = 0 = (e \mid e')$ kaikilla $e \in E(h)$. Tällöin

$$\Big(h - \sum_{e\in E}(h \mid e)e \mid e'\Big) = (h \mid e') - \Big(\sum_{e\in E}(h \mid e)e \mid e'\Big) = 0 - 0 = 0$$

Jos taas $e' \in E(h)$, niin $(h \mid e') = 0 = (e \mid e')$ kaikilla $e \in E(h) - \{e'\}$. Tällöin kaikille äärellisille $F \subset E$, jotka sisältävät vektorin e', pätee

$$(h - \sum_{e\in E}(h \mid e)e \mid e') = (h \mid e') - \sum_{e\in E}(h \mid e)(e \mid e') = (h \mid e') - (h \mid e')(e' \mid e') = 0\,. \quad \square$$

9.2 Ortonormaali kanta

Hilbertin avaruuden H inkluusion suhteen maksimaalista ortonormaalia joukko on avaruuden H Hilbertin kanta eli ortonormaali kanta. Jos E on ortonormaali kanta avaruudessa H, lukuja $(h \mid e)$, $e \in E$ sanotaan vektorin $h \in H$ Fourier'n kertoimiksi.

Seuraus 9.12. *Olkoon E Hilbertin avaruuden ortonormaali kanta. Tällöin*

$$h = \sum_{e\in E}(h \mid e)\, e$$

kaikille $h \in H$.

Todistus. Jos $\langle E\rangle$ ei ole tiheä, niin $\overline{\langle E\rangle}$ on suljettu aito aliavaruus. Seurauksen 8.18 nojalla on $u \in E^{\perp}$, $(u \mid u) = 1$, joten $E \cup \{u\}$ on ortonormaali joukko ja E ei ole ortonormaali kanta. Siis väite seuraa Lauseesta 9.11. $\square$

Esimerkki 9.13. Osoitimme Esimerkissä 9.2, että joukko $\{e_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \ell^2(\mathbb{K})$ on ortonormaali. Se on itse asiassa avaruuden $\ell^2(\mathbb{K})$ ortonormaali kanta: Jos $\omega \in \ell^2(\mathbb{K})$. Tällöin $(\omega \mid e_i) = \omega(i)$ ja

$$\omega = \sum_{i=0}^{\infty}(\omega \mid e_i)e_i\,.$$

Jos siis $(\omega \mid e_i) = 0$ kaikilla i, niin $\omega = 0$.

Zornin lemman avulla todistetaan

Lause 9.14. *Olkoon E ortonormaali joukko Hilbertin avaruudessa H. Avaruudella H on ortonormaali kanta, joka sisältää joukon E.*

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Seuraus 9.15. *Jokaisella Hilbertin avaruudella on ortonormaali kanta.* $\square$

Lause 9.16. *Olkoon E ortonormaali joukko Hilbertin avaruudessa H. Kuvaus $F\colon H \to \ell^2_E(\mathbb{K}) = L^2_{\mathbb{K}}(E, \#)$,*

$$F(h)(e) = (h \mid e)\,,$$

on rajoitettu lineaarikuvaus. Sen rajoittuma suljettuun aliavaruuteen $\overline{\langle E\rangle}$ on isometria.

Todistus. Yleisen Besselin epäyhtälön nojalla $F(h) \in \ell^2_E(\mathbb{K})$ ja kuvauksen F lineaarisuus seuraa sisätulon lineaarisuudesta. Yleinen Besselin epäyhtälö antaa myös rajoittuneisuuden, koska

$$\|F(h)\|_2^2 = \sum_{e\in E} |(h \mid e)|^2 \leq \|h\|^2$$

kaikille $h \in H$.

Vektoriavaruuden $\langle E\rangle$ alkiot ovat äärellisiä lineaarikombinaatioita $\sum_{e\in A} \lambda_e e$ äärellisille joukoille $A \subset E$. Proposition 9.3 nojalla $F|_{\langle E\rangle}$ on isometrinen upotus. Sen kuvajoukko on avaruuden $\ell^2_E(\mathbb{K})$ tiheä aliavaruus

$$d^2(E) = \Big\{ f\colon E \to \mathbb{K} : \#\operatorname{supp} f < \infty \Big\} \subset \ell^2_E(\mathbb{K})\,.$$

Harjoitustehtävän 5.7 nojalla $F\colon \overline{\langle E\rangle} \to \ell^2_E(\mathbb{K})$ on isometrinen upotus. Koska $\overline{\langle E\rangle}$ on täydellinen, $F(\overline{\langle E\rangle}) \subset \ell^2_E(\mathbb{K})$ on täydellinen, siis suljettu aliavaruus. Siis

$$H \supset F(\overline{\langle E\rangle}) \supset \overline{d^2_E(\mathbb{K})} = H\,,$$

koska $d^2_E(\mathbb{K}) \subset F(\overline{\langle E\rangle})$. □

Lause 9.17. *Olkoon E ortonormaali joukko Hilbertin avaruudessa H. Seuraavat ominaisuudet ovat yhtäpitäviä:*

(1) E on avaruuden H ortonormaali (Hilbertin) kanta.

(2) $\langle E\rangle$ on tiheä aliavaruus.

(3) Kaikille $h \in H$ pätee

$$\sum_{e\in E} |(h \mid e)|^2 = \|h\|^2\,. \qquad \text{(Parsevalin yhtälö)}$$

(4) Kaikille $x, y \in H$ pätee

$$\sum_{e\in E} (x \mid e)(e \mid y) = (x \mid y)\,.$$

Todistus. (1) $\implies$ (2): Tehtiin Seurauksen 9.12 todistuksessa.
(2) $\implies$ (3): Seuraa Lauseesta 9.16.
(3) $\implies$ (4): Harjoitustehtävä, seuraa polaarikaavasta, Lemma 7.4.
(4) $\implies$ (1): Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 9.18. Weierstrassin approksimointilauseen[1] nojalla polynomifunktioiden muodostama aliavaruus on tiheä normiavaruudessa $\mathrm{C}^0(I)$ kaikilla kompakteilla väleillä $I \subset \mathbb{R}$. Proposition 7.11 nojalla $\mathrm{C}^0(I)$ on tiheä avaruudessa $L^2(I)$. Siis polynomifunktioiden aliavaruus on tiheä avaruudessa $L^2([a,b])$, koska kaikille $f, g \in \mathrm{C}^0([a,b])$ pätee

$$\|f-g\|_2^2 = \int_a^b |f-g|^2 \leq (b-a)\|f-g\|_\infty^2\,. \tag{9.1}$$

Esimerkin 9.5 nojalla Legendren polynomien P_n monikerroista koostuva joukko L on Hilbertin avaruuden $L^2([-\pi,\pi])$ ortonormaali kanta.

[1] Lause 2.16

Seuraus 9.19. *$L^2(I)$ on separoituva kaikilla kompakteilla väleillä $I \subset \mathbb{R}$.*

Todistus. Trigonometristen polynomien aliavaruudella on numeroituva Hamelin kanta, joten Proposition 2.14 nojalla $L^2(I)$ on separoituva. $\square$

Seuraus 9.20 (Rieszin ja Fischerin lause)**.** *Olkoon E Hilbertin avaruuden H ortonormaali kanta. Hilbertin avaruudet H ja $\ell^2(E) = L^2(E, \#)$ ovat isometrisesti isomorfisia.*

Todistus. Lauseen 9.17 nojalla $\langle E \rangle$ on tiheä aliavaruus. Lauseen 9.16 kuvaus F on etsitty isometria. $\square$

Propositio 9.21. *Separoituvan Hilbertin avaruuden ortonormaali kanta on numeroituva.*

Todistus. Olkoon H separoituva Hilbertin avaruus. Proposition 2.14 nojalla on numeroituva osajoukko $A \subset H$, jonka virittämä aliavaruus $\langle A \rangle$ on tiheä. Gramin ja Schmidtin menetelmän[2] nojalla on numeroituva ortonormaali joukko $E \subset H$, jolle $\langle E \rangle = \langle A \rangle$. Lauseen 9.17 nojalla E on ortonormaali kanta. $\square$

Toinen todistus. Jos E on Hilbertin avaruuden ortonormaali kanta, niin $\|e - f\|^2 = 2$ kaikilla $e, f \in E$, $e \neq f$. Siis pallot $B(e, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $e \in E$, ovat erillisiä, joten separoituvassa avaruudessa E on korkeintaan numeroituva.[3] $\square$

Seuraus 9.22. *Jokainen separoituva ääretönulotteinen Hilbertin avaruus on isometrinen avaruuden $\ell^2(\mathbb{K})$ kanssa.* $\square$

Seuraus 9.23. *Ääretönulotteiset separoituvat Hilbertin avaruudet ovat keskenään isometrisesti isomorfisia.* $\square$

9.3 Fourier'n sarjoista

Olkoon H Hilbertin avaruus ja olkoon $E \subset H$ ortonormaali kanta. Sarja

$$\sum_{e \in E} (h \mid e)\, e = h\,.$$

on vektorin $h \in H$ Fourier'n sarja kannan E suhteen.

Esimerkki 9.24. (1) Olkoot $\mathrm{e}_k \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$,

$$\mathrm{e}_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}$$

kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Tällöin

$$(\mathrm{e}_m \mid \mathrm{e}_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t}\, dt = \delta_{mn}\,,$$

joten joukko $\{\mathrm{e}_k : k \in \mathbb{Z}\}$ on ortonormaali joukko avaruudessa $L^2_{\mathbb{C}}([0, 2\pi])$.

[2] Lause 9.4
[3] Vertaa Esimerkkiin 2.15(1).

(2) Olkoot $\mathrm{c}_n, \mathrm{s}_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktiot

$$\mathrm{c}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n\,t) \quad \text{ja} \quad \mathrm{s}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n\,t)\,.$$

Harjoituksissa osoitetaan, että joukko

$$\Big\{\mathrm{c}_n, \mathrm{s}_n : n \in \mathbb{N} - \{0\}\Big\} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\}$$

on ortonormaali joukko avaruudessa $L^2([0, 2\pi])$. Koska trigonometriset funktiot voidaan kirjoittaa kompleksisten eksponenttifunktioiden avulla

$$\begin{aligned} 2\,\cos(kt) &= e^{ikt} + e^{-ikt} \\ 2i\,\sin(kt) &= e^{ikt} - e^{-ikt}\,, \end{aligned}$$

riittää tarkastella ortonormaalia joukkoa $\{\mathrm{e}_k : k \in \mathbb{Z}\}$.

Olkoon $N \in \mathbb{N}$ ja olkoot $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$ kaikilla $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Funktio

$$Q(t) = a_0 \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$$

on trigonometrinen polynomi.

Lause 9.25 (Weierstrassin trigonometrinen approksimointilause)**.** *Trigonometristen polynomien aliavaruus on avaruuksien* $\mathrm{C}^0([-\pi, \pi])$ *ja* $L^2([-\pi, \pi])$ *tiheä aliavaruus.*

Todistus. Kuten Esimerkissä 9.18 riittää osoittaa, että trigonometristen polynomien muodostama aliavaruus on tiheä avaruudessa $\mathrm{C}^0([-\pi, \pi])$.

Tarkastellaan trigonometristen polynomien jonoa $(Q_k)_{k=1}^{\infty}$,

$$Q_k(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{2^k\,(k!)^2}{(2k)!} \left(\frac{1 + \cos t}{2}\right)^k$$

Kaikilla $k \geq 1$ pätee $Q_k \geq 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} Q_k = 1$ ja jono $\Big(Q_k|_{[-\pi,\pi]-]-\delta,\delta[}\Big)_{k=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti 0-funktioon jokaisella $0 < \delta < \pi$. Trigonometrinen polynomi Q_k voidaan esittää funktioiden e_k $\mathbb{C}$-kertoimisena lineaarikombinaationa

$$Q_k = \sum_{j \in J_k} \alpha_j c_j$$

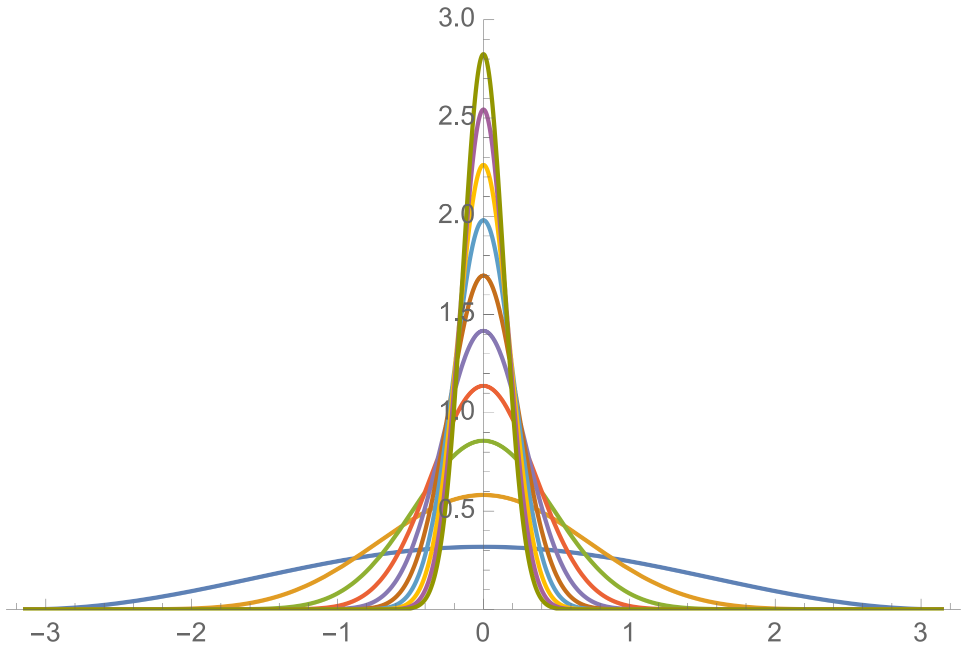
jollain äärellisellä indeksijoukolla $J_k \subset \mathbb{Z}$.

Olkoon $f \in \mathrm{C}^0([-\pi, \pi])$. Funktioiden f ja e_k 2π-jaksollisuuden nojalla

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) e^{iks} ds = \int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(s) e^{ik(t-s)} ds = e^{ikt} \int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(s) e^{-is} ds = e^{ikt} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-is} ds\,,$$

joten funktio P_k, joka määritellään asettamalla

$$P_k(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)\, Q_k(s)\, ds$$



Kuva 9.2: Funktiot Q_k, kun $k \in \{j^2 : 1 \le j \le 10\}$.

on trigonometrinen polynomi jokaisella $k \in \mathbb{N}$. Osoitamme, että $P_k \to f$ avaruudessa $\mathrm{C}^0([-\pi,\pi])$, kun $k \to \infty$. Huomaamme, että polynomin P_k määritelmän nojalla

$$|P_k(t) - f(t)| = \Big| \int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(t-s) - f(t)\Big) Q_k(s)ds\Big| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(t-s) - f(t)|\, Q_k(s)ds$$

Olkoon $\epsilon > 0$. Koska f on jaksollisena funktiona tasaisesti jatkuva, on $\delta > 0$ siten, että ehdosta $|s_1 - s_2| < \delta$ seuraa $|f(s_1) - f(s_2)| < \epsilon$ kaikille s_1, s_2. Nyt

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(t-s) - f(t)|\, Q_k(s)ds < \epsilon \int_{-\delta}^{\delta} Q_k(s)ds \le \epsilon\,.$$

Tasaisen suppenemisen nojalla on $N > 0$ siten, että $|Q_k(s)| < \epsilon$, kun $k \ge N$. Siis

$$\int_{-\pi}^{-\delta} |f(t-s) - f(t)|\, Q_k(s)ds \le 2\|f\|_\infty \max\Big\{Q_k(s) : s \in [-\pi,-\delta] \cup [\delta,\pi]\Big\} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Väite seuraa epäyhtälöstä (9.1). □

Seuraus 9.26. *Joukko $E = \{\mathrm{e}_k : k \in \mathbb{Z}\}$ on on Hilbertin avaruuden $L^2_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi])$ ortonormaali kanta. Joukko $\Big\{\mathrm{c}_n, \mathrm{s}_n : n \in \mathbb{N} - \{0\}\Big\} \cup \Big\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big\}$ on Hilbertin avaruuden $L^2([-\pi,\pi])$ ortonormaali kanta.* □

Esimerkki 9.27. (1) Funktion $\chi_{\mathbb{Q}\cap[-\pi,\pi]}$ Fourier'n sarja on 0.

(2) Tarkastellaan Esimerkistä 9.24 tuttua ortonormaalia joukkoa

$$\Big\{\mathrm{c}_n, \mathrm{s}_n : n \in \mathbb{N} - \{0\}\Big\} \cup \Big\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big\}$$

Funktion $f \in L^2([-\pi,\pi])$ Fourier'n kertoimet ovat

$$\begin{aligned} a_0 &= \Big(f \mid \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \\ a_k &= (f \mid \mathrm{c}_k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt \\ b_k &= (f \mid \mathrm{s}_k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt \end{aligned}$$

Olkoon $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ porrasfunktio

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{, kun } t \le 0 \\ 1 & \text{muuten} \end{cases}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\pi} 1\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ a_k &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}\cos(kt)dt = 0 \\ b_k &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}\sin(kt)dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1-\cos(k\pi)}{k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1-(-1)^k}{k}\,. \end{aligned}$$

Siis

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k}\sin(kt) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1}$$

avaruudessa $L^2([-\pi,\pi])$.

Harjoitustehtäviä

9.1. Osoita, että ortonormaali joukko on lineaarisesti riippumaton.

9.2. Olkoon $\{e_1,\dots,e_N\}$ äärellinen ortonormaali joukko ja olkoon $U = \langle e_1,\dots,e_N\rangle$. Osoita, että

$$P_U v = \sum_{j=1}^{N}(v \mid e_j)\,e_j$$

kaikille $v \in H$.

9.3. Olkoot $\mathrm{c}_n, \mathrm{s}_n\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ funktiot

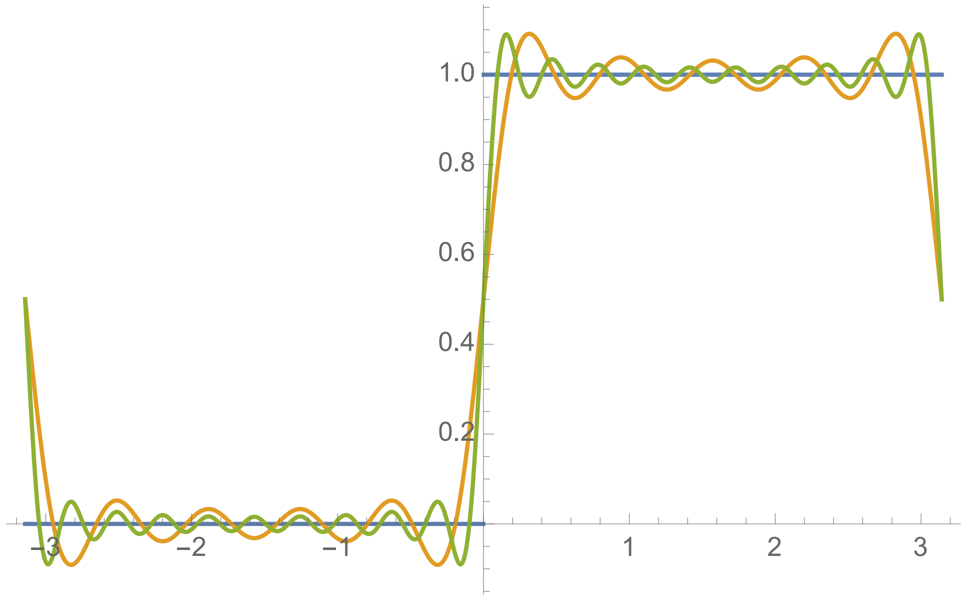
$$\mathrm{c}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(n\,t) \quad \text{ja} \quad \mathrm{s}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(n\,t)\,.$$

Osoita, että joukko

$$\Big\{\mathrm{c}_n : n \in \mathbb{N} - \{0\}\Big\} \cup \Big\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big\} \cup \Big\{\mathrm{s}_n : n \in \mathbb{N} - \{0\}\Big\}$$

on ortonormaali joukko avaruudessa $L^2([0,2\pi])$.[4]

[4]Tarvittavat trigonometriset kaavat voi todistaa tarkastelemalla yhtälöitä $e^{int}e^{imt} = e^{i(n+m)t}$.



Kuva 9.3: Porrasfunktion trigonometriset approksimaatiot funktioilla f_{10} ja f_{20}, kun $f_k(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{k} \sin(kt)$.

9.4. Olkoon E ortonormaali joukko Hilbertin avaruudessa H. Osoita, että avaruudella H on ortonormaali kanta, joka sisältää joukon E.[5]

9.5. Olkoon E ortonormaali joukko Hilbertin avaruudessa H, jolle pätee

$$\sum_{e \in E} |(h \mid e)|^2 = \|h\|^2 .$$

kaikilla $h \in H$. Osoita, että kaikille $x, y \in H$ pätee

$$\sum_{e \in E} (x \mid e)(e \mid y) = (x \mid y) .$$

9.6. Olkoon E ortonormaali joukko Hilbertin avaruudessa H, jolle pätee

$$\sum_{e \in E} (x \mid e)(e \mid y) = (x \mid y)$$

kaikille $x, y \in H$. Osoita, että E on ortonormaali Hilbertin kanta.

9.7. Määritä funktion $f \in L^2([-\pi, \pi])$, $f(t) = t$, Fourier'n sarja.

9.8. Määritä funktion $f \in L^2([-\pi, \pi])$, $f(t) = |t|$, Fourier'n sarja.

9.9. Olkoon $A \subset [-\pi, \pi]$ mitallinen joukko. Osoita, että

$$\lim_{k \to \infty} \int_A \cos(kt)\, dt = 0 .$$

[5]Todistetaan Zornin lemman avulla kuten vastaava tulos Hamelin kannalle.

Osa III

Edistyneitä aiheita

Luku 10

Banachin avaruuden duaalista

Tässä luvussa tarkastelemme rajoitettujen funktionaalien olemassaolo- ja jatkamiskysymyksiä Banachin avaruuksissa. Osoitamme muun muassa, että jokaisessa normiavaruudessa, joka ei ole $\{0\}$, on nollasta poikkeavia rajoitettuja funktionaaleja. Hilbertin avaruuksissa tämä seuraa Fréchet'n ja Rieszin esityslauseesta mutta ääretönulotteisen Banachin avaruuden tapauksessa asia ei ole aivan itsestään selvä.

10.1 Sublineaariset funktiot ja funktionaalit

Tässä luvussa todistamme tärkeän teknisluontoisen tuloksen, jota käytetään Hahnin ja Banachin lauseen todistuksessa.

Olkoon V $\mathbb{K}$-vektoriavaruus. Funktio $p\colon V \to \mathbb{R}$ on sublineaarinen, jos

(1) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ kaikille $x, y \in V$ ja

(2) $p(\lambda x) = \lambda\, p(x)$ kaikille $\lambda > 0$ ja $x \in V$.

Esimerkki 10.1. Reaaliset funktionaalit, seminormit ja funktio $\limsup\colon \ell^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\limsup(\omega) = \limsup_{k\to\infty} \omega(k)$$

ovat sublineaarisia.

Propositio 10.2. *Olkoon V $\mathbb{R}$-vektoriavaruus ja olkoon $p\colon V \to \mathbb{R}$ sublineaarinen. Olkoon H vektorialiavaruus ja olkoon $f\colon H \to \mathbb{R}$ funktionaali, jolle pätee $f(h) \leq p(h)$ kaikille $h \in H$. Olkoon $v_0 \in V - H$. Tällöin on funktionaali $F_{v_0}\colon \langle H, v_0\rangle \to \mathbb{R}$, jolle pätee*

(1) $F_{v_0}(v) \leq p(v)$ kaikille $v \in \langle H, v_0\rangle$ ja

(2) $F_{v_0}|_H = f$.

Todistus. Kuvaus $F_c\colon \langle H, v_0\rangle \to \mathbb{R}$, joka määritellään jokaisella $c \in \mathbb{R}$ asettamalla

$$F_c(v + \lambda v_0) = f(v) + c\lambda$$

on selvästi lineaarinen ja $F_c|_H = f$.

Valitaan parametri c siten, että ehto (1) saadaan voimaan. Ehto (1) pätee kaikilla c, jos $\lambda = 0$. Oletetaan, että $\lambda > 0$. Tällöin $f(h) + c\lambda \le p(h + \lambda v_0)$ kaikilla $h \in H$, jos ja vain jos $c \le p(\frac{h}{\lambda} + v_0) - f(\frac{h}{\lambda})$ kaikilla $h \in H$, mikä on yhtäpitävää ehdon

$$c \le \inf_{u \in V} \Big(p(u + x_0) - f(u)\Big)$$

kanssa. Vastaavasti, jos $\lambda < 0$, niin $f(h) + c\lambda \le p(h + \lambda v_0)$ kaikilla $h \in H$, jos ja vain jos

$$c \ge \sup_{w \in H} (f(w) - p(w - v_0))\,.$$

Vakio c voidaan valita halutulla tavalla, jos

$$f(w) - p(w - x_0) \le p(u + v_0) - f(u)$$

pätee kaikilla $w, u \in H$. Lineaarisuuden ja sublineaarisuuden nojalla pätee

$$f(u) + f(w) = f(u + w) \le p(u + w) \le p(u + v_0) + p(w - v_0)\,,$$

mistä haluttu epäyhtälö seuraa. Valitaan siis jokin

$$c \in [\sup_{w \in V}(f(w) - p(w - v_0)), \inf_{u \in V}(p(u + v_0) - f(u))]\,,$$

ja asetetaan $F_{v_0} = F_c$. $\square$

Lause 10.3. *Olkoon V $\mathbb{R}$-vektoriavaruus ja olkoon $p\colon V \to \mathbb{R}$ sublineaarinen. Olkoon H vektorialiavaruus ja olkoon $f\colon H \to \mathbb{R}$ funktionaali, jolle pätee $f(h) \le p(h)$ kaikille $h \in H$. Tällöin on funktionaali $F\colon V \to \mathbb{R}$, jolle pätee*

(1) $F(v) \le p(v)$ kaikille $v \in V$ ja

(2) $F|_H = f$.

Todistus. Olkoon $\mathscr{A}$ sellaisten parien (Y, F) kokoelma, jossa

- Y on vektoriavaruuden V aliavaruus, joka sisältää aliavaruuden H ja
- $F\colon Y \to \mathbb{R}$ on funktionaalin f jatko, jolle pätee $F(y) \le p(y)$ kaikille $y \in Y$.

Määritellään järjestysrelaatio $\preceq$ joukossa $\mathscr{A}$ asettamalla $(Y_1, F_1) \preceq (Y_2, F_2)$, jos ja vain jos $Y_1 \subset Y_2$ ja $F_2|_{Y_1} = F_1$. On helppo tarkastaa että relaatio $\preceq$ on osittainen järjestys. Olkoon C ketju osittain järjestetyssä joukossa $(\mathscr{A}, \preceq)$. Olkoon

$$W_C = \bigcup \Big\{Y : (Y, F) \in C \text{ jollain } F\Big\}$$

ja määritellään $F_C\colon W_C \to \mathbb{R}$ asettamalla $F_C(x) = F(x)$, kun $x \in Y$ jollain $(Y, F) \in C$. Kuvaus F_C on hyvin määritelty, koska C on ketju. Se on lineaarinen: Kun $x_1, x_2 \in W_C$, on Y siten, että $(Y, F) \in C$, $x_1, x_2 \in Y$ ja $F_C(x_i) = F(x_i)$, kun $i \in \{1, 2\}$. Siis kaikille $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ pätee

$$F(\lambda x_1 + \mu x_2) = F_C(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda F_C(x_1) + \mu F_C(x_2) = \lambda F(x_1) + \mu F(x_2)\,.$$

Samalla tavalla tarkastetaan, että ehto (1) pätee aliavaruudessa W_C. Siis $(W_C, F_C) \in \mathscr{A}$ on ketjun C yläraja.

Zornin lemman nojalla joukolla $\mathscr{A}$ on maksimaalinen alkio $(\widehat{V}, \widehat{F})$. Jos $\widehat{V}$ olisi vektoriavaruuden V aito aliavaruus, niin Proposition 10.2 nojalla lineaarikuvauksella F olisi ehdon (1) toteuttava jatko $\widetilde{F}$ aliavaruuteen $\widetilde{V} = \langle \widehat{V}, v_0 \rangle$ jokaisella $v_0 \in V - \widehat{V}$. Tällöin siis $(\widetilde{V}, \widetilde{F}) \in \mathscr{A}$, $(\widehat{V}, \widehat{F}) \preceq (\widetilde{V}, \widetilde{F})$ ja $\widehat{V} \subsetneq \widetilde{V}$, joten maksimaalinen alkio ei olisikaan maksimaalinen. Siis $\widehat{V} = V$. □

10.2 Kompleksiset funktionaalit

Kompleksisille funktionaaleille Lauseen 10.3 vastine pitää muotoilla hieman eri tavalla koska kompleksiluvuilla ei ole käyttökelpoista järjestysrelaatiota.

Huomataan ensin, että kompleksisilla ja reaalisilla funktionaaleilla kompleksisessa vektoriavaruudessa on kuitenkin melko läheinen yhteys: Kompleksinen vektoriavaruus on myös reaalinen vektoriavaruus koska se toteuttaa kaikki vaatimukset tietenkin reaaliluvuillekin.

Lemma 10.4. *Olkoon V kompleksinen vektoriavaruus.*

(1) Olkoon $f\colon V \to \mathbb{R}$ reaalinen funktionaali. Tällöin $f_{\mathbb{C}}\colon V \to \mathbb{C}$,

$$f_{\mathbb{C}}(z) = f(z) - if(iz)\,,$$

on kompleksinen funktionaali.

(2) Olkoon F (kompleksinen) funktionaali. Tällöin $\operatorname{Re} F$ *on reaalinen funktionaali ja* $(\operatorname{Re} F)_{\mathbb{C}} = F$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 10.5. *Olkoon V $\mathbb{C}$-vektoriavaruus ja olkoon $p\colon V \to \mathbb{R}$ seminormi. Olkoon H vektoriavaruuden V $\mathbb{C}$-vektorialiavaruus ja olkoon $f\colon H \to \mathbb{C}$ funktionaali, jolle pätee $|f(h)| \le p(h)$ kaikille $h \in H$. Tällöin on funktionaali $F\colon V \to \mathbb{C}$, jolle pätee*

(1) $|F(v)| \le p(v)$ kaikille $v \in V$ ja

(2) $F|_H = f$.

Todistus. Nyt $\operatorname{Re} f(h) \le |f(h)| \le p(h)$ kaikilla $h \in H$, joten Lauseen 10.3 nojalla on $\mathbb{R}$-lineaarinen funktionaali $F_{\mathbb{R}}\colon V \to \mathbb{R}$, jolle pätee $F_{\mathbb{R}}|_H = \operatorname{Re} f$ ja $F_{\mathbb{R}}(v) \le p(v)$ kaikille $v \in V$. Lemman 10.4 nojalla

$$F(v) = F_{\mathbb{R}}(v) - iF_{\mathbb{R}}(iv)$$

on kompleksinen funktionaali, joka on funktionaalin f jatko. Lisäksi, kun $F(v) \neq 0$, pätee käyttämällä kompleksilukujen tavanomaisia laskumenetelmiä, lineaarisuutta, tietoa, että tarkasteltava luku on reaalinen ja sitä, että p on seminormi

$$\begin{aligned} |F(v)| &= F(v)\frac{\overline{F(v)}}{|F(v)|} = F\left(\frac{\overline{F(v)}}{|F(v)|}v\right) = F_{\mathbb{R}}\left(\frac{\overline{F(v)}}{|F(v)|}v\right) \\ &\leq p\left(\frac{\overline{F(v)}}{|F(v)|}v\right) = \left|\frac{\overline{F(v)}}{|F(v)|}\right| p(v) = p(v)\,. \end{aligned}$$ □

10.3 Hahnin ja Banachin lause

Olkoon H Hilbertin avaruus ja olkoon U sen suljettu aliavaruus. Olkoon $u' \in U'$. Tällöin $u' \circ P_U \in H'$. Jokaisella suljetun aliavaruuden rajoitetulla funktionaalilla on siis rajoitettu jatko koko Hilbertin avaruuteen. Proposition 5.8 nojalla sama pätee mille tahansa avaruuden H aliavaruudelle. Tämä päättely käyttää vahvasti ortogonaaliprojektiota, jota ei ole yleisessä Banachin avaruudessa. Tarkastelemme tässä luvussa Banachin avaruuden funktionaalien jatkamista.

Lause 10.6 (Hahnin ja Banachin lause)**.** *Olkoon V normiavaruus ja olkoon U sen vektorialiavaruus. Jokaiselle $h' \in U'$ on $v' \in V'$, jolle $v'|_U = h'$ ja $\|v'\| = \|h'\|$.*

Todistus. Olkoon $h' \in U'$. Funktio $p\colon V \to \mathbb{R}$, $p(x) = \|h'\|\|x\|$ on sublineaarinen, koska normi on sublineaarinen. Operaattorinormin määritelmän nojalla pätee $|h'(h)| \leq \|h'\|\|h\|$ kaikilla $h \in U$. Reaalisessa tapauksessa Lauseen 10.3 nojalla on funktionaali x', jolle pätee $x'|_U = h'$ ja $x'(x) \leq \|h'\|\|x\|$. Vastaavasti

$$-x'(x) = x'(-x) \leq \|h'\|\|-x\| = \|h'\|\|x\|\,,$$

joten $\|x'\| \leq \|h'\|$. Kompleksisessa tapauksessa tämä epäyhtälö saadaan suoraan Lauseesta 10.5.

Epäyhtälö $\|x'\| \geq \|h'\|$ on ominaisuuden $x'|_H = h'$ triviaali seuraus. □

Seuraus 10.7. *Olkoon V normiavaruus. Jokaisella $v \in V$ on $v' \in V'$, jolle $\|v'\| = 1$ ja $v'(v) = \|v\|$.*

Todistus. Olkoon $f \in \langle v\rangle'$ funktionaali $f(\lambda v) = \lambda\|v\|$. Tällöin $f(v) = \|v\|$ ja

$$\|f\| = \sup_{\lambda\neq 0} \frac{\big|\lambda\,\|v\|\big|}{\|\lambda\, v\|} = 1\,.$$

Hahnin ja Banachin lauseen nojalla funktionaalilla f on jatko $v' \in V'$, jolla on haluttu ominaisuus $\|v'\| = \|f\| = 1$.

□

Seuraus 10.8. *Olkoon $V \neq \{0\}$ normiavaruus. Tällöin $V' \neq \{0\}$.* □

Seuraus 10.9. *Olkoon $V \neq \{0\}$ normiavaruus. Tällöin jokaiselle $v \in V$ pätee*

$$\|v\| = \sup_{\|v'\|\leq 1} |v'(v)| = \sup_{\|v'\|=1} |v'(v)|\,.$$

Todistus. Jos $\|v'\| \leq 1$, niin $|v'(v)| \leq \|v'\|\|v\| \leq \|v\|$, joten

$$\|v\| \geq \sup_{\|v'\|\leq 1} |v'(v)| \, .$$

Toisaalta Seurauksen 10.7 nojalla jokaisella $v \in V$ on $v' \in V'$, jolle $\|v'\| = 1$ ja $v'(v) = \|v\|$. Siis

$$\|v\| \leq \sup_{\|v'\|\leq 1} |v'(v)| \, . \quad \square$$

Seuraus 10.10. *Olkoon X normiavaruus, olkoon $Y \subset X$ aito aliavaruus ja olkoon $x \in X - Y$ piste, jolle $d(x,Y) > 0$. Tällöin on $x' \in X'$, jolle $x'(x) = d(x,Y)$, $\|x'\| = 1$ ja $x'|_Y = 0$.*

Todistus. Olkoon $f \colon \langle Y, x\rangle \to \mathbb{K}$,

$$f(y + \lambda x) = \lambda \, d(x,Y) \, .$$

Tällöin f on funktionaali, $f(x) = d(x,Y)$ ja $f|_Y = 0$. Lisäksi pätee, kun $\lambda \neq 0$,

$$|f(y+\lambda x)| = |\lambda| \, d(x,Y) \leq |\lambda| \left\| x + \frac{y}{\lambda} \right\| = \|y + \lambda x\| \, ,$$

joten $\|f\| \leq 1$ ja f on siis rajoitettu. Etäisyyden määritelmän nojalla on jono $y_n \in Y$, joille $\|x - y_n\| \to d(x,Y)$. Siis

$$\frac{|f(x-y_n)|}{\|x-y_n\|} \to \frac{d(x,Y)}{d(x,Y)} = 1 \, ,$$

joten $\|f\| \geq 1$, joten $\|f\| = 1$.

Väite seuraa jatkamalla funktionaali f koko avaruuteen Hahnin ja Banachin lauseen avulla. $\square$

Seuraus 10.11. *Normiavaruus on separoituva, jos sen duaali on separoituva.*

Todistus. Oletetaan, että normiavaruuden X duaali X' on separoituva. Harjoitustehtävässä 2.6 osoitimme, että tällöin sen yksikköpallon kuori

$$S' = \{x' \in X' : \|x'\| = 1\}$$

on separoituva. Olkoon $\{x'_n : n \in \mathbb{N}\}$ joukon S' tiheä osajoukko. Operaattorinormin määritelmän nojalla jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on x_n, jolle $\|x_n\| = 1$ ja $x'_n(x_n) \geq \frac{1}{2}$.

Osoitetaan, että $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ on tiheä avaruudessa X. Oletetaan, että

$$Y = \overline{\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle}$$

on aito aliavaruus. Seurauksen 10.10 nojalla on $\widetilde{x}' \in X'$, jolle $\|\widetilde{x}'\| = 1$ ja $\widetilde{x}'|_Y = 0$. Erityisesti $\widetilde{x}'(x_n) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten

$$\frac{1}{2} \leq |x'_n(x_n)| = |x'_n(x_n) - \widetilde{x}'(x_n)| = |(x'_n - \widetilde{x}')(x_n)| \leq \|x'_n - \widetilde{x}'\|$$

kaikille x'_n. Siis $\{x'_n : n \in \mathbb{N}\}$ ei olekaan joukon S' tiheä osajoukko, ristiriita. $\square$

Esimerkki 10.12. Esimerkissä 2.15 osoitimme, että $\ell^\infty(\mathbb{K})$ ei ole separoituva. Lauseen 4.15 nojalla $\ell^\infty(\mathbb{K})$ on isometrisesti isomorfinen avaruuden $\ell^1(\mathbb{K})$ duaalin kanssa. Esimerkissä 2.15 osoitimme myös, että $\ell^1(\mathbb{K})$ on separoituva. Siis Seurauksen 10.11 käänteinen väite ei päde. Toisaalta Seurauksen 10.11 nojalla avaruuden $\ell^\infty(\mathbb{K})$ duaali ei ole separoituva.

Harjoitustehtäviä

10.1. Olkoon V kompleksinen vektoriavaruus.
(a) Olkoon $f\colon V \to \mathbb{R}$ reaalinen funktionaali. Osoita, että $f_{\mathbb{C}}\colon V \to \mathbb{C}$,

$$f_{\mathbb{C}}(z) = f(z) - if(iz)\,,$$

on kompleksinen funktionaali.
(b) Olkoon $F\colon V \to \mathbb{C}$ kompleksinen funktionaali. Osoita, että $\operatorname{Re} F$ on reaalinen funktionaali ja että $(\operatorname{Re} F)_{\mathbb{C}} = F$.

10.2. Todista Hahnin ja Banachin lause erikoistapauksessa, jossa X on separoituva reaalinen normiavaruus, käyttämättä Zornin lemmaa.

10.3. Olkoon V normiavaruus ja olkoot $x, y \in V$ siten, että $v'(x) = v'(y)$ kaikille $v' \in V'$. Osoita, että $x = y$.

10.4. Miten tehtävät 7.1 ja 10.3 liittyvät toisiinsa?

10.5. Olkoon V normiavaruus ja olkoot $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ lineaarisesti riippumattomia ja olkoot $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Osoita, että on rajoitettu funktionaali $f \in V'$, jolle $f(x_i) = a_i$ kaikilla $1 \le i \le n$.

10.6. Olkoon U normiavaruuden V vektorialiavaruus. Osoita, että

$$\overline{U} = \bigcap_{\substack{v' \in V' \\ U \subset \ker v'}} \ker v'\,.$$

10.7. Olkoon X normiavaruus. Aliavaruuden $U \subset X$ annihilaattori duaalissa X' on

$$U^{\perp} = \{x' \in X' : x'|_U = 0\}\,.$$

Osoita, että U on tiheä, jos ja vain jos $U^{\perp} = \{0\}$.

Luku 11

Duaali ja biduaali

Tässä luvussa jatkamme Banachin ja Hilbertin avaruuksien duaalien tarkastelua. Tutustumme heikkoon suppenemiseen ja refleksiivisiin avaruuksiin.

11.1 Biduaali

Normiavaruuden V biduaali on

$$V'' = (V')' .$$

Seurauksen 4.8 nojalla V'' on Banachin avaruus. Biduaalin alkioita on helppo löytää:

Propositio 11.1. *Olkoon V normiavaruus ja olkoon $x \in V$.*
(1) Kuvaus $\iota_V(x)\colon V' \to \mathbb{K}$, $\iota_V(x)(x') = x'(x)$ on rajoitettu funktionaali.
(2) Kuvaus $\iota_V\colon V \to V''$ on lineaarinen isometrinen upotus.

Todistus. Kuvaus $\iota_V(x)$ on lineaarinen:

$$\iota_V(x)(\lambda x_1' + \mu x_2') = (\lambda x_1' + \mu x_2')(x) = \lambda x_1'(x) + \mu x_2'(x) = \lambda\iota_V(x)(x_1') + \mu\iota_V(x)(x_2') .$$

Lisäksi

$$\|(\iota_V x)x'\| = \|x'x\| \leq \|x'\|\|x\| = \|x\|\|x'\| ,$$

joten $\iota_V(x)$ on rajoitettu lineaarikuvaus, jolle pätee $\|\iota_V(x)\| \leq \|x\|$. On helppo tarkastaa, että ι_V on lineaarikuvaus:

$$\iota_V(\lambda x + \mu y)x' = x'(\lambda x + \mu y) = \lambda x'(x) + \mu x'(y) = \lambda(\iota_V x)x' + \mu(\iota_V y)x' .$$

Seurauksen 10.7 nojalla jokaisella v on v', jolle $\|v'| = 1$ ja $(\iota_V v)v' = v'(v) = \|v\|$, joten

$$\|\iota_V v\| = \sup_{\|v'\|=1} (\iota_V v)v' \geq \|v\| . \quad \square$$

Olkoon V normiavaruus. Kuvaus $\iota = \iota_V : V \to V''$, joka määritellään asettamalla

$$(\iota_V v)F = Fv$$

kaikille $v \in V$ ja kaikille $F \in V'$, on avaruuden V kanoninen upotus biduaaliinsa.

Lauseen 5.7 toinen todistus. Olkoon V normiavaruus. Proposition 11.1 nojalla V on isometrisesti isomorfinen avaruden $\iota(V) \subset V''$ kanssa. Biduaaliavaruus V'' on Banachin avaruus ja niin on siis aliavaruuden $\iota(V)$ sulkeumakin Proposition 4.1(1). □

11.2 Heikko suppeneminen ja heikko topologia

Olkoon X normiavaruus. Jono (x_k), $x_k \in X$, suppenee heikosti kohti heikkoa raja-arvoa $x \in X$, jos $x'x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x'x$ kaikilla $x' \in X'$. Käytetään merkintää $x_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} x$.

Propositio 11.2. *Heikosti suppenevan jonon heikko raja-arvo on yksikäsitteinen.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Propositio 11.3. *Olkoon $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jono Hilbertin avaruudessa X. Tällöin $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suppenee heikosti pisteeseen $x \in X$, jos ja vain jos $(x_k \mid \widehat{x}) \to (x|\widehat{x})$ kaikille $\widehat{x} \in X$.*

Todistus. Fréchet'n ja Rieszin esityslauseen nojalla jokaisella $x' \in X'$ on $\widehat{x} \in X$, jolle $x'(x) = (x \mid \widehat{x})$ kaikilla $x \in X$. □

Esimerkki 11.4. (1) Olkoot $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$, $x_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots, x_k^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Olkoon $\|\cdot\|$ normi avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Normiavaruudessa $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ pätee $x_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} x$, jos ja vain jos $x_k^{(j)} \xrightarrow[k\to\infty]{} x^{(j)}$ kaikilla $1 \le j \le n$, jos ja vain jos $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x$.
(2) Jono (e_k) ei suppene avaruudessa $\ell^2(\mathbb{K})$, koska $\|e_n - e_m\|^2 = 2$, jos $n \ne m$. Kuitenkin Besselin epäyhtälön[1] nojalla sarja $\sum_{k=0}^{\infty} |(e_k \mid a)|^2$ suppenee kaikille $a \in \ell^2(\mathbb{K})$, joten

$$(e_k \mid a) \to 0 = (0 \mid a)$$

kaikille $a \in \ell^2(\mathbb{K})$. Siis $e_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} 0$.

Lemma 11.5. *Normiavaruuden suppeneva jono suppenee heikosti ja sen heikko raja-arvo on sen raja-arvo.*

Todistus. Olkoon X normiavaruus ja olkoon $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suppeneva jono. Tällöin kaikille funktionaaleille $x' \in X'$ pätee

$$|x'x_k - x'x| = \|x'(x_k - x)\le \|x'\|\|x_k - x\| \to 0\,,$$

kun $k \to \infty$, joten $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suppenee heikosti pisteeseen x. □

[1] Lause 9.6

Esimerkki 11.6. Olkoon $x \in [0,1]$. Esimerkissä 3.11 tarkastimme, että evaluaatiokuvaus $E_x\colon \mathrm{C}^0[0,1] \to \mathbb{R}$,

$$E_x(f) = f(x)$$

on rajoitettu funktionaali, $E_x \in (\mathrm{C}^0[0,1])'$. Jos jono $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $f_k \in \mathrm{C}^0([0,1])$ suppenee heikosti, niin jono $(f_k(x) = E_x f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suppenee kaikilla $x \in [0,1]$. Itse asiassa voidaan osoittaa, että rajoitettu jono avaruudessa $\mathrm{C}^0[0,1]$ suppenee heikosti, jos ja vain jos se suppenee pisteittäin. Tässä käytetään tietoa, että avaruuden $\mathrm{C}^0([0,1])$ duaali on säännöllisten merkillisten Borelin mittojen[2] avaruus. Evaluaatiokuvaus voidaan nimittäin tulkita integraalina Diracin mitan δ_x suhteen:

$$E_x f = \int_{[0,1]} f\,\delta_x\,.$$

Todistus tehdään esimerkiksi lähteessä [Wer, sivu 107].

Lemma 11.7. *Olkoot X ja Y normiavaruuksia ja olkoon $T\colon X \to Y$ rajoitettu operaattori. Olkoot $x_k \in X$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Jos $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x$, niin $Tx_k \xrightarrow[k\to\infty]{} Tx$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lemma 11.8. *Heikosti suppeneva jono on rajoitettu.*

Todistus. Olkoon $(x_k)_{k=1}^\infty$ heikosti suppeneva jono Banachin avaruudessa X. Se määrää jonon $(x_k'')_{k=1}^\infty = (\iota_X x_k)_{k=1}^\infty$ biduaalissa X''. Jokaisella $x' \in X'$ jono $x_k''(x') = x'(x_k)$ suppenee kunnassa $\mathbb{K}$, joten se on rajoitettu. Banachin ja Steinhausin lauseen[3] nojalla jono x_k'' on rajoitettu. Koska kanoninen upotus on isometrinen upotus, on jono x_k myöskin rajoitettu. □

Muistamme topologian kurssilta lähtötopologian määritelmän:

Olkoon $X \neq \emptyset$. Olkoon $A \neq \emptyset$ indeksijoukko ja olkoot (Y_α, τ_α) topologisia avaruuksia. Olkoot $f_\alpha\colon X \to Y_\alpha$ kuvauksia. Kokoelman $\{f_\alpha^{-1}(U) : U \in \tau_\alpha\,, \alpha \in A\}$ virittämä topologia τ^{i} joukossa X on kuvausperheen $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ indusoima topologia eli lähtötopologia.

Propositio 11.9. *Kuvausperheen $f_\alpha\colon X \to (Y_\alpha, \tau_\alpha)$ indusoima topologia on joukon X karkein topologia, jonka suhteen kaikki kuvaukset f_α ovat jatkuvia.*

Todistus. Syksyn 2017 topologian kurssin [Par] Propositio 13.10. □

Olkoon V normiavaruus. Kuvausperheen V' lähtötopologia on avaruuden V heikko topologia. Jos joukolla $A \subset V$ on topologinen ominaisuus P heikon topologian suhteen, niin A on heikosti P.

Esimerkki 11.10. Proposition 11.9 nojalla heikosti avoin joukko on normiavaruuden V avoin joukko ja vastaavasti heikosti suljettu joukko on suljettu. Esimerkki 11.4(2) osoittaa, että suljettu joukko ei aina ole heikosti suljettu.

[2] Menemättä yksityiskohtiin, näille mitoille avoimet joukot ovat mitallisia. Lisäksi mitan variaatiolle $|\mu|(A) = \sup\{\sum |\mu A_i| : A = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n\}$ kompaktien joukkojen mitat ovat äärellisiä ja mitta on sisältyvien kompaktien sup ja sisältävien avoimien inf.

[3] Lause 6.1

Lemma 11.11. *Heikko topologia on Hausdorffin topologia.*

Todistus. Olkoon V normiavaruus ja olkoot $v, w \in V$, $v \neq w$. Hahnin ja Banachin lauseen nojalla[4] on funktionaali $v' \in V$, jolle $v'(v) \neq v'(w)$. Joukot $v'^{-1}B\Big(v, \frac{|v-w|}{2}\Big)$ ja $v'^{-1}B\Big(w, \frac{|v-w|}{2}\Big)$ ovat pisteiden v ja w erilliset ympäristöt. □

Propositio 11.12. *Olkoon V normiavaruus ja olkoot $v_k \in V$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Jono $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suppenee heikosti, jos ja vain jos se suppenee heikossa topologiassa.*

Todistus. Harjoitustehtävä □

Heikon topologian lisäksi avaruuden X duaalissa voidaan tarkastella heikompaa heikko-$*$-suppenemista:

Olkoon X normiavaruus. Jono (x'_k), $x'_k \in X'$, heikko-$*$-suppenee kohti heikko-$*$-raja-arvoa $x' \in X'$, jos $x'_k x \xrightarrow[k\to\infty]{} x'x$ kaikilla $x \in X$. Käytetään merkintää $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{*} x$.

Määritelmän nojalla $x'_k \xrightarrow[k\to\infty]{*} x'$, jos $\iota_X(x)x'_k \to \iota_X(x)x'$ kaikille $x \in X$. Erityisesti siis $x'_k \xrightarrow[k\to\infty]{*} x'$, jos $x'_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x'$.

Esimerkki 11.13. Heikko-$*$-suppeneminen on käyttökelpoinen suppenemiskäsite esimerkiksi säännöllisten merkillisten Borelin mittojen avaruudessa. Mittojen muodostama jono $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee mittaan μ heikko-$*$-mielessä, jos ja vain jos

$$\int \phi \, d\mu_n \to \int \phi \, d\mu$$

kaikille jatkuville kompaktikantajaisille funktioille ϕ.

Olkoot

$$\mu_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \delta_{\frac{k}{n}}$$

mittoja joukossa $[0,1]$. Tällöin kaikille $\phi \in \mathrm{C}^0([0,1])$ pätee

$$\int_{[0,1]} \phi d\mu_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \phi(k) \to \int_{[0,1]} \phi(s) ds\,,$$

kun $n \to \infty$. Siis jono $(\mu_n)n = 1^\infty$ heikko-$*$-suppenee Lebesguen mittaan.

11.3 Refleksiiviset avaruudet

Normiavaruus V on refleksiivinen, jos sen kanoninen upotus $\iota_V \colon V \to V''$ on surjektio.

Lause 11.14. *Hilbertin avaruus on refleksiivinen.*

[4] Harjoitustehtävä 10.3

Todistus. Olkoon H Hilbertin avaruus. Seurauksen 8.23 nojalla H' on Hilbertin avaruus sisätulolla

$$(x' \mid y') = (T^{-1}y' \mid T^{-1}x') .$$

Olkoot $T\colon H \to H'$ ja $T'\colon H' \to H''$ Fréchet'n ja Rieszin esityslauseen[5] isometriat. Erityisesti siis kaikille $x, y \in H$ pätee

$$T'(Ty)(Tx) = (Tx \mid Ty)' .$$

Olkoon $h'' \in H''$. Koska T ja T' ovat erityisesti bijektioita, on $h \in H$, jolle $T'Th = h''$. Tällöin kaikille $x \in H$ pätee

$$h''(Tx) = T'Th(Tx) = (Tx \mid Th)' = (h \mid x) = (Tx)h ,$$

joten $h'' = \iota_H h$. □

Seuraava tulos kokoaa refleksiivisten avaruuksien perusasioita:

Propositio 11.15. *(1) Jos V on refleksiivinen, niin kanoninen upotus ι_V on isometria.*

(2) Refleksiivinen avaruus on Banachin avaruus.

(3) Jos X ja Y ovat isometrisiä Banachin avaruuksia ja Y on refleksiivinen, niin X on refleksiivinen.

Todistus. (1) seuraa Propositiosta 11.1 ja refleksiivisyyden määritelmästä.

(2) Biduaali on Banachin avaruus Seurauksen 4.8 nojalla ja V on isometrisesti isomorfinen biduaalinsa kanssa kohdan (1) nojalla.

(3) Olkoon $j\colon X \to Y$ isometria. Tällöin saadaan isometriat $j'\colon Y' \to X'$ ja $j''\colon X'' \to Y''$, jotka määritellään asettamalla

$$j'(y')x = y'(jx)$$

kaikilla $x \in X$ ja

$$j''(x'')(y') = x''(j'y')$$

kaikilla $y' \in Y'$.

Oletetaan, että X on refleksiivinen. Olkoon $y_0'' \in Y''$ ja olkoon $y_0 = j\iota_X^{-1}(j'')^{-1}y_0''$. Osoitamme, että $\iota_Y y_0 = y_0''$. Tällöin

$$\iota_Y y_0(y') = y'y_0 = y'j\iota_X^{-1}(j'')^{-1}y_0'' = j'y'(\iota_X^{-1}(j'')^{-1}y_0'') = (j'')^{-1}y_0''(j'y') = y_0''(y') ,$$

mistä väite seuraa. Siis Y on refleksiivinen. □

Esimerkki 11.16. (1) Äärellisulotteiset Banachin avaruudet ovat refleksiivisiä Esimerkin 3.3 nojalla.

(2) Lauseen 4.15 nojalla samastamme vastaisuudessa avaruudet $(\ell^p(\mathbb{K}))'$ ja $\ell^{p'}(\mathbb{K})$, kun $1 \le p < \infty$. Ajattelemme siis, että $\omega' \in \ell^{p'}(\mathbb{K})$ vastaa rajoitettua funktionaalia $\omega' \in (\ell^p)(\mathbb{K})'$,

$$\omega'(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega'(k)\,\omega(k) .$$

[5] Lause 8.21

Tällä samastuksella kanoninen upotus ι on identtinen kuvaus, joten Lauseen 4.15 nojalla avaruudet $\ell^p(\mathbb{K})$ ovat refleksiivisiä, kun $1 < p < \infty$.

(3) Avaruudet $c_0(\mathbb{K})$ ja $\ell^1(\mathbb{K})$ eivät ole refleksiivisiä. Kuten kohdassa (2) saamme isometriset upotukset $\iota\colon c_0(\mathbb{K}) \to \ell^\infty(\mathbb{K}) = c_0(\mathbb{K})''$ ja $\iota\colon \ell^1(\mathbb{K}) \to \ell^\infty(\mathbb{K})' = \ell^1(\mathbb{K})''$. Nämä upotukset eivät ole surjektioita koska $c_0(\mathbb{K}) \subset \ell^\infty(\mathbb{K})$ on aito aliavaruus ja koska Hahnin ja Banachin lauseen nojalla nähtiin Esimerkissä 10.12, että separoitumattomana avaruutena $\ell^\infty(\mathbb{K})'$ on suurempi kuin separoituva $\ell^1(\mathbb{K})$.

Propositio 11.17. *Refleksiivisen avaruuden suljetut aliavaruudet ovat refleksiivisiä.*

Todistus. Olkoon X refleksiivinen ja olkoon U sen suljettu aliavaruus. Olkoon $u'' \in U''$. Määritellään lineaarikuvaus $\widetilde{u}''\colon X' \to \mathbb{K}$ asettamalla

$$\widetilde{u}''(x') = u''(x'|_U)\,.$$

Tällöin

$$|\widetilde{u}''(x')| = |u''(x'|_U)| \leq \|u''\|\|x'|U\| \leq \|u''\|\|x'\|\,,$$

joten $\widetilde{u}'' \in X''$.

Koska X on refleksiivinen, on $u \in X$, jolle $\iota(u) = \widetilde{u}''$, siis $x'(u) = \widetilde{u}''(x')$ kaikille $x' \in X'$. Jos $u \in X - U$, niin Proposition 10.10 nojalla olisi $y' \in X'$, jolle $y'(u) = 1$ ja $y'|U = 0$. Mutta tällöin $0 = u''(y'|_U) = \widetilde{u}''(y') = y'(u) = 1$, joten $u \in U$.

Vielä on näytettävä, että $u'' = \iota u$. Olkoon $u' \in U'$ ja olkoon x' jokin sen normin säilyttävä jatko. Tällöin

$$u''(u') = u''(x'|_U) = \widetilde{u}''(x') = x'(u) = u'(u) = \iota_X u(u')\,,$$

joten $u'' = \iota_X u$. □

Lause 11.18. *Banachin avaruus on refleksiivinen jos ja vain jos sen duaali on refleksiivinen.*

Todistus. Olkoon X refleksiivisen avaruus. Olkoon $x''' \in X'''$. Määritellään kuvaus $x'\colon X \to \mathbb{K}$ asettamalla $x'(x) = x'''(\iota_X x)$. Tällöin x' on lineaarinen ja $|x'(x)| \leq \|x'''\|\|x\|$, joten $x' \in X'$.

Olkoon $x'' \in X''$. Koska X on refleksiivinen, on $x \in X$, jolle $\iota_X x = x''$. Siispä

$$x'''(x'') = x'''(\iota_X x) = x'(x) = \iota_X x(x') = x''(x') = \iota_{X'} x'(x'')\,,$$

joten $x''' = \iota_{X'} x'$ ja X' on refleksiivinen.

Jos X' on refleksiivinen, niin edellä osoitetun nojalla X'' on refleksiivinen. Aliavaruus $\iota_X(X)$ suljettu, joten se on refleksiivinen. Banachin avaruus X on isometrisesti isomorfinen avaruuden $\iota_X X$ kanssa, joten myös X on refleksiivinen. □

Esimerkki 11.19. $\ell^\infty(\mathbb{K})$ ei ole refleksiivinen ei ole refleksiivinen koska se on avaruuden $\ell^1(\mathbb{K})$ duaali ja $\ell^1(\mathbb{K})$ ei ole refleksiivinen.

Lause 11.20. *Refleksiivinen avaruus on separoituva jos ja vain jos sen duaali on separoituva.*

Todistus. Väitteen toinen suunta saadaan suoraan Propositiosta 10.11. Oletetaan sitten, että X on refleksiivinen ja separoituva. Tällöin X'' on isometrinen avaruuden X kanssa, siis se on separoituva. Lauseen 10.11 nojalla X' on separoituva. □

Kompaktisuus on usein käytökelpoinen ominaisuus. Lauseessa 2.28 osoitimme, että normiavaruuden suljettu yksikköpallo on kompakti täsmälleen, jos avaruus on äärellisulotteinen. Normin ja metriikan suhteen kompaktien joukkojen kokoelma on siis melko niukka.

Lause 11.21. *Refleksiivisen avaruuden suljettu yksikköpallo on heikosti jonokompakti.*[6]

Todistus. Oletetaan ensin, että X on lisäksi separoituva, jolloin Lauseen 11.20 nojalla X' on separoituva. Olkoon $\{x'_k : k \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ tiheä osajoukko avaruudessa X'.

Olkoon $x_{0k} = x_k$ jono suljetun yksikköpallon pisteitä.Tällöin jono $(x'_1 x_{0k}) \in \mathbb{K}$ on rajoitettu, joten sillä on suppeneva osajono $x'_1 x_{1k}$. Induktiivisesti jonolla x_{nk} on osajono $x_{(n+1)k}$, jolle $(x'_(n+1)x_{(n+1)k})$ suppenee. Siis jonolla x_k on osajono $y_j = x_{jj}$, jolle $(x'_k y_j)_j$ suppenee kaikilla k.

Olkoon $x' \in X'$ ja $\epsilon > 0$. Tällöin on x'_k, jolle $\|x' - x'_k\| < \epsilon$. Siispä

$$\begin{aligned}|x'y_n - x'y_m| &\le |x'y_n - x'_k y_n + x'_k y_n - x'_k y_m + x'_k y_m - x'y_m| \\ &\le |x'y_n - x'_k y_n| + |x'_k y_n - x'_k y_m| + |x'_k y_m - x'y_m| \\ &\le \|x' - x'_k\| + |x'_k y_n - x'_k y_m| + \|x'_k - x'\| < 3\,\epsilon\,,\end{aligned}$$

kun n, m ovat riittävän suuria. Siis $(x'y_k)_{k=1}^{\infty}$ suppenee kaikilla $x' \in X'$.

On vielä osoitettava, että jono y_k suppenee heikosti kohti jotain $y \in \overline{B}(0,1) \subset X$. Tässä käytetään refleksiivisyyttä. Määritellään kuvaus $y'' \colon X' \to \mathbb{K}$ asettamalla kaikille $x' \in X'$

$$y''(x') = \lim_{k\to\infty} x'y_k\,.$$

Tämä kuvaus on hyvin määritelty, koska jono on suppeneva, lineaarisuus on selvä. Osoitetaan, että $y'' \in X''$: Olkoon $x' \in X'$. Tällöin

$$|y''(x')| = \lim_{k\to\infty} |x'y_k| \le \|x'\|\,,$$

joten $\|y''\| \le 1$. Olkoon $y = \iota_X^{-1} y'' \in X$. Koska ι_X on isometria, $\|y\| \le 1$. Edellisen perusteella pätee

$$\lim_{k\to\infty} x'y_k = y''(x') = x'\iota_X^{-1}y'' = x'y\,,$$

joten $y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} y$.

Tarkastellaan sitten yleistä tapausta. Rajoitettu jono x_k on rajoitettu separoituvassa ja Proposition 11.17 nojalla refleksiivisessä aliavaruudessa

$$Y = \overline{\langle x_k : k \in \mathbb{N} \rangle}\,,$$

joten on jonon $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ osajono $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ $x \in Y$ siten, että $y'y_j \to y'x$ kaikille $y' \in Y'$. Mutta $x'|_Y \in Y'$ kaikille $x' \in X'$, joten $x'y_j \to x'x$ kaikille $x' \in X'$. □

[6]Eberleinin ja Šmuljanin lauseen [Wer, Satz VIII.6.1] nojalla heikossa topologiassa kompaktius ja jonokompaktius ovat ekvivalentteja.

Seuraus 11.22. *Hilbertin avaruuden jokaisella rajoitetulla jonolla on heikosti suppeneva osajono.*

Todistus. Väite seuraa Lauseesta 11.21, koska Lauseen 11.14 nojalla Hilbertin avaruudet ovat refleksiivisiä. □

Normiavaruuden X jono (x_k) on heikko Cauchyn jono, jos $(x'x_k)$ on Cauchyn jono kaikille $x' \in X'$. Sanotaan, että normiavaruus on heikosti täydellinen, jos jokainen heikko Cauchyn jono suppenee heikosti.

Seuraus 11.23. *Refleksiivinen avaruus on heikosti täydellinen.*

Todistus. Kuten Lemmassa 11.8 nähdään, että heikko Cauchyn jono $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ on rajoitettu. Lauseen 11.21 nojalla sillä on heikosti suppeneva osajono $(x_{k_j})_{j=1}^{\infty}$. Koska kaikki jonot $(y'x_k)_{k=1}^{\infty}$ ovat Cauchyn jonoja, kun $y' \in Y'$, ne suppenevat kunnassa $\mathbb{K}$ samaan raja-arvoon kuin osajonot $(y'x_{k_j})_{j=1}^{\infty}$. Siis jono $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ suppenee heikosti. □

Harjoitustehtäviä

11.1. Anna esimerkki funktionaalista $f \in \ell^1(\mathbb{K})'' - \iota_{\ell^1(\mathbb{K})}(\ell^1(\mathbb{K}))$. [7]

11.2. Osoita, että heikosti suppenevan jonon heikko raja-arvo on yksikäsitteinen.[8]

11.3. Olkoot $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)})$, $x_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \ldots, x_k^{(n)}) \in (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Osoita, että $x_k \xrightharpoonup[k\to\infty]{} x$, jos ja vain jos $x_k^{(j)} \xrightarrow[k\to\infty]{} x^{(j)}$ kaikilla $1 \le j \le n$, jos ja vain jos $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x$.[9]

11.4. Olkoon X Banachin avaruus ja olkoon $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heikosti suppeneva jono, jonka heikko raja-arvo on $x \in X$. Osoita, että $x \in \overline{\langle x_k : k \in \mathbb{N}\rangle}$

11.5. Olkoon H Hilbertin avaruus ja olkoon $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ ortonormaali joukko. Osoita, että jono $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suppenee heikosti.

11.6. Olkoot X ja Y normiavaruuksia. Olkoon $T \in \mathrm{Lin_b}(X, Y)$ ja olkoot $x_k \in X$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Oletetaan, että $x_k \xrightharpoonup[k\to\infty]{} x$. Osoita, että $Tx_k \xrightharpoonup[k\to\infty]{} Tx$.[10]

11.7. Olkoon X normiavaruus. Osoita, että kompakti joukko $K \subset X$ on heikosti jonokompakti mutta heikosti jonokompakti joukko $M \subset X$ ei aina ole kompakti.

11.8. Olkoon V normiavaruus ja olkoot $v_k \in V$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Osoita, että jono $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suppenee heikosti, jos ja vain jos se suppenee heikossa topologiassa.

11.9. Osoita, että heikko Cauchyn jono on rajoitettu.

11.10. Olkoon X normiavaruus ja olkoot $x_k \in X$, $k \in \mathbb{N}$ siten, että $x_k \xrightharpoonup[k\to\infty]{} x \in X$. Osoita, että $\|x\| \le \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|$.

---

[7] Muista, että $\ell^1(\mathbb{K})'$ on isometrisesti isomorfinen avaruuden $\ell^\infty(\mathbb{K})$ kanssa. Esimerkistä 3.7 ja Hahnin ja Banachin lauseesta voi olla hyötyä.

[8] Hahnin ja Banachin lauseen Seuraus.

[9] Lukujen 2.4 ja 3.1 tuloksista on apua.

[10] Jos $g \in Y'$, niin $g \circ T \in X'$.

Luku 12

Rajoitettujen operaattorien spektri

Tässä luvussa aloitamme tutustumisen spektraaliteoriaan, joka yleistää ominaisarvoteorian äärettönulotteisten normiavaruuksien tilanteeseen.

12.1 Spektri

Olkoon V $\mathbb{K}$-vektoriavaruus ja olkoon $L\colon V \to V$ lineaarikuvaus. Jos on $v \in V - \{0\}$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, joille pätee

$$Lv = \lambda v\,,$$

niin λ on lineaarikuvauksen L ominaisarvo ja v on sitä vastaava ominaisvektori.

Esimerkki 12.1. (1) Jos V on äärellisulotteinen vektoriavaruus ja $T \in \mathrm{Lin}(V, V)$, niin T on surjektio, jos ja vain jos se on injektio. Tällöin siis $\lambda \in \mathbb{K}$ on lineaarikuvauksen $L \in \mathrm{Lin}(V, V)$ ominaisarvo, jos ja vain jos $\lambda\,\mathrm{id} - L$ ei ole injektio, jos ja vain jos $\lambda\,\mathrm{id} - L$ ei ole surjektio.

(2) Analyysin kursseilla on osoitettu, että derivaattaoperaattori $D\colon \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$, $Df(x) = f'(x)$ on lineaarikuvaus. Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$. Tällöin $D\,e^{\lambda x} = \lambda\,e^{\lambda x}$. Funktio $x \mapsto e^{\lambda x}$ on siis lineaarikuvauksen D ominaisvektori ominaisarvolla λ. Operaattori D on surjektio mutta sen ydin koostuu vakiofunktioista ja on siis 1-ulotteinen aliavaruus.

Olkoon V $\mathbb{K}$-vektoriavaruus ja olkoon $\lambda \in \mathbb{K}$. Merkitsemme kuvausta $\lambda\,\mathrm{id}$ lyhyemmin λ.

Olkoon X Banachin avaruus ja olkoon $T\colon X \to X$ rajoitettu operaattori. Operaattorin T resolventtijoukko $\mathrm{res}(T)$ on niiden $\lambda \in \mathbb{K}$ joukko, joille operaattori $\lambda - T$ on kääntyvä.[a] Operaattorin T spektri on

$$\mathrm{spec}(T) = \mathbb{K} - \mathrm{res}(T)\,.$$

[a] Usein vaaditaan myös, että $(\lambda - T)^{-1}$ on rajoitettu. Koska X on Banach, rajoitetun operaattorin käänteiskuvaus on rajoitettu Avoimen kuvauksen lauseen nojalla, katso Seuraus 6.8.

Propositio 12.2. *Olkoon T Banachin avaruuden X rajoitettu operaattori. Tällöin*

$$\mathbb{K} - \overline{B}(0, \|T\|) \subset \operatorname{res} T\,.$$

Todistus. Jos $|\lambda| > \|T\|$, niin Lauseen 6.11 nojalla Neumannin sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^k$$

suppenee ja

$$(\lambda - T)^{-1} = \lambda^{-1}\left(\operatorname{id} - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^k,$$

joten operaattori $\lambda - T$ on bijektio suurilla $|\lambda|$. □

Lause 12.3. *Olkoon X Banachin avaruus ja olkoon $T \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{b}}(X, X)$. Tällöin operaattorin T resolventtijoukko on avoin ja spektri on kompakti,* $\operatorname{spec} T \subset \overline{B}(0, \|T\|)$*.*

Todistus. Olkoon $\lambda_0 \in \operatorname{res} T$ ja olkoon $\lambda \in \mathbb{K}$ siten, että $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(\lambda_0 - T)^{-1}\|}$. Kirjoitetaan

$$\lambda - T = (\lambda_0 - T) \circ (\operatorname{id} - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - T)^{-1})\,. \tag{12.1}$$

Koska $\|(\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - T)^{-1}\| < 1$, niin Lauseen 6.11 mukaan $\operatorname{id} - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - T)^{-1}$ on rajoitettu bijektio ja sen käänteiskuvaus saadaan suppenevasta Neumannin sarjasta

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big((\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - T)^{-1}\Big)^k$$

Yhtälön (12.1) nojalla $\lambda - T$ on kahden bijektion yhdistetty kuvaus, siis bijektio. Erityisesti

$$(\lambda - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k ((\lambda_0 - T)^{-1})^{k+1}\,.$$

Proposition 12.2 nojalla spektri on rajoitettu ja sen kompaktius seuraa, koska edellä osoitettiin, että spektrin komplementti on avoin. □

Operaattorin T spektri koostuu kolmesta erillisestä osajoukosta:

- pistespektri koostuu operaattorin T ominaisarvoista.
- jatkuva spektri koostuu niistä $\lambda \in \mathbb{K}$, joille $\lambda - T$ on injektio mutta ei surjektio ja joille $(\lambda - T)(V)$ on tiheä.
- jäännösspektri koostuu niistä $\lambda \in \mathbb{K}$, joille $\lambda - T$ on injektio mutta $(\lambda - T)(V)$ ei ole tiheä.

Esimerkki 12.4. (a) Integraalifunktion antava operaattori $J\colon \mathrm{C}^0([0,1]) \to \mathrm{C}^0([0,1])$

$$Jf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

on rajoitettu injektio.[1] Sen kuva ei ole tiheä, koska $Jf(0) = 0$ kaikilla f. Siis 0 on operaattorin J jäännösspektrin piste. Olkoon sitten $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ ja tarkastellaan yhtälöä

$$\lambda f - Jf = g\,,$$

eksplisittisesti siis

$$\lambda f(s) - \int_0^s f(t)\,dt = g(s) \tag{12.2}$$

kaikilla $s \in [0,1]$. Merkitään $F = Jf$. Analyysin peruslauseen nojalla yhtälö (12.2) on ekvivalentti alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{F} - \frac{1}{\lambda}F = \frac{1}{\lambda}g \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

kanssa. Tämä alkuarvotehtävä on helppo ratkaista vakion varioinnilla, yksikäsitteinen ratkaisu on

$$F(s) = \frac{1}{\lambda}\, e^{s/\lambda} \int_0^s e^{-t/\lambda} g(t)dt\,.$$

Integraaliyhtälön ratkaisu on siis

$$f(s) = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^s e^{(s-t)/\lambda} g(t)dt + \frac{1}{\lambda} g(s)\,.$$

Siis $\lambda \in \operatorname{res} J$, joten $\operatorname{spec} J = \{0\}$ koostuu pelkästä jäännösspektristä.

(b) Tarkastellaan operaattorin $J\colon \mathrm{C}^0([0,1]) \to \mathrm{C}^0([0,1])$ rajoittumaa aliavaruuteen

$$V = \{f \in \mathrm{C}^0([0,1]) : f(0) = 0\}\,.$$

Huomaa, että rajoittuma antaa selvästi operaattorin $J|_V\colon V \to V$, jolle

$$J|_V(V) = \{f \in V : f'(0) = 0\}\,.$$

Operaattorin $J|_V$ resolventtijoukko on (a)-kohdan nojalla $\mathbb{R} - \{0\}$. Selvästi $J|_V(V) \neq V$ mutta $\overline{J|_V(V)} = V$, joten operaattorin $J|_V$ jatkuva spektri on $\{0\}$. Siis $\operatorname{spec} J = \{0\}$ koostuu pelkästä jatkuvasta spektristä.

12.2 Kompaktit operaattorit

Olkoot X ja Y normiavaruuksia. Operaattori $T\colon X \to Y$ on kompakti, jos $\overline{T(A)}$ on kompakti jokaisella rajoitetulla $A \subset X$. Merkitsemme kompaktien operaattorien joukkoa $\operatorname{Lin}_c(X,Y)$.

Yhtäpitävästi voidaan vaatia, että $\overline{T(B(0,1))}$ on kompakti.

Propositio 12.5. *Kompakti operaattori on rajoitettu.*

Todistus. Harjoitustehtävä ∎

[1] Katso Esimerkki 3.5.

Lemma 12.6. *Olkoot X ja Y normiavaruuksia.*

(1) Olkoon $T \in \mathrm{Lin_b}(X, Y)$. Jos $T(X)$ on äärellisulotteinen, niin T on kompakti.

(2) Jos X on äärellisulotteinen, niin kaikki operaattorit $T \colon X \to Y$ ovat kompakteja.

Todistus. (1) Rajoitettu operaattori kuvaa rajoitetun joukon rajoitetuksi. Äärellisulotteisen avaruuden normi on ekvivalentti euklidisen avaruuden normin kanssa, joten rajoitetun joukon sulkeuma on kompakti.

(2) Seuraa kohdasta (1). □

Esimerkki 12.7. Inkluusiokuvaus $j \colon \mathrm{C}^1([0,1]) \to \mathrm{C}^0([0,1])$ on kompakti. Avaruus $\mathrm{C}^1([0,1])$ on ääretönulotteinen, joten sen yksikköpallo ei ole kompakti. Se koostuu 1-Lipschitz-funktioista: olettamalla $x < y$ saadaan

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_x^y f' \right| \leq \int_x^y |f'| \leq y - x \,.$$

Koska $j(B(0,1)) \subset B(0,1) \subset \mathrm{C}^0([0,1])$, niin Arzelàn ja Ascolin lauseen[2] nojalla $\overline{j(B(0,1))}$ on kompakti.

Lemma 12.8. *Olkoot X ja Y normiavaruuksia ja olkoon $T \in \mathrm{Lin}(X, Y)$. Operaattori T on kompakti, jos ja vain jos kaikille avaruuden X suljetun yksikköpallon jonoille $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ jonolla $(Tx_k)_{k \in \mathbb{N}}$ on suppeneva osajono*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Propositio 12.9. *Olkoot X ja Y normiavaruuksia. Olkoon $T \colon X \to Y$ kompakti operaattori. Jos $x_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} x$, niin $Tx_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} Tx$.*

Todistus. Oletetaan, että $(x_k)_{k=1}^\infty$ on heikosti suppeneva jono, $x_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} x$, ja että jono $(Tx_k)_{k=1}^\infty$ ei suppene pisteeseen Tx. Siis on osajono $(x_{k_j})_{j=1}^\infty$, jolle $\|Tx_{k_j} - Tx\| \geq r$ kaikilla j jollain $r > 0$.

Lemman 11.8 nojalla jono $(x_k)_{k=1}^\infty$ on rajoitettu. Siis Lemman 12.8 nojalla jonolla $(Tx_{k_j})_{j=1}^\infty$ on suppeneva osajono $(Tx_{k_{j_n}})_{n=1}^\infty$, jolle $Tx_{k_{j_n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z \neq Tx$. Lemman 11.5 nojalla $Tx_{k_{j_n}} \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} z \neq Tx$, ristiriita. □

Propositio 12.10. *Olkoot X ja Y Banachin avaruuksia. Tällöin $\mathrm{Lin_c}(X, Y)$ on Banachin avaruuden $\mathrm{Lin_b}(X, Y)$ suljettu aliavaruus. Erityisesti $\mathrm{Lin_c}(X, Y)$ on Banachin avaruus.*

Todistus. Harjoituksissa osoitetaan, että $\mathrm{Lin_c}(X, Y)$ on aliavaruus. Osoitetaan se suljetuksi diagonaalijonomenetelmällä Arzelàn ja Ascolin lauseen todistuksen tapaan. Olkoon T_k jono kompakteja operaattoreita, joille $T_k \to T \in \mathrm{Lin_b}(X, Y)$. Olkoon x_k rajoitettu jono. Koska T_1 on kompakti, jonolla x_k on osajono x_{1k}, jolle $T_1 x_{1k}$ suppenee. Oletetaan, että olemme löytäneet osajonon x_{nk}, jolle $T_n x_{nk}$ suppenee. Koska x_{nk} on rajoitettu, niin sillä on osajono $x_{(n+1)k}$, jolle $T_{n+1} x_{(n+1)k}$ suppenee.

Jono $y_k = x_{kk}$ on alkuperäisen jonon x_k osajono ja indeksistä N eteenpäin myös jonon x_{Nk} osajono. Siis $T_n y_k$ suppenee jokaiselle n. Voimme olettaa, että $\|y_k\| \leq 1$ kaikilla k.

[2]Katso [Par, Lause 10.18].

Valitaan N, jolle $\|T_N - T\| < \epsilon$. Valitaan M, jolle $\|T_N(y_i) - T_N(y_j)\| < \epsilon$, kun $i, j \geq M$. Tällöin

$$\|T(y_i) - T(y_j)\| = \|T(y_i) - T_N(y_i) + T_N(y_i) - T_N(y_j) + T_N(y_j) - T(y_j)\| < 3\epsilon\,.$$

Siis jono $T(y_i)$ on Cauchyn jonona suppeneva. Lemman 12.8 nojalla T on kompakti operaattori. □

Seuraus 12.11. *Olkoot X ja Y Banachin avaruuksia ja olkoot $T_k \colon X \to Y$ rajoitettuja operaattoreita kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Jos $T_k \to T$, kun $k \to \infty$, ja operaattorien T_k kuvajoukot ovat äärellisulotteisia, niin T on kompakti.* □

Lemma 12.12. *Olkoot $S \colon X \to Y$ ja $T \colon Y \to Z$ rajoitettuja operaattoreita. Jos toinen niistä on kompakti, niin $T \circ S$ on kompakti.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 12.13. Integraalifunktion antava operaattori $J \colon \mathrm{C}^0([0,1]) \to \mathrm{C}^0([0,1])$

$$Jf = \int_0^x f(t)\,dt$$

on kompakti Lemman 12.12 nojalla, koska Harjoitustehtävän 3.5 nojalla samalla lausekkeella määritelty kuvaus $J_0 \colon \mathrm{C}^0([0,1]) \to \mathrm{C}^1([0,1])$ on jatkuva ja $J = j \circ J_0$, missä $j \colon \mathrm{C}^1([0,1]) \to \mathrm{C}^0([0,1])$ on Esimerkissä 12.7 tarkasteltu kompakti inkluusiokuvaus.

12.3 Kompaktien operaattorien spektristä

Propositio 12.14. *Olkoon X Banachin avaruus ja olkoon $T \colon X \to X$ kompakti operaattori. Tällöin operaattorin $\mathrm{id} - T$ ydin on äärellisulotteinen.*

Todistus. Olkoon $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $x_k \in \ker(\mathrm{id} - T)$, rajoitettu jono. Tällöin $0 = x_k - Tx_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja jonolla $(Tx_k)_{k\in\mathbb{N}} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on suppeneva osajono $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$. Siis jokaisella aliavaruuden $\ker(\mathrm{id} - T)$ rajoitetulla jonolla on siis suppeneva osajono. Lauseen 2.28 nojalla $\ker(\mathrm{id} - T)$ on äärellisulotteinen. □

Seuraus 12.15. *Olkoon $X \neq \{0\}$ Banachin avaruus ja olkoon $T \in \mathrm{Lin}_c(X)$ kompakti operaattori. Jos $\lambda \neq 0$ on operaattorin T ominaisarvo, niin sitä vastaava ominaisavaruus on äärellisulotteinen.*

Todistus. Väite seuraa Propositiosta 12.14 huomaamalla $\lambda - T = \lambda(\mathrm{id} - \frac{T}{\lambda})$. □

Huomaa, että Seuraus 12.15 koskee nollasta poikkeavia ominaisarvoja, kompaktin operaattorin ydin voi olla hyvinkin suuri eikä sen tarvitse olla edes separoituva. Ääriesimerkki tästä ilmiöstä on 0-operaattori,[3] joka on ilmiselvästi kompakti.

Lause 12.16. *Olkoon X ääretönulotteinen Banachin avaruus. Olkoon $T \colon X \to X$ kompakti operaattori. Tällöin*

(1) $0 \in \operatorname{spec} T$.

(2) $\operatorname{spec} T - \{0\}$ *on numeroituva tai äärellinen ja koostuu ominaisarvoista.*

[3] $x \mapsto 0$ kaikilla x

Todistus. (1) Jos 0 ei ole operaattorin T spektrissä, niin T on rajoitettu bijektio. Seurauksen 6.8 nojalla T^{-1} on rajoitettu. Lemman 12.12 nojalla $\mathrm{id} = T^{-1} \circ T$ on kompakti, mutta tällöin avaruuden X suljettu yksikköpallo on kompakti, joten X on äärellisulotteinen Lauseen 2.28 nojalla.

(2) Katso esimerkiksi [Kre, Theorem 8.4-4] tai [Wer, Satz VI.2.5]. □

Esimerkki 12.17. Olkoon $k \in L^2([0,1] \times [0,1])$. Fubinin lauseen nojalla funktio k_s, $t \mapsto k(s,t)$, on avaruudessa $L^2([0,1])$ melkein kaikilla s. Jos $f \in L^2([0,1])$, niin funktio $F_k f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$F_k f(s) = (k_s \mid f) = \int_0^1 k(s,t) f(t) dt \tag{12.3}$$

on mitallinen. Harjoituksissa osoitamme Fubinin lauseen ja Hölderin epäyhtälön avulla, että yhtälö (12.3) määrittelee rajoitetun lineaarikuvauksen $F_k \colon L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$.

Olkoon $k \in L^2([0,1] \times [0,1])$. Operaattori $F_k \colon L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$,

$$F_k f(s) = \int_0^1 k(s,t) f(t) dt$$

on Hilbertin ja Schmidtin integraalioperaattori, jonka ydin on k.

Propositio 12.18. *Olkoon $k \in L^2([0,1] \times [0,1])$. Hilbertin ja Schmidtin integraalioperaattori $F_k \colon L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ on kompakti.*

Todistus. Mittateorian kurssin keinoilla voi osoittaa, että on $N(n) \in \mathbb{N}$, mitalliset joukot $A_i, B_i \subset [0,1]$ ja vakiot $\alpha_{ij}^{(n)}$, joille yksinkertaiset funktioiden

$$k_n(s,t) = \sum_{i,j=1}^{N(n)} \alpha_{ij}^{(n)} \chi_{A_i}(s) \chi_{B_j}(t)$$

jono suppenee kohti funktiota k avarudessa $L^2([0,1] \times [0,1])$.

Olkoon $f \in L^2([0,1])$. Tällöin

$$\begin{aligned} F_{k_n} f(s) &= \int_0^1 k_n(s,t) f(t) dt = \int_0^1 \sum_{i,j=1}^{N(n)} \alpha_{ij}^{(n)} \chi_{A_i}(s) \chi_{B_j}(t) f(t)\, dt \\ &= \sum_{i,j=1}^{N(n)} \alpha_{ij}^{(n)} \chi_{A_i}(s) \int_0^1 \chi_{B_j}(t) f(t)\, dt \\ &= \sum_{i=1}^{N(n)} \left(\sum_{j=1}^{N(n)} \alpha_{ij}^{(n)}(s) \int_{B_j} f(t)\, dt \right) \chi_{A_i} \in \langle \chi_{A_1}, \dots, \chi_{A_1} \rangle , \end{aligned}$$

joten $F_{k_n}(L^2([0,1]))$ on äärellisulotteinen. Harjoituksissa osoitetaan, että $F_{k_n} f \to F_k f$, kun $n \to \infty$. Väite seuraa siis Seurauksesta 12.11. □

Esimerkki 12.19. Hilbertin ja Schmidtin operaattoreilla on yhteys differentiaaliyhtälöiden kanssa: Tarkastellaan Sturmin ja Liouvillen ongelmaa[4]

$$\begin{cases} \ddot{y} = g \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} . \tag{12.4}$$

[4] Aihetta käsitellään laajemmin esimerkiksi lähteessä [Con, luku 2.6].

Olkoon $G\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$,

$$G(s,t) = \begin{cases} s(t-1)\,, & \text{kun } 0 \le s \le t \le 1 \\ t(s-1)\,, & \text{kun } 0 \le t \le s \le 1 \end{cases} .$$

Funktio y on ongelman (12.4) ratkaisu, jos ja vain jos $y = F_G g$. Jos y on integraaliyhtälön ratkaisu, niin

$$y(0) = \int_0^1 G(0,t)g(t)dt = \int_0^1 0\,dt = 0$$

ja vastaavasti $y(1) = 0$. Muille $0 < s < 1$ pätee

$$y(s) = \int_0^s t(s-1)g(t)dt + \int_s^1 s(t-1)g(t)dt = (s-1)\int_0^s tg(t)dt + s\int_s^1 (t-1)g(t)dt\,.$$

Derivoimalla kahdesti saadaan $\ddot{y} = g$.

Funktiot $t \mapsto \sin(\pi n t)$, $n \in \mathbb{N}$, ovat operaattorin F_G ominaisvektorit ominaisarvoilla $\mu_n = -\frac{1}{(\pi n)^2}$. Lauseen 12.16 nojalla operaattorin F_k spektri on $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

Tarkastellaan sitten hieman yleisempää versiota Sturmin ja Liouvillen ongelmasta

$$\begin{cases} \ddot{y} + \lambda^2\, y = g \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} . \tag{12.5}$$

Alkuarvotehtävä (12.5) on yhtäpitävä operaattoriyhtälön

$$(\mathrm{id} - \lambda^2 F_G)y = F_G g$$

kanssa. Jos $\lambda^{-2} \in \operatorname{res} F_G$, niin ratkaisuksi saadaan

$$y = (\mathrm{id} - \lambda^2 F_G)^{-1} F_G g\,.$$

Harjoitustehtäviä

Olkoot $\sigma, \rho\colon \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C})$ vasen ja oikea siirto, jotka määritellään asettamalla

$$\sigma\omega(k) = \omega(k+1)$$
$$\rho\omega(k) = \begin{cases} 0 & \text{, kun } k = 0 \\ \omega(k-1) & \text{, kun } k \ge 1 \end{cases} .$$

kaikille $\omega \in \ell^2(\mathbb{C})$

12.1. Osoita, että $\|\sigma\| = \|\rho\| = 1$

12.2. Määritä $\operatorname{spec}(\sigma)$.[5]

12.3. (a) Osoita, että $\rho - \lambda\,\mathrm{id}$ on injektio kaikilla $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) Osoita, että $\rho - \lambda\,\mathrm{id}$ ei ole surjektio, jos $\lambda \in \mathbb{C}$ ja $|\lambda| \le 1$.[6]

(c) Määritä $\operatorname{spec}(\rho)$.

[5] Tehtävä 1.9 auttaa.

[6] Osoita, että e_0 ei ole kuvajoukossa.

12.4. Olkoon
$$V = \{f \in \mathrm{C}^0([0,1]) : f(0) = 0\}\,.$$
Osoita, että
$$W = \{f \in V : f'(0) = 0\}$$
on tiheä aliavaruus.[7]

12.5. Olkoon X normiavaruus ja olkoon $T \in \mathrm{Lin}(X,X)$. Osoita, että T on kompakti, jos ja vain jos kaikille avaruuden X suljetun yksikköpallon jonoille $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jonolla $(Tx_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on suppeneva osajono.

12.6. Olkoot X ja Y normiavaruuksia ja olkoon X äärellisulotteinen. Osoita, että kaikki operaattorit $T\colon X \to Y$ ovat kompakteja.

12.7. Osoita, että kompakti operaattori on rajoitettu.

12.8. Olkoot X ja Y normiavaruuksia. Osoita, että kompaktit operaattorit $T\colon X \to Y$ muodostavat avaruuden $\mathrm{Lin}_\mathrm{b}(X,X)$ aliavaruuden. [8]

Olkoot $S\colon X \to Y$ ja $T\colon Y \to Z$ rajoitettuja operaattoreita.

12.9. Oletetaan, että S tai T on kompakti. Osoita, että $T \circ S$ on kompakti.

12.10. Päteekö väite: Jos $T \circ S$ on kompakti, niin S tai T on kompakti?

12.11. Olkoon $T\colon \ell^2(\mathbb{K}) \to \ell^2(\mathbb{K})$ lineaarikuvaus, joka määritellään asettamalla
$$(T\omega)(k) = \frac{\omega(k)}{k+1}$$
jokaiselle $\omega \in \ell^2(\mathbb{K})$ ja jokaiselle $k \in \mathbb{N}$. Osoita, että operaattori T on kompakti.[9]

Olkoon $k \in L^2([0,1]\times[0,1])$. Asetetaan
$$F_k f(s) = \int_0^1 k(s,t) f(t)\,dt$$
kaikille $f \in L^2([0,1])$.

12.12. Osoita, että $F_k\colon L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ on rajoitettu lineaarikuvaus.[10]

12.13. Olkoot $h_j \in L^2([0,1]\times[0,1])$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ siten, että $h_j \to h \in L^2([0,1]\times[0,1])$, kun $j \to \infty$. Osoita, että $F_{h_j} f \to F_h f$, kun $j \to \infty$.[11]

[7] Arvioi avaruuden V alkiota polynomilla tai trigonometrisellä polynomilla Weierstrassin approksimointilauseen (Lause 2.16) tai Weierstrassin trigonometrisen approksimointilauseen (Lause 9.25) avulla ja korjaa derivaatta nollaksi kertomalla "sileällä porrasfunktiolla".

[8] Lemma 12.8 auttaa.

[9] Seuraus 12.11 auttaa.

[10] Laske $\|F_k f\|_2^2$.

[11] Tehtävästä 12.12 on apua.

Luku 13

Hermiten operaattorit

Kurssin viimeisessä luvussa tarkastelemme rajoitettuja lineaarikuvauksia Hilbertin avaruudesta itseensä. Määrittelemme Fréchet'n ja Rieszin esityslauseen avulla Hilbertin avaruuden rajoitetun operaattorin adjungaatit ja tarkastelemme Hermiten operaattoreita, jotka ovat omia adjungaattejaan. Lopuksi todistamme kompaktien Hermiten operaattorien spektraalilauseen, jossa operaattorin arvot saadaan sen ominaisarvojen avulla muodostetusta sarjasta.

13.1 Hilbertin avaruuden operaattorin adjungaatti

Olkoon H Hilbertin avaruus ja olkoon $T \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{b}}(H, H)$ ja olkoon $y \in H$. Tällöin kuvaus $h = h_{T,y} \colon H \to \mathbb{K}$, $h(x) = (Tx \mid y)$ on rajoitettu funktionaali. Lineaarisuus on selvää ja lisäksi pätee

$$|h(x)| = |(Tx \mid y)| \leq \|T\| \, \|x\| \, \|y\|$$

joten h on rajoitettu ja

$$\|h\| \leq \|T\| \, \|y\| \, .$$

Siis Fréchet'n ja Rieszin esityslauseen[1] nojalla on yksikäsitteinen $z_T \in H$, jolle $\|z_T\| = \|h\|$ ja

$$(Tx \mid y) = (x \mid z_T)$$

kaikilla $x \in H$. Voimme siis määritellä kuvauksen $T^\dagger \colon H \to H$ asettamalla $T^\dagger y = z_T$. Tällöin kaikille $x, y \in H$ pätee

$$(Tx \mid y) = (x \mid T^\dagger y) \, .$$

Olkoon H Hilbertin avaruus ja olkoon $T \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{b}}(H, H)$. Kuvaus $T^\dagger \colon H \to H$ on operaattorin T (Hilbertin avaruuden) adjungaatti.

[1] Lause 8.21

Esimerkki 13.1. (1) Olkoon $H = (\mathbb{R}^n, (\cdot \mid \cdot))$ euklidinen avaruus standardisisätulolla varustettuna ja olkoon $L \in \mathrm{Lin_b}(H, H)$. Jos $Lx = Ax$ matriisille A, niin

$$(Lx \mid y) = (Ax)^T y = x^T A^T y = (x \mid L^\dagger y)\,,$$

joten adjungaatin $L^\dagger$ matriisi on A^T. Vastaavasti standardisisätulolla varustetun kompleksisen vektoriavaruuden $\mathbb{C}^n$ operaattorin L adjungaatin matriisi on operaattorin L matriisin konjugaattitranspoosi.
(2) Operaattorin $F_k\colon L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$,

$$F_k f(s) = \int_0^1 k(s,t) f(t) dt$$

adjungaatti on $F_{k^\dagger}$, missä $k^\dagger(s,t) = k(t,s)$ kaikilla $s, t \in [0,1]$.

Lemma 13.2. *Olkoon H Hilbertin avaruus*
(1) Jos $T \in \mathrm{Lin_b}(H,H)$, niin $T^\dagger \in \mathrm{Lin_b}(H,H)$ ja $\|T^\dagger\| = \|T\|$.
(2) Kuvaus $^\dagger\colon \mathrm{Lin_b}(H,H) \to \mathrm{Lin_b}(H,H)$, $T \mapsto T^\dagger$, on konjugaattilineaarinen.
(3) $^\dagger \circ {}^\dagger = \mathrm{id}$.
(4) Jos $S, T \in \mathrm{Lin_b}(H,H)$, niin $(S \circ T)^\dagger = T^\dagger \circ S^\dagger$.

Todistus. (1) Edellä näimme, että $\|T^\dagger y\| = \|h\| \le \|T\|\|y\|$, joten $\|T^\dagger\| \le \|T\|$. Epäyhtälö toiseen suuntaan seuraa kohdasta (3).
(2) ja (3) Harjoitustehtävä.
(4) $(S \circ Tx \mid y) = (Tx \mid S^\dagger y) = (x \mid T^\dagger \circ S^\dagger y)$ kaikilla $x, y \in H$.

□

Lemma 13.3. *Olkoon H Hilbertin avaruus ja olkoon $T \in \mathrm{Lin_b}(H,H)$. Tällöin*

$$\ker T = T^\dagger(H)^\perp\,.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Seuraus 13.4. *Olkoon H Hilbertin avaruus ja olkoon $T \in \mathrm{Lin_b}(H,H)$. Tällöin $\overline{T(H)} = H$, jos ja vain jos $\ker T^\dagger = \{0\}$.*

Todistus. Seurauksen 8.18, Lemman 13.2 ja Lemman 13.3 nojalla aliavaruus $T(H)$ on tiheä, jos ja vain jos $\ker T = T(H)^\perp = \{0\}$. □

Jos $F\colon X \to X$ on joukon X kuvaus, sanotaan, että joukko $A \subset X$ on F-invariantti, jos $F(A) \subset A$.

Seuraava pieni havainto osoittautuu hyödylliseksi:

Lemma 13.5. *Olkoon $T\colon H \to H$ Hilbertin avaruuden H rajoitettu operaattori. Jos V on T-invariantti, niin $V^\perp$ on $T^\dagger$-invariantti.*

Todistus. Olkoon $v \in A$ ja olkoon $w \in A^\perp$. Jos $Tv \in A$ kaikilla $v \in A$, niin

$$0 = (Tv, w) = (v, T^\dagger w)\,,$$

joten $T^\dagger w \in A^\perp$ kaikilla $w \in A^\perp$. □

13.2 Hermiten operaattorit

Olkoon H Hilbertin avaruus. Operaattori $T\colon H \to H$ on hermiittinen tai Hermiten operaattori[a], jos $T^\dagger = T$.

[a]joskus itseadjungoitu tai symmetrinen

Operaattori T on siis Hermiten operaattori, jos ja vain jos

$$(x \mid Ty) = (Tx \mid y)$$

kaikille $x, y \in H$.

Esimerkki 13.6. (1) Standardisisätulolla varustetun avaruuden $\mathbb{R}^n$ operaattori T on Hermiten operaattori, jos ja vain jos sen matriisi on symmetrinen. Vastaavasti avaruuden $\mathbb{C}^n$ operaattori on Hermiten operaattori, jos ja vain jos sen matriisi on konjugaattisymmetrinen.

(2) Ortogonaaliprojektio suljetulle aliavaruudelle on Hermiten operaattori Proposition 8.16(4) nojalla.

(3) Luvussa 12.3 tarkasteltu Hilbertin ja Schmidtin operaattori F_k on Hermiten operaattori, jos ja vain jos $k(s,t) = \overline{k(t,s)}$ kaikille $s, t \in [0,1]$.

Propositio 13.7. *Hilbertin avaruuden H Hermiten operaattorit muodostavat normiavaruuden $\mathrm{Lin_b}(H,H)$ suljetun reaalisen aliavaruuden.*

Todistus. Harjoitustehtävä □

Lemma 13.8. *Kompleksisen Hilbertin avaruuden operaattori T on Hermiten operaattori, jos ja vain jos $(Tz \mid z)$ on reaalinen kaikilla $z \in H$.*

Todistus. Jos T on Hermiten operattori, niin kaikille $z \in H$ pätee

$$(Tz \mid z) = (z \mid Tz) = \overline{(Tz \mid z)}\,,$$

joten $(Tz \mid z) \in \mathbb{R}$.

Jos kaikille $z \in H$ pätee $(Tz \mid z) \in \mathbb{R}$, niin

$$(Tz \mid z) = \overline{(Tz \mid z)} = \overline{(z \mid T^\dagger z)} = (T^\dagger z \mid z)\,,$$

joten $((T - T^\dagger)z \mid z) = 0$ kaikille $z \in H$. Harjoituksissa osoitetaan, että tästä seuraa $T - T^\dagger = 0$. □

Lemman 13.8 väite ei päde reaalisessa Hilbertin avaruudessa, muutenhan kaikki reaalisen Hilbertin avaruuden operaattorit olisivat Hermiten operaattoreita.

Propositio 13.9. *Olkoon $T\colon H \to H$ Hermiten operaattori. Tällöin*

$$\|T\| = \sup_{x \le 1} |(Tx \mid x)|\,.$$

Todistus. Cauchyn epäyhtälön ja operaattorinormin määritelmän nojalla

$$|(Tx \mid x)| \leq \|Tx\|\|x\| \leq \|T\|\|x\|^2$$

kaikille x, joten

$$\|T\| \geq \sup_{x \leq 1} |(Tx \mid x)| \,.$$

Vastakkaisen epäyhtälön todistuksessa lasketaan

$$\Big(T(x+y) \mid x+y\Big) - \Big(T(x-y) \mid x-y\Big) = 2(Tx \mid y) + 2(Ty \mid x) = 4\,\mathrm{Re}\,(Tx \mid y)$$

kaikille x, y. Siis

$$4\,\mathrm{Re}\,(Tx \mid y) \leq \sup_{\|z\|=1} |(Tz \mid z)| \Big(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\Big) = 2 \sup_{\|z\|=1} |(Tz \mid z)|(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

suunnikassäännön nojalla. Siis kaikilla x, y, joille $\|x\|, \|y\| \leq 1$, pätee

$$\mathrm{Re}\,(Tx \mid y) \leq \sup_{\|z\|=1} |(Tz \mid z)| \,.$$

Valinnalla $y = \frac{Tx}{\|T\|}$ saadaan

$$\frac{1}{\|T\|}(Tx \mid Tx) = \mathrm{Re}\left(Tx \,\middle|\, \frac{Tx}{\|T\|}\right) \leq \sup_{\|z\|=1} |(Tz \mid z)|$$

mistä väite seuraa. □

Lause 13.10 (Hellingerin ja Toeplitzin lause)**.** *Olkoon H Hilbertin avaruus ja olkoon $T\colon H \to H$ operaattori, jolle pätee $(Tx \mid y) = (x \mid Ty)$ kaikilla $x, y \in H$. Tällöin T on rajoitettu. Erityisesti se on Hermiten operaattori.*

Todistus. Oletetaan, että $T\colon H \to H$ ei ole rajoitettu. Tällöin on vektorit $y_k \in H$, joille pätee $\|y_k\| = 1$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $\|Ty_k\| \to \infty$, kun $k \to \infty$. Määritellään funktionaalit $f_k\colon H \to \mathbb{K}$ asettamalla

$$f_k(x) = (Tx \mid y_k) = (x \mid Ty_k)$$

kaikille $x \in H$. Funktionaali f_k on rajoitettu Cauchyn epäyhtälön nojalla

$$|f_k(x)| = |(x \mid Ty_k)| \leq \|Ty_k\|\,\|x\|$$

kaikille $x \in H$. Toisaalta jokaiselle $x \in H$ pätee Cauchyn epäyhtälön nojalla

$$|f_k(x)| = |(Tx \mid y_k)| \leq \|Tx\|\|y_k\| = \|Tx\| \,.$$

Banachin ja Steinhausin lauseen[2] nojalla on $M > 0$ siten, että $\|f_k\| \leq M$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Siispä

$$\|Ty_k\|^2 = (Ty_k \mid Ty_k) = |f_k(Ty_k)| \leq M\|Ty_k\| \,,$$

joten $\|Ty_k\| \leq M$ kaikilla k. Mutta tämä on ristiriita. □

[2] Lause 6.1

13.3 Hermiten operaattoreiden spektraaliteoriaa

Osoitamme tässä luvussa, että Hilbertin avaruuden kompaktit Hermiten operaattorit voidaan kuvata ominaisarvojensa avulla. Tätä tulosta varten tarvitsemme muutaman aputuloksen.

Propositio 13.11. *Hermiten operaattorin ominaisarvot ovat reaalisia. Eri ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat ortogonaalisia.*

Todistus. Olkoon x operaattorin T ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori. Tällöin

$$\lambda(x \mid x) = (Tx \mid x) = (x \mid Tx) = \overline{(Tx \mid x)} = \overline{\lambda}(x \mid x)\,,$$

mistä väite seuraa supistamalla reaaliluvulla $(x \mid x) \neq 0$.

Toinen väite todistetaan samaan tapaan: Olkoot $\lambda \neq \mu$ Hermiten operaattorin T ominaisarvoja ja olkoot $x, y \in H - \{0\}$ ominaisvektoreita, joille $Tx = \lambda\,x$ ja $Ty = \mu\,y$. Tällöin

$$\lambda(x \mid y) = (Tx \mid y) = (x \mid Ty) = \mu(x \mid y)\,,$$

mistä saadaan $(x \mid y) = 0$. □

Lineaarialgebran kursseilta muistamme, että ominaisarvojen ortogonaalisuus ei päde yleisesti ilman oletusta hermiittisyydestä. Esimerkiksi reaalista matriisia $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vastaavat ominaisvektorit e_1 ja $e_1 - e_2$ eivät ole ortogonaalisia avaruuden $\mathbb{R}^2$ standardisisätulolla.

Propositio 13.12. *Olkoon $H \neq \{0\}$ Hilbertin avaruus ja olkoon $T\colon H \to H$ kompakti Hermiten operaattori. Tällöin $\|T\|$ tai $-\|T\|$ on operaattorin T ominaisarvo.*

Todistus. Voimme olettaa, että $\|T\| \neq 0$. Proposition 13.9 nojalla on vektorit $x_k \in H$, $k \in \mathbb{N}$, joille $\|x_k\| = 1$, $(Tx_k \mid x_k) \to \alpha$ jollain $\alpha \in \mathbb{K}$, jolle $|\alpha| = \|T\|$. Lemman 13.8 nojalla$(Tx_k \mid x_k)$ on reaaliluku, joten $\alpha = \pm\|T\|$. Samojen tulosten perusteella

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|Tx_k - \alpha x_k\|^2 \\ &= \|Tx_k\|^2 - 2\alpha(Tx_k \mid x_k) + \alpha^2\|x_k\|^2 \\ &\leq 2\|T\|^2 - 2\alpha(Tx_k \mid x_k) \\ &\to 2\|T\|^2 - 2\|T\|^2 = 0\,, \end{aligned} \tag{13.1}$$

kun $k \to \infty$.

Jono (x_k) on rajoitettu, joten jonolla $(Tx_k)_{k=1}^{\infty}$ on suppeneva osajono $(Tx_{k_j})_{j=1}^{\infty}$, koska T on kompakti. Siis on $y \in H$, jolle $Tx_{k_j} \to y$, kun $j \to \infty$. Havainnon (13.1) nojalla myös jono $(\alpha x_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ suppenee kohti samaa raja-arvoa, joten itse asiassa $x_{k_j} \to \frac{y}{\alpha} = x \in H$, kun $j \to \infty$. Koska $\|x_{k_j}\| = 1$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, pätee $\|x\| = 1$. Koska T on rajoitettu, saadaan $Tx = \alpha x$. □

Lause 13.13 (Spektraalilause)**.** *Olkoon T ääretönulotteisen Hilbertin avaruuden H kompakti Hermiten operaattori. Tällöin on ortonormaali joukko $E = \{e_k : k \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ ja jono $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ operaattorin T nollasta poikkeavia ominaisarvoja, joille $Te_k = \lambda_k e_k$ kaikilla k,*

$$H = \ker T \oplus \overline{\langle e_k : k \in \mathbb{N} \rangle}$$

ja

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x \mid e_k)\, e_k$$

kaikille $x \in H$.

Todistus. Proposition 13.12 nojalla operaattorilla T on ominaisvektori e_1, $\|e_1\| = 1$, jolle

$$Te_1 = \lambda_1 e_1 = \pm\|T\| e_1 .$$

Oletetaan, että $e_1, e_2, \dots, e_n$ ovat operaattorin T ominaisvektoreita, jotka vastaavat ominaisarvoja $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Olkoon

$$V_n = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle .$$

Koska V_n on ominaisvektorien virittämä, pätee $TV_n \subset V_n$. Lemman 13.5 ja Hermiten operaattorin määritelmän nojalla myös $V_n^{\perp}$ on T-invariantti.

Oletamme, että $T|_{V_n^{\perp}}$ on kompakti Hermiten operaattori, joten Proposition 13.12 nojalla operaattorilla T on ominaisvektori e_{n+1}, $\|e_{n+1}\| = 1$, jolle

$$Te_{n+1} = \lambda_{n+1} e_{n+1} = \pm\|T|_{V_n^{\perp}}\| e_{n+1} .$$

Induktiolla saamme ortonormaalin jonon $(e_k)_{k \in \mathbb{N} - \{0\}}$ ominaisvektoreita ja jonon $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N} - \{0\}}$ niitä vastaavia ominaisarvoja.

Konstruktion nojalla jono $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N} - \{0\}}$ on vähenevä.[3] Jos $\lambda_k \not\to 0$, kun $k \to \infty$, niin $|\lambda_k| \geq R$ jollain $R > 0$, joten

$$R\, e_k = T\left(\frac{R}{\lambda_k} e_k\right) \in \overline{T(\overline{B}(0,1))}$$

kaikilla k. Joukko $\overline{T(\overline{B}(0,1))}$ on kompakti mutta $\|R\, e_k - R\, e_j\|^2 = 2$, jos $j \neq k$, joten jonolla ei ole suppenevaa osajonoa. Siis $\lambda_k \to 0$, kun $k \to \infty$.

Kaikille λ_k pätee $|\lambda_{k+1}| = \|T|_{V_k^{\perp}}\|$, joten $\|T\|_{\langle e_k : k \in \mathbb{N} - \{0\}\rangle^{\perp}} = 0$ ja siis

$$T|_{\langle e_k : k \in \mathbb{N} - \{0\}\rangle^{\perp}} = 0 .$$

Proposition 8.10 nojalla $\langle e_k : k \in \mathbb{N} - \{0\}\rangle^{\perp} = \overline{\langle e_k : k \in \mathbb{N} - \{0\}\rangle}^{\perp}$, joten ensimmäinen väite on todistettu.

Olkoon $x \in H$. Tällöin on $y \in \overline{\langle e_k : k \in \mathbb{N} - \{0\}\rangle}^{\perp}$ siten, että

$$x = y + \sum_{k=1}^{\infty} (x \mid e_k)\, e_k .$$

Koska T on rajoitettu lineaarinen operaattori, saadaan siis

$$Tx = Ty + T\Big(\sum_{k=1}^{\infty} (x \mid e_k)\, e_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x \mid e_k)\, e_k . \quad \square$$

[3]ei välttämättä aidosti

Harjoitustehtäviä

13.1. Olkoon H Hilbertin avaruus. Osoita, että kuvaus $^\dagger\colon \operatorname{Lin}_{\mathrm{b}}(H,H) \to \operatorname{Lin}_{\mathrm{b}}(H,H)$ on konjugaattilineaarinen ja että $(T^\dagger)^\dagger = T$ kaikille $T \in \operatorname{Lin}_{\mathrm{b}}(H,H)$.

13.2. Olkoon $V\colon L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$,

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)dt\,.$$

Operaattori V on erikoistapaus Hilbertin ja Schmidtin operaattorista F_k. Määritä ydin $k \in L^2([0,1]\times[0,1])$ siten, että $V = F_k$. Määritä $V^\dagger$.

13.3. Olkoon H Hilbertin avaruus ja olkoon $T \in \operatorname{Lin}_{\mathrm{b}}(H,H)$. Osoita, että

$$\ker T = T^\dagger(H)^\perp\,.$$

13.4. Olkoon H Hilbertin avaruus. Osoita, että Hermiten operaattorit muodostavat normiavaruuden $\operatorname{Lin}_{\mathrm{b}}(H,H)$ suljetun reaalisen aliavaruuden.

13.5. Olkoon H kompleksinen Hilbertin avaruus. Olkoon $Q\colon H \to H$ operaattori, jolle pätee $(Qz \mid z) = 0$ kaikille $z \in H$. Osoita, että $Q = 0$.[4] Osoita, että vastaava väite ei päde reaalisessa Hilbertin avaruudessa.

13.6. Olkoon H Hilbertin avaruus ja olkoon $T\colon H \to H$ Hermiten operaattori. Osoita, että 0 ei ole operaattorin T jäännösspektrin piste.

Olkoot $\sigma, \rho\colon \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C})$ vasen ja oikea siirto, jotka määritellään asettamalla

$$\begin{aligned}\sigma\omega(k) &= \omega(k+1)\\ \rho\omega(k) &= \begin{cases}0 & \text{, kun } k=0\\ \omega(k-1) & \text{, kun } k\geq 1\end{cases}\,.\end{aligned}$$

kaikille $\omega \in \ell^2$

13.7. Määritä vasemman ja oikean siirron adjungaatit.

13.8. Jaottele vasemman ja oikean siirron spektrit pistespektriin, jatkuvaan spektriin ja jäännösspektriin.[5]

13.9. Olkoon H Hilbertin avaruus ja olkoon $T\colon H \to H$ injektiivinen Hermiten operaattori. Osoita, että H on separoituva.

[4] Olkoot $v, w \in H$. Tarkastele tapauksia $z = v + w$ ja $z = v + iw$.

[5] Käytä tehtävää 13.3 ja ortogonaalikomplementin ominaisuuksia. Mikä on $(\sigma - \lambda)^\dagger$?

Kirjallisuutta

[Cie] K. Ciesielski. Set theory for the working mathematician, volume 39 of London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[Con] J. B. Conway. A course in functional analysis, volume 96 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1990.

[EW] M. Einsiedler and T. Ward. Functional Analysis, Spectral Theory, and Applications, volume 276 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 2017.

[Fri] A. Friedman. Foundations of modern analysis. Dover Publications, Inc., New York, 1982. Reprint of the 1970 original.

[Kah] L. Kahanpää. Funktionaalianalyysi, volume 51 of Luentomoniste. Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, 2004.

[Kre] E. Kreyszig. Introductory functional analysis with applications. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

[Par] J. Parkkonen. Metriset avaruudet ja topologia. `http://users.jyu.fi/~parkkone/MetTop2017/MetAmemo.pdf`, 2017.

[Rud] W. Rudin. Real and complex analysis. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[Wer] D. Werner. Funktionalanalysis. Springer-Verlag, Berlin, 7. edition, 2011.