Johdatus dynaamisiin systeemeihin 2022

Harjoitus 5: ratkaisuja

1. Osoita, että kuvaus $h_1\colon [0,1] \to [0,1]$,

$$h_1(x) = \sin^2(\frac{\pi}{2}\,x)$$

on homeomorfismi, joka konjugoi kuvaukset T_2 ja F_4:

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{T_2} & [0,1] \\ \big\downarrow h_1 & & \big\downarrow h_1 \\ [0,1] & \xrightarrow{F_4} & [0,1] \end{array}$$

Ratkaisu. Sini on injektio välillä $[0,\frac{\pi}{2}]$. Se on jatkuva samoin kuin käänteiskuvaus $x \mapsto \frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{x})$. Trigonometrian laskukaavat antavat

$$F_2(\sin^2(\frac{\pi}{2}\,x)) = 4\sin^2(\frac{\pi}{2}\,x)(1-\sin^2(\frac{\pi}{2})) = (2\sin(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2}))^2 = \sin^2(\pi x)$$

ja

$$\sin^2(\frac{\pi}{2}T_2(x)) = \begin{cases} \sin^2(\frac{\pi}{2}\,2x) = \sin^2(\pi x), & \text{kun } x \in [0,\frac{1}{2}] \\ \sin^2(\frac{\pi}{2}\,2(1-x)) = \sin^2(\pi - \pi x) = \sin^2(\pi x), & \text{kun } x \in [\frac{1}{2},1]\ . \end{cases}$$

2. Etsi homeomorfismi $h_2\colon [0,1] \to [-1,1]$, joka konjugoi kuvauksen F_4 ja toisen Tšebyšovin polynomikuvauksen $P_2(x) = 2x^2 - 1$ rajoittuman välille $[-1,1]$. [1]

Ratkaisu. Vihjeen mukaisesti etsitään ratkaisua muodossa $h_2(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Yhtälöstä

$$-4ax^2 + 4ax + b = h_2 \circ F_4(x) = P_2 \circ h_2(x) = 2a^2 + x^2 + 4abx + 2b^2 - 1$$

löydämme helposti ratkaisun $a = -2$, $b = 1$.

3. Osoita, että kuvaukset F_4 ja T_2 ovat kaoottisia.

Ratkaisu. Kuvaukset P_2 ja F_4 ovat konjugaatteja Harjoitustehtävän 2 nojalla ja P_2 on kaoottinen Esimerkin 6.17 nojalla, joten F_4 on kaoottinen Seurauksen 6.16 nojalla.

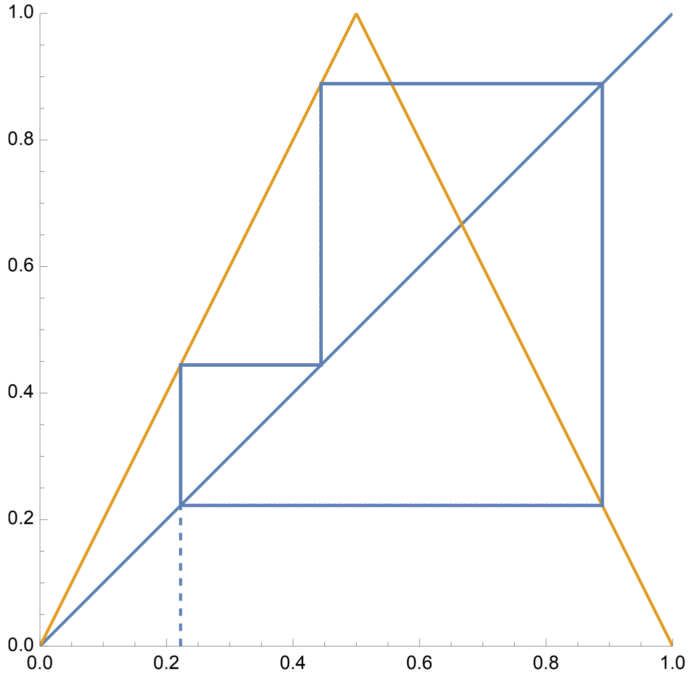
Kuvaukset T_2 ja F_4 ovat konjugaatteja Harjoitustehtävän 1 nojalla ja edellä näimme, että F_4 on on kaoottinen, joten T_2 on kaoottinen Seurauksen 6.16 nojalla.

4. Tee graafista analyysia telttafunktiolle T_2 ja/tai funktiolle F_4 niin, että joitain erilaisia ratoja havaitaan.

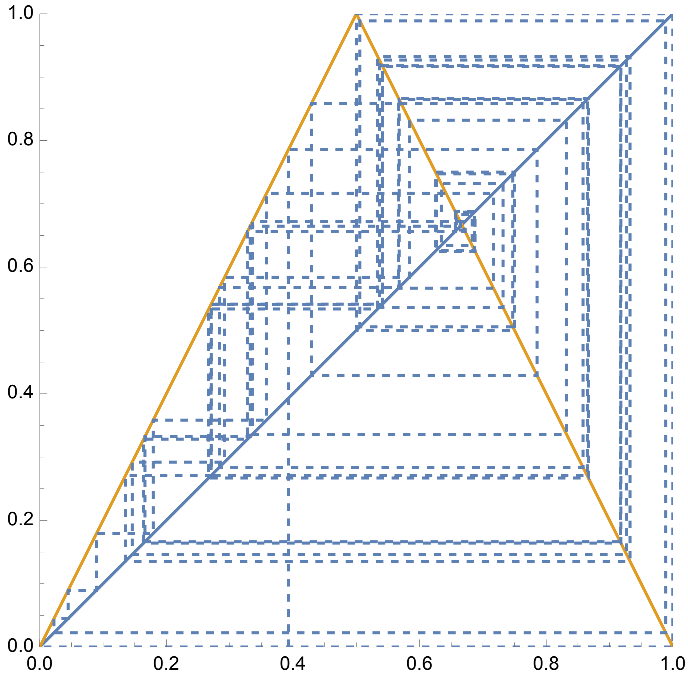
---

[1] Ensimmäisen asteen polynomifunktio toimii.

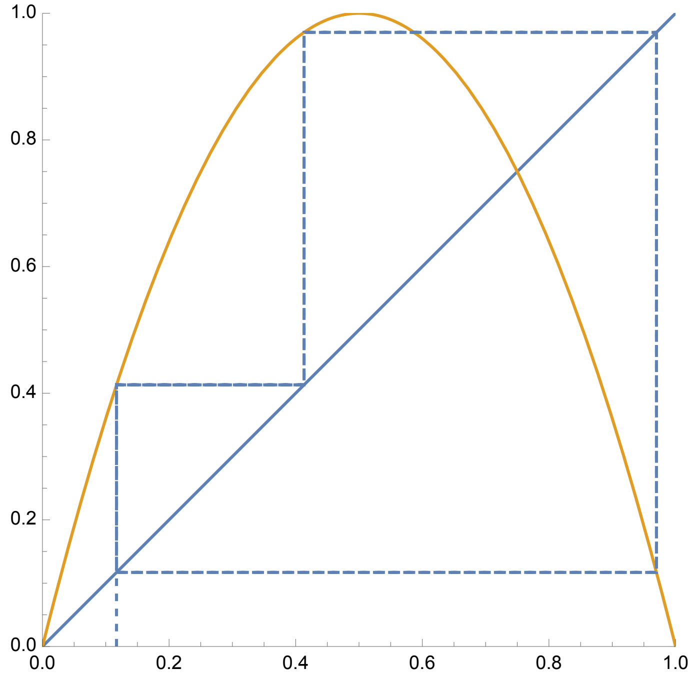
Ratkaisu.



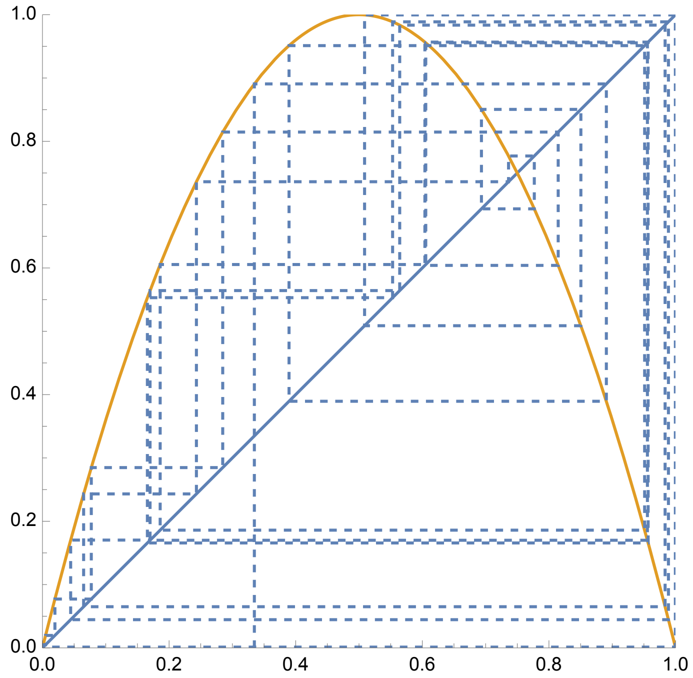
Kuva 0.1: Pisteen $\frac{2}{9}$ rataa kuvauksella T_2.



Kuva 0.2: Pisteen $\cos(2\pi\, q')$ rataa kuvauksella T_2, missä $q' \approx 0.185764$ on luku, jonka esitys kannassa 3 on $0.01200010210111220212 2$.



Kuva 0.3: Pisteen $\sin^2(\frac{\pi}{9})$ rataa kuvauksella F_4.



Kuva 0.4: Pisteen $\sin^2(\frac{\pi}{2}\cos(2\pi q'))$ rataa kuvauksella T_2, missä $q' \approx 0.185764$ on luku, jonka esitys kannassa 3 on 0.0120001021011122020122.

5. Olkoot $M, N \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $M < N$. Osoita, että että vasen siirto $\sigma\colon \Sigma_M \to \Sigma_M$ on vasemman siirron $\sigma\colon \Sigma_N \to \Sigma_N$ topologinen tekijä.[2]

[2]Riittää tarkastella tapaus $M = 2$, $N = 3$.

Ratkaisu. Olkoon $F\colon \Sigma_3 \to \Sigma_2$,

$$(F(\omega))(i) = \begin{cases} 0, & \text{jos } \omega(i) \in \{0,2\}, \\ 1, & \text{jos } \omega(i) = 1\,. \end{cases}$$

Kuvaus F on surjektio koska $F|_{\Sigma_2} = \mathrm{id}$. Se on selvästi 1-Lipschitz-jatkuva.

Olkoon $\omega \in \Sigma_3$. Tällöin $\sigma\omega(k) = \omega(k+1)$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$. Siis $(F \circ \sigma)(\omega)(k) = F(\omega(k+1)) = (\sigma \circ F)(\omega)(k)$.

6. Osoita, että vasen siirto $\sigma\colon \Omega_2 \to \Omega_2$ ja oikea siirto $\sigma^{-1}\colon \Omega_2 \to \Omega_2$ ovat konjugaatteja.

Ratkaisu. Olkoon $h\colon \Omega_2 \to \Omega_2$, $(h(\omega))(k) = \omega(-k)$. Selvästi $h \circ h = \mathrm{id}$, joten h on bijektio. Lisäksi

$$m(\omega, \omega') = \min\{|k| \in \mathbb{Z} : \omega(k) \neq \omega'(k)\} = \min\{|k| \in \mathbb{Z} : h(\omega)(k) \neq h(\omega')(k)\}\ ,$$

kaikille $\omega, \omega' \in \Omega_2$, joten h on isometriana homeomorfismi. Lisäksi pätee

$$(h \circ \sigma)(\omega)(k) = \omega(-(k+1)) = \omega(-k-1) = (\sigma^{-1} \circ h)(\omega)(k)\,.$$