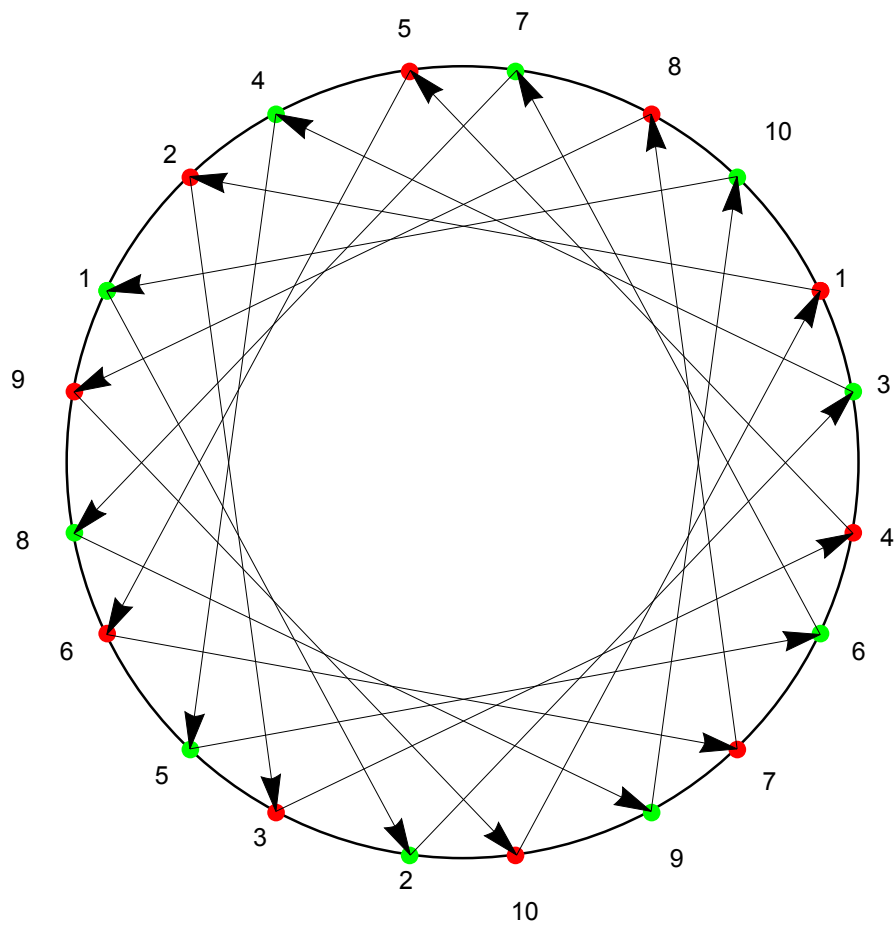

Johdatus dynaamisiin systeemiin



JOUNI PARKKONEN

LUENTOJA JYVÄSKYLÄN YLIOPISTOSSA

SYKSYLLÄ 2022

Sisällys

1	Dynaaminen systeemi	1
1.1	Iteraatit, rata ja dynaamiset systeemit	1
1.2	Kiintopisteet ja jaksolliset pisteet	2
1.3	Graafinen analyysi	3
1.4	Topologista dynamiikkaa	3
1.5	Differentioituvaa dynamiikkaa	5
1.6	Vakaa joukko	7
1.7	Dynamiikkaa kompleksitasossa	9
	Harjoitustehtäviä	11
2	Kutistavat kuvaukset	13
2.1	Banachin kiintopistelause	13
2.2	Picardin iteraatio	14
2.3	Newtonin menetelmä	16
	Harjoitustehtäviä	19
3	Ympyrän kierrot	21
3.1	Ympyrä ja kierrot	21
3.2	Tasainen jakautuminen	23
3.3	Kakkosen potenssit ja Benfordin laki	27
	Harjoitustehtäviä	30
4	Kulman m-kertaistava kuvaus	31
4.1	Kulman m -kertaistava kuvaus	31
4.2	Cantorin joukko	34
	Harjoitustehtäviä	35
5	Symboliset dynaamiset systeemit	37
5.1	Jonoavaruudet	37
5.2	Vasen siirto	39
	Harjoitustehtäviä	40
6	Kaottisen dynaamiset systeemit	43
6.1	Topologinen transitiivisuus	43

6.2	Kaaos	44
6.3	Topologisesti sekoittavat systeemit	47
6.4	Konjugointi ja semikonjugointi	47
	Harjoitustehtäviä	51
7	Koodaaminen	53
7.1	Telttakuvaukset	53
7.2	Smalen hevosenkenkä	56
7.3	Topologiset Markovin ketjut	59
7.4	Arnoldin kissakuvaus	62
	Harjoitustehtäviä	66
8	Logistinen perhe	69
8.1	Logistisen perheen jakson kaksinkertaistava sarja	69
8.2	Schwarzin derivaatta	75
8.3	Bifurkaatiokaavio	77
8.4	Sarkovskin lause	81
	Harjoitustehtäviä	81
H	Harjoitustyöt	83
A	Metriset avaruudet	85
	Kirjallisuutta	89

Tästä kurssista

Tämä kurssi antaa pikaisen johdannon joihinkin dynaamisten systeemien keskeisiin käsitteisiin. Kurssi on aineopintotasoinen, esitiedoiksi riittävät ensimmäisen vuoden analyysin ja lineaarialgebran kurssit ja perustiedot euklidisen avaruuden geometriasta ja topologiasta (avoimet ja suljetut joukot, tiheät joukot, jatkuvuus, raja-arvo jne.). Vektorifunktioiden analyysin kurssit antavat hyödyllistä koneistoa näiden käsitteiden tarkasteluun.

Osa yleisistä määritelmistä tuloksista muotoillaan metristen avaruuksien kontekstissa. Tarkastelemme myös symbolista dynamiikkaa, joka tapahtuu jonoavaruuksissa, joita tarkastelemme metrisinä avaruuksina. Tarvittavat metristen avaruuksien teorian määritelmät ja tulokset käsitellään kurssilla.

Suosittelavaa lukemista kurssin tueksi on lueteltu materiaalin lopussa olevassa lähdeluettelossa, hyviä oppikirjoja ovat muun muassa [Dev], [HSD],[HK]. Tätä kurssia suunniteltaessa [HK] on ollut tärkeä lähde.

Suurin osa tekstin kuvituksesta on tehty Mathematica-ohjelmiston avulla.

Merkintöjä ja sopimuksia

Luonnollisten, kokonais-, rationaali- ja reaalilukujen joukoista käytetään tavanomaisia merkintöjä \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} ja \mathbb{C} . Tällä kurssilla $0 \in \mathbb{N}$.

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ luonnolliset luvut.
- $\#(A) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ joukon A alkioden lukumäärä.
- $A - B = \{a \in A : a \notin B\}$ joukkojen A ja B erotus.
- $f|_A$ kuvauksen $f: X \rightarrow Y$ rajoittuma osajoukkoon $A \subset X$, $f|_A(a) = f(a)$ kaikilla $a \in A$.
- $C^0(X, Y)$ jatkuvien kuvausten $f: X \rightarrow Y$ avaruus.
- $f(t) = o(g(t))$, kun $t \rightarrow t_0$, jos ja vain jos $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$.
- $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \{u : \exists \alpha \in A, \text{ jolle } u \in U_\alpha\}$.
- $\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha = \{u : u \in U_\alpha \text{ kaikilla } \alpha \in A\}$.
- $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ on reaalisten $n \times n$ -matriisien vektoriavaruus.
- $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.
- $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_n$.
- $A \sqcup B$ on joukkojen A ja B erillinen yhdiste. Merkintä tarkoittaa joukkoa $A \cup B$ lisätiedolla, että $A \cap B = \emptyset$.

Uusien käsitteiden *määritelmät* on laatikoitu näin. Niitä ei ole numeroitu.

Joitain käsitteitä esitellään tekstissä jossain luontevassa kohdassa muotoilematta muodollista määritelmää. Tällöin määriteltävä tai esiteltävä käsite *korostetaan*.

Tällaisessa laatikossa tehdään jokin tärkeä sopimus, nimetään jokin käsite siten, että kyseessä ei ole varsinainen matemaattinen määritelmä, tai tehdään muu huomio, jota halutaan korostaa.

Luku 1

Dynaaminen systeemi

Tässä luvussa tutustumme eräisiin dynamiikan peruskäsitteisiin. Tämän luvun esimerkit ovat perustuvat reaalilukuvälien kuvauksiin itselleen ja lineaarikuvauksiin. Myöhemmissä luvuissa tarkastelemme yleisempiä tilanteita.

1.1 Iteraatit, rata ja dynaamiset systeemit

Olkoon X joukko ja olkoon $f: X \rightarrow X$. Olkoon $f^0 = \text{id}$ ja olkoon

$$f^n = f \circ f^{n-1} = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ kertaa}}$$

kaikille $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Kuvaus f^n on kuvauksen f n :s *iteraatti*.

Jos f on bijektio, sen *negatiiviset iteraatit* ovat $f^k = (f^{-1})^{-k}$ kaikille $k < 0$.

Pisteen x (*positiivinen*) *rata* on

$$\mathcal{O}^+(x) = \mathcal{O}_f^+(x) = \{f^k(x) : k \in \mathbb{N}\}.$$

Jos f on bijektio, niin pisteen x *täysi rata* on

$$\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}_f(x) = \{f^k(x) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Olkoon $\mathbb{A} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$. Kolmikko $((X, d), f, \mathbb{A})$ on *diskreetti dynaaminen systeemi*, jossa tarkastellaan kuvauksen f em iteraatteja f^n , $n \in \mathbb{A}$.

Dynaamista systeemiä ei yleensä ilmoiteta niin muodollisesti kuin se määritellään edellä vaan ryhdytään tarkastelemaan kuvauksen $f: X \rightarrow X$ iteraatteja ja \mathbb{A} valitaan sen mukaan, onko f bijektio vai ei. Joskus tosin tarkastellaan vain positiivisia iteraatteja vaikka kuvaus f olisi bijektio. Kokonaislukuja tai luonnollisia lukuja voi tässä ajatella *diskreettinä aikana*, jolloin kuvauksen f iterointi tarkoittaa systeemin aikakehityksen tarkastelua.

Dynaamisia systeemejä tarkasteltaessa ollaan kiinnostuneita paitsi yksittäisten pisteiden radoista myös siitä, miten jonkin tarkasteltavan pisteen lähellä olevat pisteet käyttäytyvät. Yleisesti tarkastellaankin metrisissä¹ avaruuksissa (X, d) määriteltyjä kuvauksia.² Tarkasteltavat kysymykset liittyvät ratojen *asymptoottiseen käyttäytymiseen*:

- Onko jonolla $(f^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ raja-arvoa?
- Onko rata $\mathcal{O}_f(x)$ tiheä?
- Miten lähekkäisten pisteiden radat käyttäytyvät toistensa suhteen?

Tällä kurssilla tutustumme diskreetteihin dynaamisiin systeemeihin erilaisten esimerkkien tarkastelun avulla. Jatkuva-aikaisissa dynaamisissa systeemeissä tutkitaan kuvauksen iteraattien sijaan avaruuden X *virtauksia* ja *puolivirtauksia*, jotka ovat reaaliluvuilla tai positiivisilla reaaliluvuilla parametrisoituja kuvauserheitä $\{g_t: X \rightarrow X : t \in \mathbb{R}\}$, joille $g_t \circ g_s = g_{t+s}$ kaikille $s, t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \in \{\mathbb{R}, \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}\}$. Jatkuva-aikaiset systeemit liittyvät luonnollisella tavalla differentiaaliyhtälöiden ja differentiaaligeometrian teoriaan. Ne muodostavat tärkeän osan dynaamisten systeemien tutkimuksesta mutta jäävät käsiteltäväksi jollain toisella kurssilla.

1.2 Kiintopisteet ja jaksolliset pisteet

Olkkoon $f: X \rightarrow X$. Jos $f(x) = x$, niin x on kuvauksen f tai dynaamisen systeemin (f, X) *kiintopiste*.

Jos $f^p(x) = x$ jollain $p \in \mathbb{N} - \{0\}$, niin x on *p -jaksollinen piste*. Dynaamisen systeemin (f, X) p -jaksollisten pisteiden joukko on

$$\mathcal{P}_p(f) = \mathcal{P}_p(f, X) = \{x \in X : f^p(x) = x\}.$$

Jos x on p -jaksollinen ja se ei ole k -jaksollinen millään $1 \leq k < p$, niin p on pisteen x *jakso*. Tällöin x on *aidosti p -jaksollinen piste*.

Eryityisesti kuvauksen f kiintopiste on 1-jaksollinen piste.

Esimerkki 1.1. (1) Olkkoon $0 < k < 1$. Linearikuvauksella $K: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Kx = kx$ on kiintopiste $0 \in \mathbb{R}$: $K0 = 0$. Lisäksi jokaiselle $x \in \mathbb{R}$ pätee $K^k x \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$. Kaikki radat siis suppenevat kohti kiintopistettä 0.

(2) Olkkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x) = x(x^2 - 2)$. Piste 0 on kiintopiste ja

$$-1 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} 1$$

on 2-jaksollinen rata.

Esimerkki 1.2. Collatzin $(3n + 1)$ -ongelma on esimerkki hyvin yksinkertaisesta dynaamisesta systeemistä, jonka ilmeistä asymptoottista käyttäytymistä ei osata todistaa. Olkkoon $C: \mathbb{N} - \{0\} \rightarrow \mathbb{N} - \{0\}$ määritelty asettamalla

$$C(n) = \begin{cases} 3n + 1, & \text{kun } n \text{ on pariton} \\ \frac{n}{2}, & \text{kun } n \text{ on parillinen.} \end{cases}$$

¹ja joskus yleisemmissä topologisissa

²Katso liite A.

Pisteen 1 rata on $1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$. Kokeilemalla huomaamme, että kaikkien pisteiden radat näyttävät päätyvän lopulta tähän 3-jaksoiseen rataan. Esimerkiksi

$$3 \mapsto 10 \mapsto 5 \mapsto 16 \mapsto 8 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$$

Tämä havainto on tarkastettu ainakin noin lukuun 5.76×10^{18} saakka. Collatzin ongelmasta voi lukea esimerkiksi artikkelista [Con] ja sen viittauksista.

1.3 Graafinen analyysi

Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli. Kuvauksen $f: I \rightarrow I$ dynamiikkaa on joskus hyödyllistä havainnollistaa *graafisella analyysillä*:

- (1) Piirretään samaan kuvaan tarkasteltavan funktion ja identtisen funktion kuvaajat.
- (2) Valitaan piste $x \in I$.
- (3) Piirretään pystysuora jana $[(x, 0), (x, f(x))] \subset I \times I$.
- (4) Piirretään vaakasuora jana $[(x, f(x)), (f(x), f(x))] \subset I \times I$.
- (5) Piirretään pystysuora jana $[(f(x), f(x)), (f(x), f^2(x))] \subset I \times I$.
- (6) Palataan vaiheeseen ((4)) ja korvataan $x \rightarrow f(x)$.

Graafisen analyysin ensimmäinen vaihe näyttää kuvauksen f kiintopisteet: Kuvaajien leikkauspisteissä pätee $f(x) = x$. Jaksollisia pisteitä jaksolla p voi etsiä tekemällä graafista analyysia kuvaukselle f^p .

Seuraava tulos on hyödyllinen graafisen analyysin paikkansapitävyyden perustelussa.

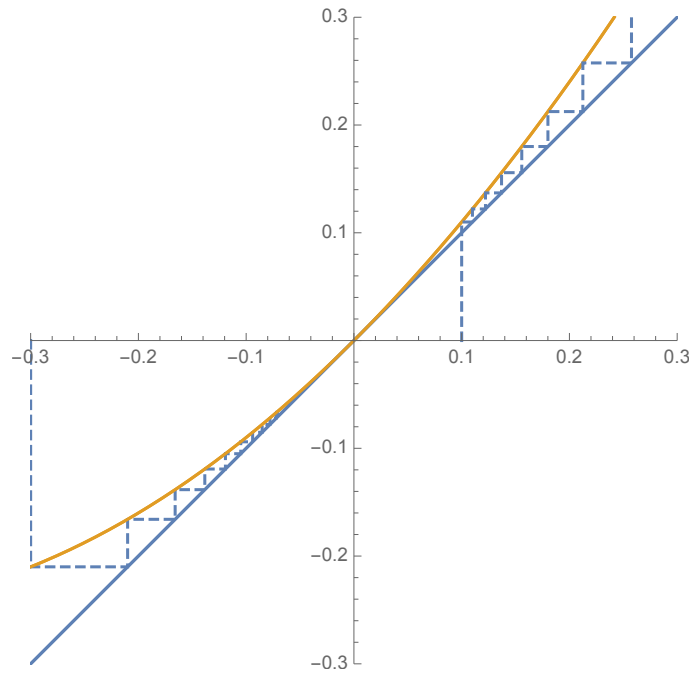
Lemma 1.3. *Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ suljettu ja rajoitettu väli ja olkoon $f: I \rightarrow I$ jatkuva kasvava funktio. Tällöin jokaiselle $x \in I$ on kuvauksen f kiintopiste $p = p(x) \in I$, jolle pätee $f^k(x) \rightarrow p$, kun $k \rightarrow \infty$.*

Todistus. Harjoitustehtävä 1.5. □

1.4 Topologista dynamiikkaa

Tässä luvussa aloitamme pisteiden asymptoottisen käyttäytymisen tarkastelun. Tätä varten tarvitaan tapa mitata tarkasteltavan joukon X pisteiden etäisyyksiä. Tällöin on luonnollista tarkastella tilannetta, jossa X on varustettu topologialla tai metriikalla.³ Käsitelyn suoraviivaistamiseksi rajoitumme lokaalisti kompaktien metrinen avaruuksien tarkasteluun. Näissä avaruuksissa jokaisella pisteellä on avoin ympäristö, jonka sulkeuma on kompakti. Erityisesti siis euklidinen avaruus ja sen suljetut aliavaruudet ovat lokaalisti kompakteja.

³Katso [Par].



Kuva 1.1: Esimerkin 1.5 kuvauksen $x \mapsto f(x) = x + x^2$ graafinen analyysi alkuarvoilla -0.3 ja 0.1 .

Olkoon X lokaalisti kompakti metrinen avaruus $f: X \rightarrow X$ jatkuva kuvaus. Kuvauksen f kiintopiste x on *puoleensavetävä*, jos sillä on avoin ympäristö U , jolle \bar{U} on kompakti, $f(\bar{U}) \subset U$ ja $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(U) = \{x\}$.

Kuvauksen f kiintopiste x on *hylkivä*, jos sillä on avoin ympäristö U , jolle $\bar{U} \subset f(U)$ ja $\bigcap_{n=1}^{\infty} (f|_U)^{-n}(U) = \{x\}$.

Jos x on kuvauksen $f: X \rightarrow X$ puoleensavetävä kiintopiste, niin määritelmästä seuraa, että pisteellä X on ympäristö U siten, että $f^k(y) \rightarrow x$, kun $k \rightarrow \infty$ kaikille $y \in U$. Siis piste x vetää puoleensa kaikkia lähellä olevia pisteitä kuten nimityksen perusteella on syytä odottaa.

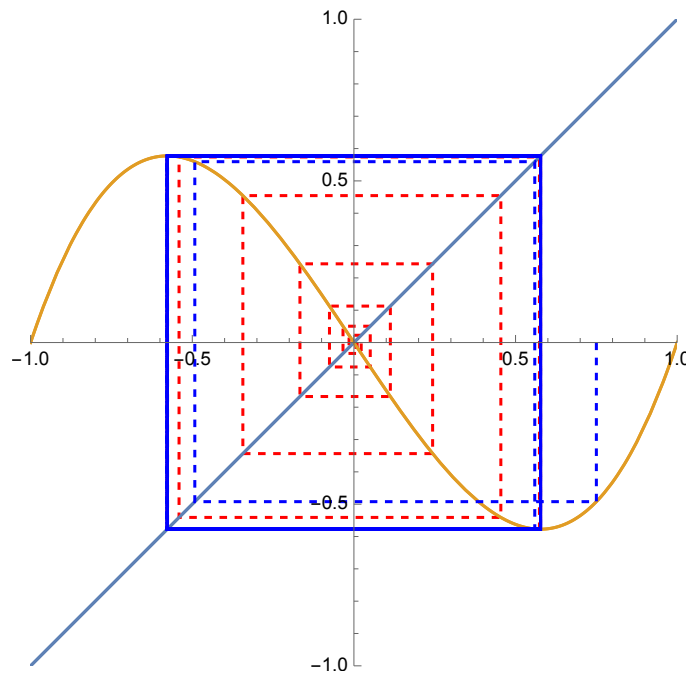
Esimerkki 1.4. Origo on Esimerkin 1.1(1) lineaarikuvauksen K puoleensavetävä kiintopiste ja kuvauksen K^{-1} hylkivä kiintopiste.

Lemman 1.3 antama kiintopiste välttämättä ole puoleensavetävä kuten seuraava esimerkki osoittaa:

Esimerkki 1.5. Origo on kuvauksen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + x^2$, ainoa kiintopiste. Kaikille $x \neq 0$ pätee $x^2 > 0$, joten $f(x) = x + x^2 > x$ kaikille $x \neq 0$. Siis kaikille $x > 0$ pätee

$$0 < x < f(x) < f^2(x) < \dots < f^k(x) < f^{k+1}(x) < \dots,$$

joten $f^k(x) \not\rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$. Sen sijaan kaikille $-1 < x < 0$ pätee $x < f(x) < 0$, joten jono $(f^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ suppenee kohti jotain raja-arvoa x_{∞} . Kuvauksen f jatkuvuuden nojalla $f(x_{\infty}) = x_{\infty}$ ja koska 0 on ainoa kiintopiste, pätee siis $f^k(x) \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$. Kiintopiste 0 ei siis ole puoleensavetävä eikä hylkivä.



Kuva 1.2: Esimerkin 1.7 kuvauksen f graafinen analyysi alkuarvoilla 0.01 ja 0.75.

Lemma 1.6. *Olkoon X lokaalisti kompakti metrinen avaruus ja olkoon $f: X \rightarrow X$ jatkuva kuvaus. Olkoon $x \in X$ kuvauksen f puoleensavetävä p -jaksollinen piste. Tällöin pisteet $f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x)$ ovat puoleensavetäviä p -jaksollisia pisteitä.*

Todistus. Harjoitustehtävä 1.6. □

Jos $y \in X$ on p -jaksollinen piste, niin y on puoleensavetävä/hylkivä p -jaksollinen piste, jos se on kuvauksen f^p puoleensavetävä/hylkivä kiintopiste. Tällöin pisteen y rata on puoleensavetävä/hylkivä p -jaksollinen rata.

Esimerkki 1.7. Olkoon $f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \frac{3}{2}(x^3 - x)$. Pisteet $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ja $\frac{1}{\sqrt{3}}$ muodostavat 2-jaksollisen radan. Graafisen analyysin perusteella näyttää siltä, että rata on puoleensavetävä. Esimerkiksi jakamalla polynomi $f^2(x) - x$ tekijöihin voi tarkastaa, että $f(x) > x$, kun $x \in [-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ ja $f(x) < x$, kun $x \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0] \cup [\frac{1}{\sqrt{3}}, 1]$. Siis rata $\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\}$ on puoleensavetävä Lemman 1.3 nojalla.

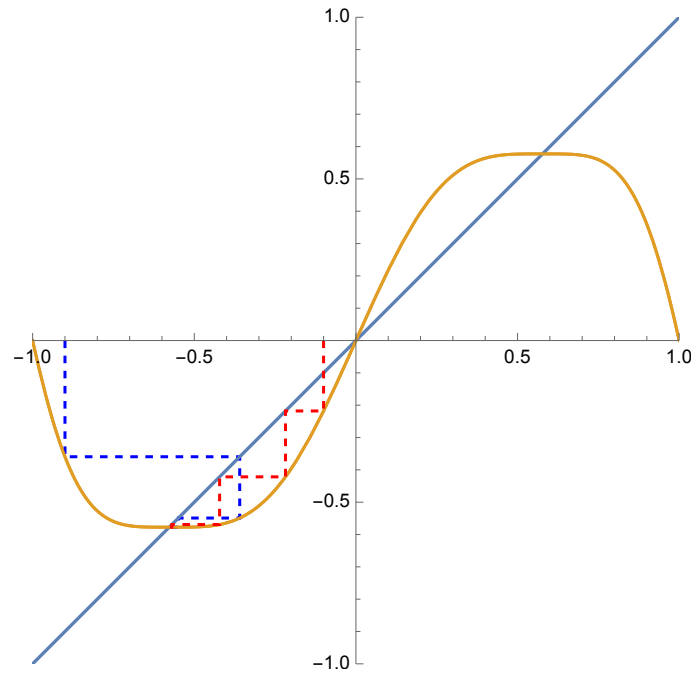
1.5 Differentioituvaa dynamiikkaa

Jos dynaamisen systeemin kuvaus on differentioituva, kiintopisteiden luonne voidaan usein selvittää derivaatan/differentiaalilin avulla. Ennen tätä koskevan 1-ulotteisen tuloksen muotoillua määrittelemme hyödyllisiä käsitteitä.

Olkoon $f: X \rightarrow X$. Sanotaan, että osajoukko $A \subset X$ on f -invariantti, jos $f(A) \subset A$.

Esimerkki 1.8. (1) Määritelmän mukaan jokainen rata on invariantti.

(2) Olkoon $k: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $k(x) = \frac{\pi}{2}$. Tällöin kaikki 0-keskiset pallot ovat invariantteja.



Kuva 1.3: Esimerkin 1.7 kuvauksen f^2 graafinen analyysi.

Olkoon X metrinen avaruus ja olkoot $x_0 \in X$ ja $y_k \in X$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Jos on $K \geq 1$ siten, että $d(x_0, y_k) \leq K^k$ kaikille $x \in X$, niin pisteet y_k lähestyvät pistettä x_0 eksponentiaalisella nopeudella.

Propositio 1.9. *Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ on avoin väli. Olkoon $x_0 \in I$ C^1 -funktion $g: I \rightarrow I$ kiintopiste.*

(1) *Jos $|g'(x_0)| < 1$, niin on avoin g -invariantti väli $U \subset I$, joka sisältää pisteen x_0 siten, että $g^k(x) \rightarrow x_0$ eksponentiaalisella nopeudella kaikille $x \in U$, kun $k \rightarrow \infty$.*

(2) *Jos $|g'(x_0)| > 1$, niin x_0 on lokaalisti hylkivä kiintopiste.*

Todistus. (1) Olkoon $x \in I$. Differentiaalilaskennan väliarvolauseeseen nojalla on ξ pisteiden x_0 ja x välissä, jolle pätee

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0).$$

Koska g on C^1 ja $|f'(x_0)| < 1$, niin jollain x_0 -keskisellä välillä J pätee $|f'(y)| < K < 1$ jollain K kaikille $y \in J$.

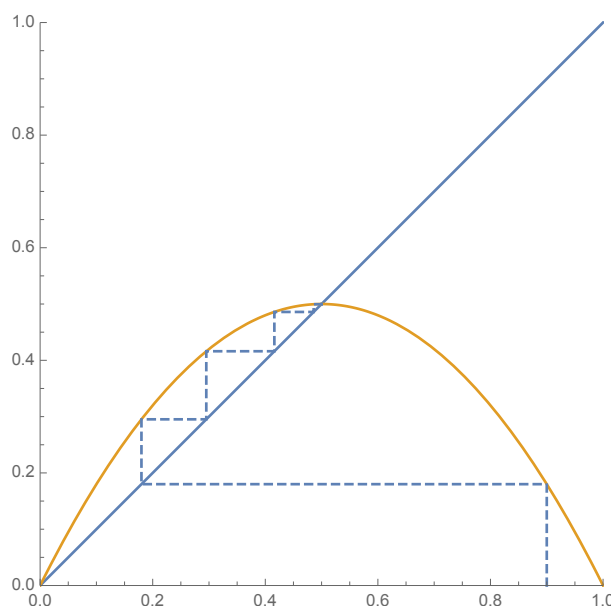
Toinen väite todistetaan samaan tapaan, Harjoitustehtävä 1.7. □

Jos x_0 on C^1 -kuvauksen $f: I \rightarrow I$ p -jaksollinen piste, niin ketjusäännön nojalla

$$(f^p)'(x_0) = \prod_{x \in \mathcal{O}_f^+(x_0)} f'(x)$$

on vakio kaikille jaksollisen radan pisteille. Tämä osoittaa reaalilukuvälin jatkuvasti differentioituville dynaamisille systeemeille, että jos x_0 on kuvauksen f^p puoleensavetävä kiintopiste, niin kaikki muutkin radan $\mathcal{O}^+(x_0)$ pisteet ovat puoleensavetäviä kiintopisteitä.

Esimerkki 1.10. Polynomifunktiolla $f(x) = 2x(1-x)$ on kiintopisteet 0 ja $\frac{1}{2}$. Proposition 1.9 nojalla 0 on hylkivä, koska $f'(0) = 2$ ja $\frac{1}{2}$ on puoleensavetävä, koska $f'(\frac{1}{2}) = 0$.



Kuva 1.4: Jos x_0 on kiintopiste, $|f'(x_0)| < 1$ ja alkuarvo x on riittävän lähellä pistettä x_0 , niin $f^n(x) \rightarrow x_0$ eksponentiaalisella nopeudella, jolloin kuva on esimerkiksi tällainen. Kuvassa $f(x) = 2x(1-x)$.

Jos $g'(x_0) = \pm 1$ Propositionissa 1.9, niin pisteen x_0 luonnetta ei voi päätellä pelkällä derivaattatiedolla. Sanomme tällaista kiintopistettä *epämääräiseksi*.

Esimerkki 1.11. (1) Esimerkin 1.1(2) tapauksessa $f'(0) = -2$, joten 0 on hylkivä kiintopiste. Toisaalta $f'(-1) = f'(1) = 1$, joten $-1 \rightleftarrows 1$ on derivaattatarkastelun mielessä epämääräinen 2-jaksollinen rata. Graafinen analyysi kuitenkin antaa viitteitä siitä, että rata on puoleensavetävä.

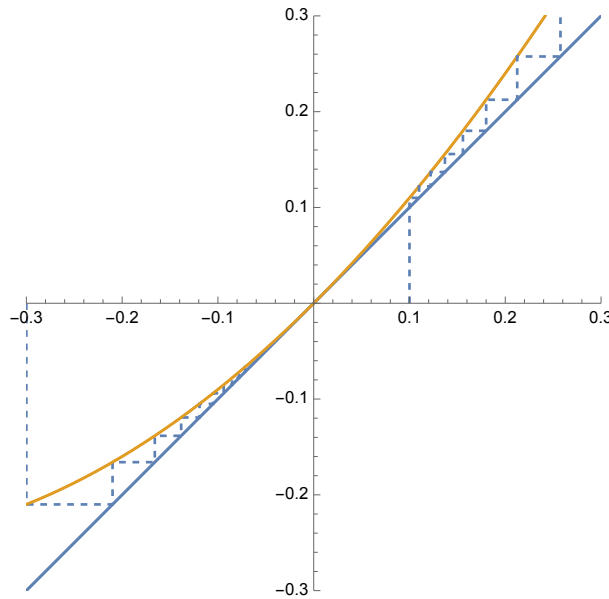
(2) Esimerkin 1.5 kuvauksen f kiintopiste 0 on epämääräinen, koska $f'(0) = 1$. Kiintopisteen 0 luonnetta ei voi päätellä Proposition 1.9 avulla. Esimerkissä 1.5 havaitsimme, että 0 ei ole puoleensavetävä eikä hylkivä.

1.6 Vakaa joukko

Olkoon $f: X \rightarrow X$ dynaaminen systeemi. Piste x on *positiivisesti (tai eteenpäin) asymptoottinen* pisteen p kanssa, jos $d(f^n(x), f^n(p)) \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow +\infty$.

Jos f on homeomorfismi, niin x on *negatiivisesti (tai taaksepäin) asymptoottinen* pisteen p kanssa, jos $d(f^n(x), f^n(p)) \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow -\infty$.

Pisteen p kanssa positiivisesti asymptoottiset pisteet muodostavat *pisteen p vakaan joukon* $W^s(p) = W_f^s(p)$ ja negatiivisesti asymptoottiset pisteet muodostavat *pisteen p epävakaan joukon* $W^u(p) = W_f^u(p)$.



Kuva 1.5: Pisteet -1 ja 1 ovat puoleensavetäviä epämääräisiä 2-jaksollisia pisteitä Esimerkissä 1.11.

Propositio 1.12. *Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ on avoin väli ja olkoon $x_0 \in I$ C^1 -kuvauksen $g: I \rightarrow I$ kiintopiste. Jos $|g'(x_0)| < 1$, niin puoleensavetävän kiintopisteen x_0 vakaa joukko on avoin.*

Todistus. Harjoitustehtävä 1.11. Avoimuus seuraa derivaatan jatkuvuudesta. □

Esimerkki 1.13. Olkoon $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $Lx = (2x_1, \frac{1}{2}x_2)$. Kiintopiste 0 vetää puoleensa x_2 -akselin pisteitä ja on lokaalisti hylkivä systeemille $L: \mathbb{R}^2 - \{(a, 0) : a \neq 0\}$.

Kaikki pisteet $x \in \mathbb{R}^2$, joille $x_1 \neq 0$ ovat positiivisesti asymptoottisia pisteen $(x_1, 0)$ kanssa:

$$W_L^s(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 = x_1\}.$$

Vastaavasti, jos $x_2 \neq 0$, niin

$$W_L^u(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_2 = x_2\}.$$

Propositio 1.12 yleistyy moniulotteiseen tilanteeseen oleellisesti samalla todistuksella. Olkoon seuraavassa Dg kuvauksen $g: U \rightarrow U$ differentiaali. Matriisin A normi on

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Propositio 1.14. *Olkoon $V \subset \mathbb{R}^n$ on avoin joukko ja olkoon x_0 C^1 -kuvauksen $g: V \rightarrow V$ kiintopiste. Jos $\|Dg(x_0)\| < 1$, niin on g -invariantti avoin joukko $U \subset V$, joka sisältää pisteen x_0 siten, että pisteet $g^k(x)$ lähestyvät pistettä x_0 eksponentiaalisella nopeudella kaikille $x \in U$. Erityisesti $U \subset W^s(x_0)$. Puoleensavetävän kiintopisteen x_0 vakaa joukko on avoin.* □

1.7 Dynamiikkaa kompleksitasossa

Tarkastellaan funktiota⁴ $P_0: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $P_0(z) = z^2$. Napakoordinaateissa

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi) = e^{i\phi},$$

joten on helppo nähdä, että

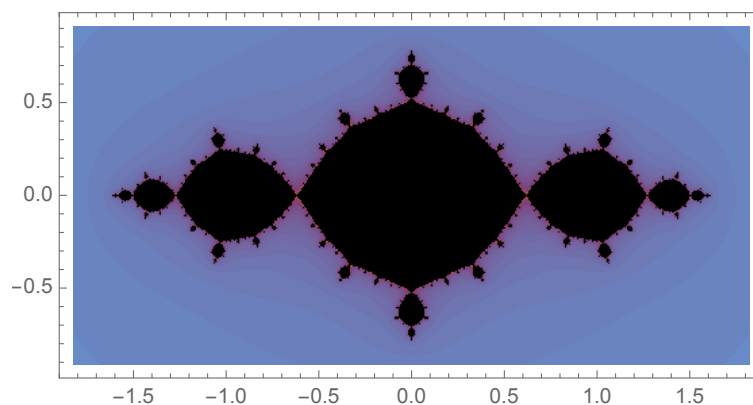
$$P(z) = z^2 = r^2(\cos(2\phi) + i \sin(2\phi)) = e^{i2\phi}.$$

Tästä muodosta näkee, että joukot

$$\begin{aligned} B(0, 1) &= \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \\ S(0, 1) &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \quad \text{ja} \\ \mathbb{C} - \bar{B}(0, 1) &= \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \end{aligned}$$

ovat invariantteja ja että pisteet 0 ja 1 ovat kiintopisteitä. Kaikille joukon $\mathbb{C} - \bar{B}(0, 1)$ pisteille pätee $|P_0^n(z)| = |z|^n \rightarrow \infty$, kun $n \rightarrow \infty$.

Polynomien P_0 dynamiikka näyttää siis melko yksinkertaiselta. Tosin, kun luvussa 4 tarkastelemme lähemmin kuvauksen P_0 rajoittumaa ympyrälle $S(0, 1)$, huomaamme, että tämänkin kuvauksen dynamiikka on melko runsasta. Osoitamme itse asiassa, että $P_0: S(0, 1) \rightarrow S(0, 1)$ on kaoottinen dynaaminen systeemi kunhan ensin määrittelemme kaaoksen käsitteen luvussa 6.



Kuva 1.6: K_{-1} .

Polynomifunktioiden $P_c: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $P_c(z) = z^2 + c$ dynamiikka sen sijaan on ilmeisen mielenkiintoista. Esimerkiksi polynomien $P_c(x)$ täytetty Julian joukko

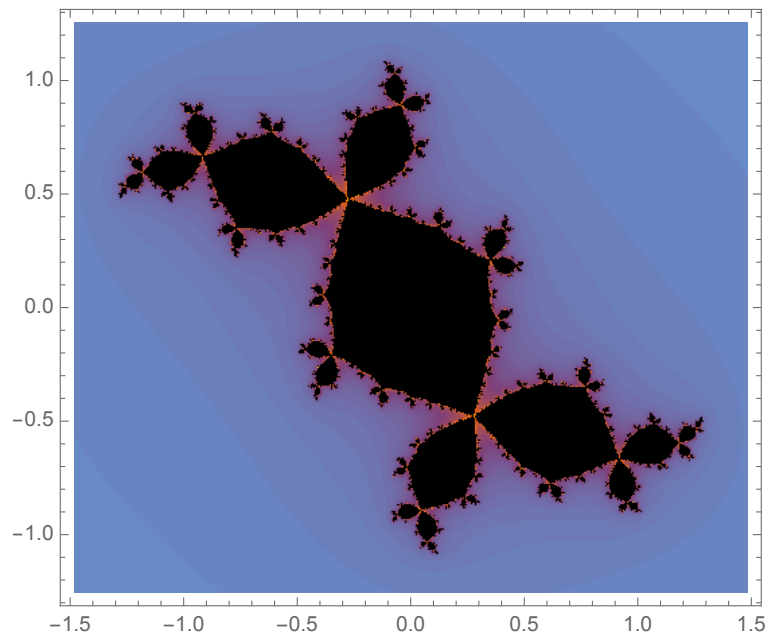
$$K_c = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{O}_{P_c}(z) \text{ on rajoitettu}\}$$

ja Mandelbrotin joukko

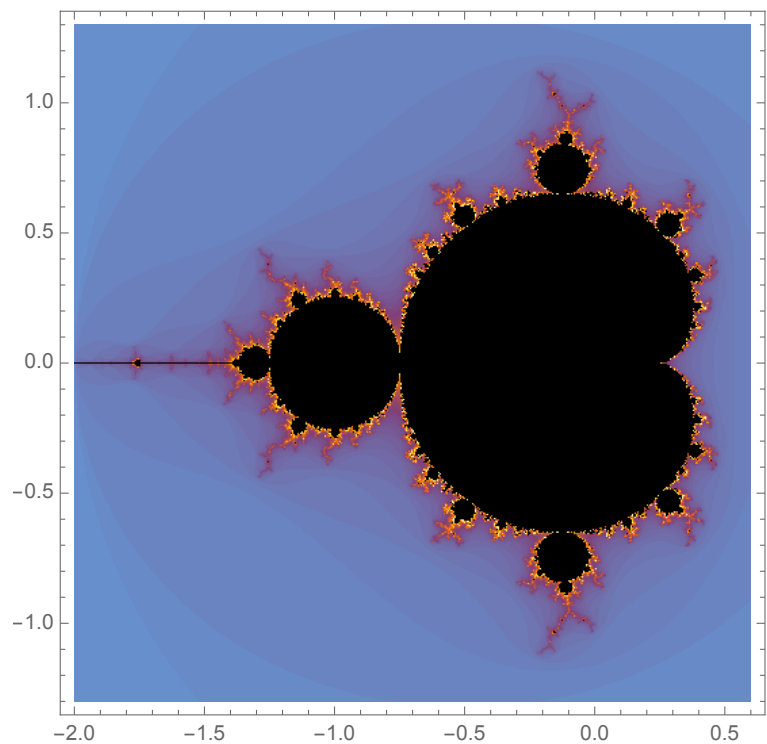
$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : K_c \text{ on yhtenäinen}\}$$

⁴Muista: Jos $z = x + iy$ ja $w = u + iv$ ovat kompleksilukuja, niin $zw = xu - yv + i(xv + yu)$ ja erityisesti $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Kompleksilukujen perusasioita voi kerrata tai opiskella esimerkiksi lähteestä <http://users.jyu.fi/~juhaleh/kompleksiluvuista.pdf>

ovat mielenkiintoisia fraktaaleja lukuunottamatta joukkoa K_0 , joka on suljettu yksikkökierros, kuten edellä nähtiin.



Kuva 1.7: Douadyn jänis $K_{-0.123+0.745i}$.



Kuva 1.8: Mandelbrotin joukko

Julian ja Mandelbrotin joukkojen käsittely edellyttää hieman edistyneempää kompleksianalyysin tuntemusta. Tällä kurssilla emme perehdy kompleksidynamiikan edistyneempiin osiin.

Harjoitustehtäviä

1.1. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ suljettu ja rajoitettu väli. Olkoon $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Oletetaan, että

$$(1) f(I) \subset I \text{ tai}$$

$$(2) I \subset f(I).$$

Osoita, että välillä I on piste x , jolle $f(x) = x$.⁵

Osoita esimerkkien avulla, että väliä I koskevat oletukset⁶ ovat tarpeellisia.

1.2. Olkoon $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ kasvava ja olkoon $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ vähenevä. Osoita, että kuvauksen f jokainen jaksollinen piste on kiintopiste ja että kuvauksen g jokaisen jaksollisen pisteen jakso on 1 tai 2.

1.3. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjä suljettu joukko ja olkoon $f: A \rightarrow A$ jatkuva kuvaus. Osoita, että kuvauksen f kiintopisteiden joukko on suljettu.

1.4. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon $f: X \rightarrow X$ jatkuva kuvaus. Osoita, että kuvauksen f kiintopisteiden joukko on suljettu.

1.5. Todista Lemma 1.3.

1.6. Todista Lemma 1.6.⁷

1.7. Todista Propositio 1.9(2).

1.8. Olkoon $A \subset [0, 1]$ suljettu joukko, $A \neq \emptyset$. Osoita, että on kasvava jatkuva kuvaus $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, jonka kiintopisteiden joukko on A .

1.9. Olkoot $f_1, f_2, f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_1(x) = x + x^3,$$

$$f_2(x) = x - x^3$$

ja

$$f_3(x) = x - x^2.$$

Piste 0 on kaikkien kuvausten f_1, f_2 ja f_3 kiintopiste. Kuvaile lähellä origoa olevien pisteiden käyttäytyminen näitä funktioita iteroitaessa.

1.10. Olkoon $f: [-\pi, \pi] \rightarrow [-\pi, \pi]$,

$$f(x) = \pi \cos x.$$

Montako kiintopistettä kuvauksella f on? Määritä kiintopisteiden tyypit. Onko kuvauksella f aidosti 2-jaksollisia pisteitä? Havainnollista tilannetta graafisella analyysillä.

1.11. Todista Propositio 1.12.

⁵Käytä JMA-kurssien tietoja.

⁶Siis se, että I on suljettu ja rajoitettu.

⁷Halutessasi voit olettaa, että $X = \mathbb{R}$ ja f on jatkuvasti derivoituva. Tällöin luvun 1.5 tulokset ovat käytettävissä.

Olkoon $\mu > 0$. Kuvaus $F_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F_\mu(x) = \mu x(1 - x),$$

on *logistinen funktio* parametrilla μ .

1.12. Määritä logistisen funktion F_μ kiintopisteet ja niiden tyypit, kun $\mu > 0$. Havainnollista graafisella analyysillä joillakin hyvin valituilla parametrin μ arvoilla.⁸

⁸Graafisen analyysin tekemiseen on hyvä Geogebra-paketti osoitteessa <https://www.geogebra.org/m/uvsfvNDt>.

Luku 2

Kutistavat kuvaukset

Tässä luvussa tarkastellaan dynaamisia systeemejä, joiden käyttäytyminen on hyvin yksinkertaista: Kuvauksella on yksi kiintopiste, joka on globaalisti puoleensavetävä. Tällaisilla systeemeillä on tärkeitä sovelluksia.

2.1 Banachin kiintopistelause

Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Kuvaus $F: X \rightarrow Y$ on K -Lipschitz-kuvaus tai K -Lipschitz-jatkuva, jos

$$d_Y(F(x), F(y)) \leq K d_X(x, y)$$

kaikille $x, y \in X$. Jos F on K -Lipschitz jollain $K > 0$, niin sanotaan, että F on Lipschitz-jatkuva.

Jos F on K -Lipschitz jollain $K < 1$, niin sanotaan, että F on (K) -kutistava.

Lause 2.1 (Kutistusperiaate eli Banachin kiintopistelause). *Olkoon X täydellinen metrisen avaruus. Tällöin jokaisella kutistavalla kuvauksella $F: X \rightarrow X$ on täsmälleen yksi kiintopiste. Jos F on K -kutistava ja x_0 on sen kiintopiste, niin*

$$d(x_0, F^k(x)) \leq K^k d(x_0, x)$$

kaikille $x \in X$.

Todistus. Olkoon $x \in X$, ja olkoot $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Tällöin

$$\begin{aligned} d(F^m(x), F^n(x)) &\leq \sum_{k=0}^{n-m-1} d(F^{m+k}(x), F^{m+k+1}(x)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-m-1} d(F^{m+k}(x), F^{m+k}(F(x))) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-m-1} K^{m+k} d(x, F(x)) \leq \frac{K^m}{1-K} d(x, F(x)). \end{aligned}$$

Siis jono $(F^j(x))_{j=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono, ja koska X on täydellinen, jono $(F^j(x))_{j=1}^{\infty}$ suppenee kohti jotain pistettä $x_{\infty} \in X$.

Piste x_{∞} on kuvauksen F kiintopiste, sillä kaikille $j \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned} d(x_{\infty}, F(x_{\infty})) &\leq d(x_{\infty}, F^j(x)) + d(F^j(x), F^{j+1}(x)) + d(F^{j+1}(x), F(x_{\infty})) \\ &\leq (1 + K)d(x_{\infty}, F^j(x)) + K^j d(x, F(x)) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

kun $j \rightarrow \infty$. Metriikan positiivisuudesta seuraa, että $x_{\infty} = F(x_{\infty})$.

Osoitetaan vielä, että kiintopisteitä on täsmälleen yksi. Jos x_{∞} ja y_{∞} ovat kiintopisteitä, niin

$$Kd(x_{\infty}, y_{\infty}) \geq d(F(x_{\infty}), F(y_{\infty})) = d(x_{\infty}, y_{\infty}),$$

joten $d(x_{\infty}, y_{\infty}) = 0$, ja siis $x_{\infty} = y_{\infty}$.

Eksponentiaalinen suppenemisnopeus kiintopisteeseen on helppo todeta: Jos x_0 on kiintopiste, niin kaikille $x \in X$ pätee

$$d(F^k(x), x_0) = d(F^k(x), F^k(x_0)) \leq K^k d(F^k(x), x_0). \quad \square$$

Seuraavissa luvuissa sovellamme kutistavia kuvauksia differentiaaliyhtälöiden teoriaan ja numeeriseen analyysiin.

2.2 Picardin iteraatio

Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ ja $I \subset \mathbb{R}$ avoimia joukkoja ja $f: U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuva kuvaus. Merkintä $\dot{x}(t) = x'(t)$ tarkoittaa vektoriarvoisen kuvauksen $x: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Delta \subset \mathbb{R}$ derivaattaa.

Differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = f(x, t), \tag{2.1}$$

ratkaisu alkuarvolla $x(t_0) = x_0$ on differentioituva kuvaus $x: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ joltain avoimelta väliltä $\Delta \subset \mathbb{R}$, jolle pätee $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ kaikilla $t \in \Delta$ ja $x(t_0) = x_0$. Komponenteittain kirjoitettuna yhtälö (2.1) on differentiaaliyhtälöryhmä (2.1) on

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1((x_1, \dots, x_n), t), \\ \dot{x}_2 = f_2((x_1, \dots, x_n), t), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n((x_1, \dots, x_n), t). \end{cases} \tag{2.2}$$

Jos differentiaaliyhtälön oikean puolen kuvauksen arvo ei riipu muuttujan t arvosta, tämä riippuvuus jätetään pois ja tarkastellaan kuvauksen $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ määräämää *autonomista* differentiaaliyhtälöä

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.3}$$

Autonomisen differentiaaliyhtälön (2.3) ratkaisu alkuarvolla $x(t_0) = x_0$ on differentioituva kuvaus $x: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ joltain avoimelta väliltä $\Delta \subset \mathbb{R}$, jolle pätee $\dot{x}(t) = f(x(t))$ $t \in \Delta$ ja $x(t_0) = x_0$.

Todistamme kutistusperiaatteen avulla differentiaaliyhtälöiden alkuarvot tehtävien ratkaisujen olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen. Todistus on itse asiassa sama Picardin iteraatio, jolla yksiulotteinen tapaus on tapana todistaa differentiaaliyhtälöiden kurssilla.

Lause 2.2 (OY-lause). *Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ avoin väli, ja olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Olkoon $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuva kuvaus, jolle kuvaus $x \mapsto f(t, x)$ on M -Lipschitz jokaisella $t \in I$. Jokaisella $(a, b) \in I \times U$ on $\delta > 0$ siten, että alkuarvotehtävällä*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(a) = b \end{cases} \quad (2.4)$$

on välillä $]a - \delta, a + \delta[$ määritelty yksikäsitteinen ratkaisu.

Todistus. Todistamme lauseen tapauksessa, jossa $U = \mathbb{R}^n$ ja $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on M -Lipschitz.¹

Valitaan $0 < \delta < \frac{1}{M}$. Olkoon $(a, b) \in]a - \delta, a + \delta[\times \mathbb{R}^n$. *Picardin operaattori* on kuvaus $\mathcal{P}_{a,b}: \mathcal{C}^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n)$, joka määritellään asettamalla

$$\mathcal{P}_{a,b}(\phi)(t) = b + \int_a^t f(s, \phi(s)) ds$$

kaikille $\phi \in \mathcal{C}^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n)$.

Teemme kaksi oleellista havaintoa Picardin operaattorista:

Lemma 2.3. *Kuvaus $\phi: [a - \delta, a + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on alkuarvotehtävän (2.4) ratkaisu välillä $]a - \delta, a + \delta[$, jos ja vain jos se on Picardin operaattorin $\mathcal{P}_{a,b}$ kiintopiste.*

Todistus. Kuvaus ϕ on Picardin operaattorin kiintopiste, jos ja vain jos

$$\phi(t) = b + \int_a^t f(s, \phi(s)) ds. \quad (2.5)$$

Jos ϕ on kiintopiste, se toteuttaa siis selvästi alkuehdon $\phi(a) = b$. Lisäksi kuvaus ϕ on differentioituva ja toteuttaa ehdon $\dot{\phi}(t) = f(t, \phi(t))$ analyysin peruslauseen nojalla.

Toisaalta, jos ϕ on alkuarvotehtävän (2.4) ratkaisu välillä $]a - \delta, a + \delta[$, niin kaikilla $t \in]a - \delta, a + \delta[$ pätee

$$\mathcal{P}_{a,b}(\phi)(t) = b + \int_a^t f(s, \phi(s)) ds = b + \int_a^t \dot{\phi}(s) ds = \phi(t),$$

joten ϕ on kiintopiste. □

Lemma 2.4. *Picardin kuvaus on kutistava maksimimetriikan suhteen.*

Todistus. Käyttämällä oletusta Lipschitz-jatkuvuudesta funktion f toisen komponentin suhteen saamme

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_{a,b}(\phi) - \mathcal{P}_{a,b}(\psi)\| &= \max_{|t-a| \leq \delta} \left\| \int_a^t (f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s))) ds \right\| \\ &\leq \max_{|t-a| \leq \delta} \int_a^t \|f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s))\| ds \\ &\leq \delta M \|\phi - \psi\|. \end{aligned} \quad \square$$

¹Yleisen tapauksen todistus samalla idealla esitetään esimerkiksi kirjassa [HK].

Harjoituksissa osoitetaan, että $\mathcal{C}^0([a-\delta, a+\delta], \mathbb{R}^n)$ varustettuna maksimimetriikalla on täydellinen metrinen avaruus. Lemman 2.4 ja Lauseen 2.1 mukaan Picardin operaattorilla on täsmälleen yksi kiintopiste. Lemman 2.3 mukaan tämä kiintopiste on tarkasteltavan alkuarvotehtävän (2.4) ainoa ratkaisu välillä $]a - \delta, a + \delta[$. \square

Lausetta 2.2 voi soveltaa aina, kun $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ on \mathcal{C}^1 , sillä $f|_B$ on Lipschitz-jatkuva, kun $B \subset U$ on suljettu pallo.

Seuraus 2.5 (Autonominen OY-lause). *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ \mathcal{C}^1 -kuvaus. Jokaisella $a \in \mathbb{R}$ ja $x_0 \in U$ on $\delta > 0$ siten, että alkuarvotehtävällä*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(a) = b \end{cases} \quad (2.6)$$

on välillä $]a - \delta, a + \delta[$ määritelty yksikäsitteinen ratkaisu. \square

Esimerkki 2.6. Etsitään alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{y} = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

ratkaisua Picardin iteraatiolla: Valitaan ensimmäiseksi arvaukseksi vakiofunktio $y_0(t) = 1$. Tällöin

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mathcal{P}(y_0)(t) = 1 + \int_0^t ds = 1 + t, \\ y_2(t) &= \mathcal{P}(y_1)(t) = 1 + \int_0^t (1 + s) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}, \end{aligned}$$

ja induktiolla

$$y_k(t) = \mathcal{P}(y_{k-1})(t) = \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!}.$$

Kuvausten y_k muodostama jono suppenee kohti eksponenttifunktiota tasaisesti kompakteilla väleillä.

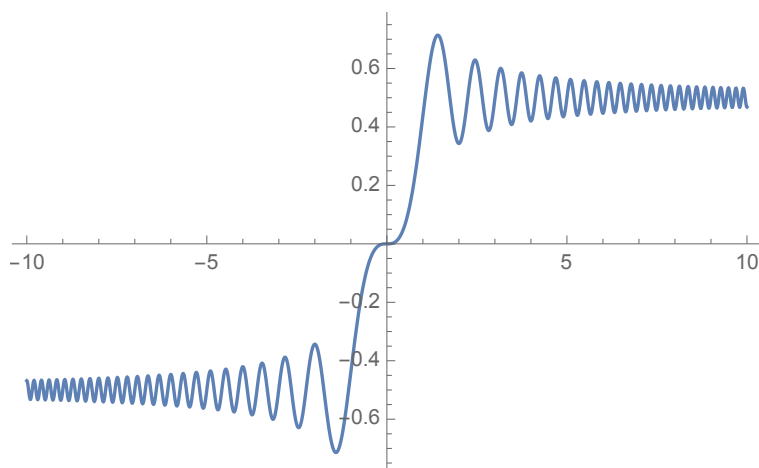
2.3 Newtonin menetelmä

Derivoituvan funktion nollakohtia voi etsiä numeerisesti seuraavalla klassisella *Newtonin menetelmällä*: Olkoon $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivoituva. Arvataan, että pisteen x_0 lähellä voisi olla funktion f nollakohta. Piirretään funktion f kuvaajalle tangentti pisteeseen $(x_0, f(x_0))$. Otetaan seuraavaksi arvaukseksi piste

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

jossa tangenttisuora leikkaa x -akselin. Iteroidaan tätä prosessia: Oletetaan, että piste x_k on konstruoitu. Piirretään funktion f kuvaajalle tangentti pisteeseen $(x_k, f(x_k))$. Oetaan seuraavaksi arvaukseksi piste

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

Kuva 2.1: Fresnelin S -funktio.

jossa tangenttisuora leikkaa x -akselin. Näin voidaan tehdä tietenkin vain, jos $f'(x_k) \neq 0$.

Geometrisen tarkastelun sijaan Newtonin menetelmää voidaanakin siis tarkastella kuvauksen

$$x \mapsto F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

iterointina sellaisessa välin I osajoukossa, jossa se mahdollisesti määrittelee dynaamisen systeemin. Kuvauksen F kiintopisteessä x_0 pätee $x_0 = F(x_0) = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, siis $f(x_0) = 0$.

Esimerkki 2.7. Esimerkiksi optiikassa esiintyvä *Fresnelin S -funktio* $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään asettamalla kaikille $x \in \mathbb{R}$

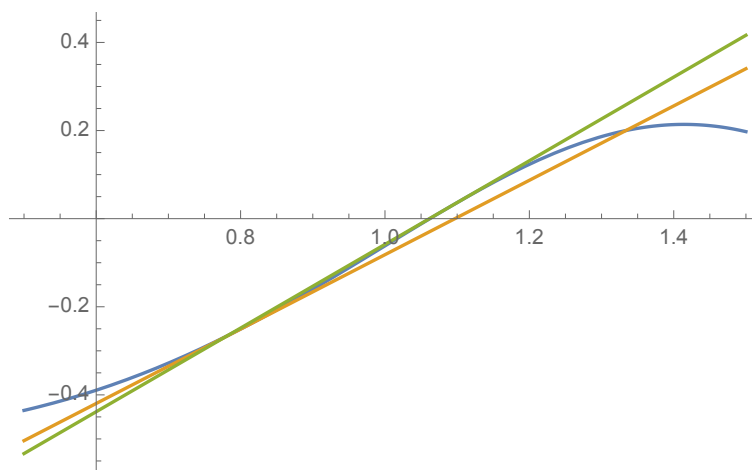
$$S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt.$$

Etsitään Newtonin menetelmällä likiarvoa pienimmälle positiiviselle muuttujan x arvolle, jolla $S(x) = \frac{1}{2}$. Olkoon siis $h = S - \frac{1}{2}$. Arvataan kuvien 2.1 ja 2.2 perusteella, että funktion h nollakohta on pisteen $x_0 = 0.8$ lähellä. Olkoon $F_h(t) = t - \frac{h(t)}{h'(t)}$. Nyt

k	t	$h(t)$	$F_h(t)$
	0.8	-0.251	1.09687
1	1.09687	0.0335346	1.06156
2	1.06156	-0.000585372	1.06215
3	1.06215	-1.18172 10^{-7}	1.06215

Kolmas ja neljäs iteraatti antavat siis saman arvon viiden desimaalin tarkkuudella. Näyttää siltä, että likiarvo jonon $(F_h^k(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$ raja-arvolle on löytynyt ja että se on funktion h nollakohta.

Osoitamme seuraavaksi, että sopivilla oletuksilla Newtonin menetelmä antaa hyvän likiarvon nollakohdalle erittäin nopeasti.



Kuva 2.2: Fresnelin S -funktion $\frac{1}{2}$ -arvon etsiminen Newtonin menetelmällä graafisesti.

Lause 2.8 (Newtonin menetelmä). *Olkoon $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ kaksi kertaa jatkuvasti differentioituva. Olkoon $J_0 \subset I$ suljettu ja rajoitettu väli. Oletetaan, että funktiolla f on nollakohta välillä J_0 ja että sen derivaatalla ei ole nollakohtaa välillä J_0 . Olkoon $F: J_0 \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Tällöin on jokin väli $J \subset J_0 \subset I$ siten, että jono $F^k(x)$ suppenee kohti funktion f nollakohtaa eksponentiaalisella nopeudella kaikilla $x \in J$.

Todistus. Koska $F'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$, niin sen kiintopisteessä x_0 , joka on funktion f nollakohta, pätee $F'(x_0) = 0$. Siis jokaisella $0 < c < 1$ on pisteen x_0 ympäristö, jossa pätee $|F'(x)| \leq c$. Tässä ympäristössä F on c -kutistava Proposition 1.9 nojalla. \square

Esimerkki 2.7 jatkuu. Ei ole kovin vaikea tarkastaa, että Newtonin menetelmässä käytettävä kuvaus

$$F'_h(x) = \pi t \left(S(x) - \frac{1}{2} \right) \cot \frac{\pi t^2}{2}$$

toteuttaa $|F'_h(x)| < \frac{1}{2}$ välillä $[0.8, 1.2]$. Koska funktion S nollakohta x_∞ on tällä välillä, pätee $|0.8 - x_\infty| \leq 0.4$. Lauseen 2.8 nojalla pätee

$$|F_h^k(0.8) - x_\infty| \leq \frac{1}{5} \frac{1}{2^k} < 0.001 \quad (2.7)$$

kun $k \geq 8$. Edellä tehtyjen kokeilujen nojalla iteraatit suppenevat kohti nollakohtaa huomattavasti nopeammin. Arviota voisi tarkentaa parantamalla derivaatan $F'_h(x)$ itseisarvon arviota iteraation edetessä. Esimerkiksi tiedetään, että $|F_h^2(0.8) - x_\infty| < 0.1$, joten $x_\infty \in [0.96, 1, 1.17]$ ja tällä välillä $|F'_h(x)| < \frac{1}{4}$ ja niin edelleen. Tyydymme kuitenkin tällä kertaa hieman karkeaan eksponentiaaliseen arviointiin (2.7).

Harjoitustehtäviä

2.1. Osoita, että lauseke

$$d(f, g) = \max_{s \in [a, b]} |f(s) - g(s)|$$

on etäisyysfunktio jatkuvien funktioiden avaruudessa $C^0([a, b], \mathbb{R})$.

2.2. Osoita, että $(C^0([a, b], \mathbb{R}), d)$ on täydellinen metrinen avaruus, kun d on tehtävässä 2.1 määritelty etäisyysfunktio.

2.3. Etsi alkuarvot tehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

ratkaisua Picardin iteraatiolla kolmen iteraation verran. Alkuarvot tehtävän ratkaisun voi arvata kolmen iteraation jälkeen tai laskea muilla menetelmillä, jos tuntee differentiaaliyhtälöiden ratkaisutekniikoita.

2.4. Laske Newtonin menetelmän avulla luvun $\sqrt{2}$ likiarvo kolmen desimaalin tarkkuudella. Perustele arvion tarkkuus.²

2.5. Laske Newtonin menetelmän avulla luvun π likiarvo viiden desimaalin tarkkuudella. Perustele arvion tarkkuus.³

²Etsi likiarvo polynomifunktion $x \mapsto x^2 - 2$ nollakohdalle, jonka tiedetään olevan välillä $[1, 2]$.

³ $\sin(\pi) = 0$.

Luku 3

Ympyrän kierrot

Tässä luvussa tutustumme ympyrän kiertojen määräämiin dynaamisiin systeemeihin. Havaitsemme, että kiertokulmasta riippuen joko kaikki pisteet ovat jaksollisia samalla jaksolla tai mikään piste ei ole jaksollinen. Näiden systeemien dynamiikka on melko säännöllistä.

3.1 Ympyrä ja kierrot

Parametrisoidaan ympyrä

$$\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

kuvauksella $\tilde{\Phi}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$,

$$\tilde{\Phi}(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)) = \cos(2\pi s) + i \sin(2\pi s) = e^{i2\pi s}.$$

Tällöin $\tilde{\Phi}(s+k) = \tilde{\Phi}(s)$ kaikilla $s \in \mathbb{R}$ ja kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Samastamme ympyrän \mathbb{S}^1 tekijäjoukon \mathbb{R}/\mathbb{Z} kanssa, missä s ja t ovat samassa ekvivalenssiluokassa

$$[s] = s + \mathbb{Z} = \{s + k : k \in \mathbb{Z}\},$$

jos ja vain jos $s - t \in \mathbb{Z}$. Huomaa, että $\tilde{\Phi}(s) = \tilde{\Phi}(t)$, jos ja vain jos $s - t \in \mathbb{Z}$, joten $\tilde{\Phi}$ määrää bijektion $\Phi: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}^1$,

$$\Phi[s + \mathbb{Z}] = \tilde{\Phi}(s).$$

Tehdään ympyrästä metrinen avaruus asettamalla pisteiden $[s], [t] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ etäisyydeksi

$$d([s], [t]) = \min_{s' \in [s], t' \in [t]} |s' - t'| = \min \left\{ |[s] - [t]|, 1 - |[s] - [t]| \right\}. \quad (3.1)$$

Tässä $[x]$ on reaalin x kokonaisosa

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\},$$

joka antaa ekvivalenssiluokalle $[s]$ yksikäsitteisen edustajan $[s] \in [0, 1[$. Jos ympyrä ajatellaan kompleksitason osajoukkona ja $u = \Phi(s), v = \Phi(t) \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$, niin

$$d([s], [t]) = \frac{\angle(\Phi(s), \Phi(t))}{2\pi} = \frac{|\text{Arg}(u/v)|}{2\pi},$$

missä $\text{Arg } z \in]-\pi, \pi]$ on kompleksiluvun $z \neq 0$ argumentin päähaara, yksikäsitteinen luku välillä $]-\pi, \pi]$, jolle pätee $z = |z| e^{i \text{Arg } z}$.

Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$. Euklidisen tason *kierto kulmalla* $2\pi\alpha$ on ortogonaalinen lineaarikuvaus, jota esittää standardikannassa matriisi

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\alpha) & -\sin(2\pi\alpha) \\ \sin(2\pi\alpha) & \cos(2\pi\alpha) \end{pmatrix}.$$

Kierron R_α rajoittuma ympyrälle \mathbb{S}^1 on *ympyrän kierto*.

Kierto R_α on *rationaalinen*, jos $\alpha \in \mathbb{Q}$ ja *irrationaalinen*, jos $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Tason tai ympyrän kierto voidaan ilmaista kompleksiluvuilla

$$R_\alpha(z) = e^{i2\pi\alpha} z$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

Merkitsemme ympyrän kiertoa samalla merkinnällä R_α riippumatta siitä, tarkastelemme ko ympyrää \mathbb{S}^1 tason \mathbb{R}^2 tai kompleksilukujen osajoukkona kulmametriikalla vai tekijäavaruuksena \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Lemma 3.1. *Ympyrän mallissa \mathbb{R}/\mathbb{Z}*

$$R_\alpha([s]) = [s + \alpha]$$

kaikille $s \in \mathbb{R}$. *Kierto R_α on isometria.*¹

Todistus. Huomataan ensin, että jos $k \in \mathbb{Z}$, niin pätee

$$R_\alpha[s + k] = [s + k + \alpha] = [s + \alpha] = R_\alpha[s],$$

joten haluttu lauseke on hyvin määritelty riippumatta joukon \mathbb{R}/\mathbb{Z} alkion edustajasta. Ensimmäinen väite seuraa huomaamalla, että

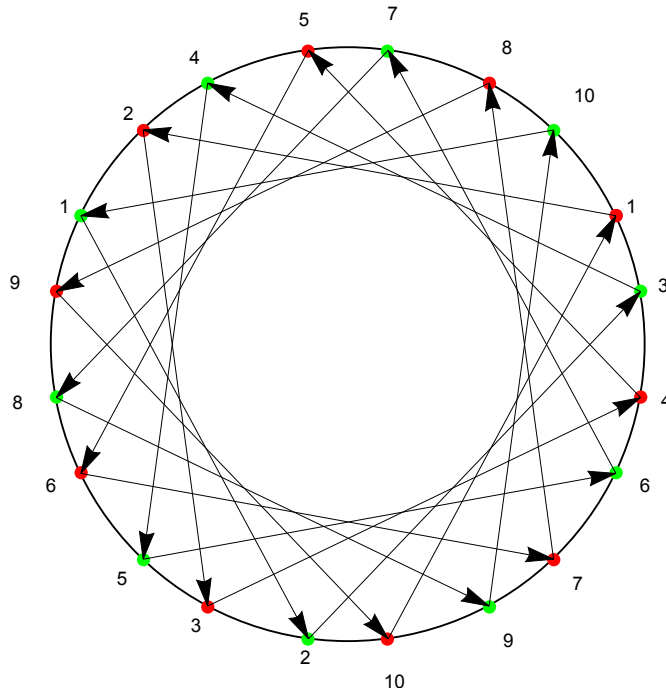
$$R_\alpha \tilde{\Phi}(s) = \tilde{\Phi}(s + \alpha)$$

ja toinen siitä, että $(s + \alpha) - (t + \alpha) = s - t$ kaikille $s, t \in \mathbb{R}$. □

Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli. Joukko $\Phi(I)$ on ympyrän \mathbb{S}^1 väli.

Yleensä kutsumme väliä $\Phi(I)$ yksinkertaisemmin ympyrän väliksi I . Erityisesti, jos $a, b \in \mathbb{R}$, tarkoitamme ympyrän välillä $[a, b]$ joukkoa $\Phi([a, b])$.

¹Kaikille $s, t \in \mathbb{S}^1$ pätee $d(R_\alpha(s), R_\alpha(t)) = d(s, t)$.



Kuva 3.1: Rationaalisen kierron $R_{\frac{3}{10}}$ radat ovat 10-jaksollisia.

Propositio 3.2. (1) Rationaalisen kierron kaikki radat $x \in \mathbb{S}^1$ ovat jaksollisia. Jos $\alpha \in \mathbb{Q}$ ja $\alpha = \frac{p}{q}$, missä $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} - \{0\}$ ja lukujen p ja q suurin yhteinen tekijä on 1, niin jokaisen pisteen $x \in \mathbb{S}^1$ jakso kierrolla R_α on q .

(2) Irrationaalisen kierron kaikki radat ovat tiheitä.

Todistus. (1) Huomataan, että $R_\alpha^q([s]) = [s + p] = [s]$ kaikille s . Jos rationaaliluku $\frac{p}{q}$ on supistetussa muodossa, niin $k \frac{p}{q} \notin \mathbb{Z}$, kun $1 \leq k < q$.

(2) Jos olisi $x \in \mathbb{S}$, jolle $\overline{\mathcal{O}_{R_\alpha}^+(x)} \neq \mathbb{S}^1$, niin olisi jokin avoin väli

$$\emptyset \neq U \subset \mathbb{S} - \overline{\mathcal{O}_{R_\alpha}^+(x)}.$$

Olkoon U inklusion suhteen maksimaalinen tällainen väli. Tällöin $R_\alpha^k(U) \cap R_\alpha^\ell(U) = \emptyset$ kaikilla $k \neq \ell$, $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Jos nimittäin $R_\alpha^k(U) = R_\alpha^\ell(U)$, niin $R_\alpha^{k-\ell} = \text{id}$, mikä on mahdotonta. Koska U on valittu maksimaaliseksi, niin välit eivät voi leikata muulla tavalla. Mutta nythän joukko $\bigcup_{k=0}^{\infty} R_\alpha^k(U)$ koostuu keskenään samanpituuisista erillisistä väleistä, koska kierrot ovat ympyrän \mathbb{S}^1 isometrioita. Siis sen pituus on ääretön. Tämä on mahdotonta, koska ympyrän pituus on 1. \square

3.2 Tasainen jakautuminen

Tarkastelemme seuraavassa lähemmin, miten pisteen rata jakautuu ympyrälle irrationaalilla kierrolla. Proposition 3.2 nojalla rata on tiheä ja nyt osoitamme, että se on tiheä hyvin tasaisella tavalla.

Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Olkoon $\Delta \subset \mathbb{S}^1$ väli ja olkoon

$$\mathcal{N}_\Delta(n, x) = \#\{k \in [0, n] \cap \mathbb{N} : R_\alpha^k(x) \in \Delta\}.$$

Funktio $\rho: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$,

$$\rho_\Delta(n, x) = \frac{1}{n} \mathcal{N}_\Delta(n, x)$$

on *suhteellinen taajuus*, jolla pisteen x positiivisen radan alkuosa iteraattiin $R_\alpha^n(x)$ saakka vierailee välillä Δ .

Olkoon välin $\Delta \subset \mathbb{S}^1$ pituus $\lambda(\Delta)$.

Lemma 3.3. *Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ja olkoot $\Delta_1, \Delta_2 \subset \mathbb{S}^1$ välejä. Jos $\lambda(\Delta_1) < \lambda(\Delta_2)$, niin on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $\mathcal{N}_{\Delta_1}(n, x) \leq \mathcal{N}_{\Delta_2}(n + N, x)$ kaikille $x \in \mathbb{S}^1$ ja kaikille $n \in \mathbb{N}$.*

Todistus. Harjoitustehtävä 3.1. □

Haluamme osoittaa, että jono $(\rho_\Delta(n, x))_{n \in \mathbb{N} - \{1\}}$ suppenee kohti raja-arvoa, joka on riippumaton pisteestä $x \in \mathbb{S}^1$.

reaalilukujonon $(a_n)_{n \in \mathbb{N} - \{1\}}$ *yläraja-arvoa*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} a_m = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{m \geq n} a_m$$

ja *aläraja-arvoa*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \geq n} a_m = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{m \geq n} a_m,$$

Lemma 3.4. *Jokaisella reaalitylukujonolla on ylä- ja aläraja-arvo laajennetussa reaalitylukujen joukossa*

$$[-\infty, \infty] = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Todistus. Jono $(\sup_{m \geq n} a_m)_{n=1}^\infty$ on vähenevä, joten $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} a_m = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{m \geq n} a_m$. Jokaisella reaalitylukujen epätyhjällä osajoukolla on infimum joukossa $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}$. Toinen väite todistetaan vastaavalla havainnolla. □

Lemma 3.5. *Reaalitylukujonolla $(a_n)_{n \in \mathbb{N} - \{1\}}$ on raja-arvo täsmälleen silloin, kun sen ylä- ja aläraja-arvot yhtyvät. Tällöin*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Todistus. Harjoitustehtävä 3.2. □

Lemma 3.6. *Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ja olkoon $\Delta \subset \mathbb{S}^1$ väli. Jos $\lambda(\Delta) = \frac{1}{k}$, niin*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_\Delta(x, n) \leq \frac{1}{k-1}.$$

Todistus. Olkoot $V_j = [\frac{j-1}{k-1}, \frac{j}{k-1}] \subset \mathbb{S}^1$. Tällöin välit V_j ovat erillisiä ja

$$V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{k-1} = \mathbb{S}^1.$$

Lemman 3.3 nojalla on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $\mathcal{N}_\Delta(x, n) \leq \mathcal{N}_{V_j}(x, n + N)$ kaikille $n \in \mathbb{N}$ ja $j \in 1, 2, \dots, k-1$. Siispä

$$(k-1)\mathcal{N}_\Delta(x, n) \leq \sum_{j=1}^{k-1} \mathcal{N}_{V_j}(x, n + N) = \mathcal{N}_{\mathbb{S}^1}(x, n + N) = n + N,$$

joten

$$(k-1)\rho_\Delta(n, x) \leq \frac{n + N}{n},$$

mistä väite seuraa, koska $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+N}{n} = 1$. □

Lause 3.7. *Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Olkoon $\Delta \subset \mathbb{S}^1$ väli. Tällöin*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_\Delta(n, x) = \lambda(\Delta).$$

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Olkoon Δ' väli, joka sisältää välin Δ siten, että jollain $\ell, k \in \mathbb{N}$ pätee

$$\lambda(\Delta') = \frac{\ell}{k} < \lambda(\Delta) + \varepsilon.$$

Nyt jakamalla Δ' yhtä pitkiin osaväleihin, joita on ℓ kappaletta, saadaan

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_\Delta(x, n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_{\Delta'}(x, n) \leq \frac{\ell}{k-1} \leq (\lambda(\Delta) + \varepsilon) \frac{k}{k-1}$$

Lemman 3.6 ja suhteellisen taajuuden additiivisuuden nojalla. Kun $\varepsilon \rightarrow 0$, välttämättä $k \rightarrow \infty$, joten

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_\Delta(x, n) \leq \lambda(\Delta). \quad (3.2)$$

Välin Δ komplementin tarkasteleminen antaa

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_{\mathbb{S}^1 - \Delta}(x, n) \leq \lambda(\mathbb{S}^1 - \Delta).$$

Koska aina pätee $\rho_\Delta(x, n) + \rho_{\mathbb{S}^1 - \Delta}(x, n) = 1$, niin

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \rho_\Delta(x, n) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_{\mathbb{S}^1 - \Delta}(x, n) = 1,$$

ja saamme

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \rho_\Delta(x, n) \geq 1 - \lambda(\mathbb{S}^1 - \Delta) = \lambda(\Delta). \quad (3.3)$$

Väite seuraa epäyhtälöistä (3.2) ja (3.3) ja Lemmasta 3.5. □

Lauseen 3.7 nojalla sanotaan, että irrationaalisen kierron rata on *tasaisesti jakautunut* ympyrällä. Väite yleistyy välien karakterististen funktioiden avulla integroituvia funktioita koskevaksi.

Olkoon $X \neq \emptyset$ ja olkoon $A \subset X$. Joukon A *karakteristinen funktio* eli *indikaattorifunktio* on kuvaus $\mathbb{1}_A: X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in A \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Lause 3.8. *Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Riemann-integroituville funktioille $\phi: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ pätee*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi(R_\alpha^n(x)) = \int_{\mathbb{S}^1} \phi(s) ds. \quad (3.4)$$

Todistus. Ehto $R_\alpha^k(x) \in \Delta$ on yhtäpitävä ehdon $\mathbb{1}_\Delta(R_\alpha^k(x)) = 1$ kanssa. Siispä Lauseen 3.7 väite on

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_\Delta(R_\alpha^n(x)) = \int_{\mathbb{S}^1} \mathbb{1}_\Delta(s) ds.$$

Funktion ϕ Riemann-integraali määritellään muotoa

$$\sum_{k=1}^N a_k \mathbb{1}_{\Delta_k}$$

olevien porraskätköiden avulla, joille väite pätee lineaarisuuden nojalla. Yksityiskohtainen todistus esitetään esimerkiksi lähteessä [HK, Thm. 4.1.15]. \square

Koska ympyrän \mathbb{S}^1 pituudeksi on sovittu 1, niin yhtälön (3.4) oikealla puolella esiintyvä integraali $\int_{\mathbb{S}^1} \phi(s) ds$ on funktion ϕ *avaruuskeskiarvo* ja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi(R_\alpha^n(x))$$

on sen *avaruuskeskiarvo*. Jos X on kompakti metrinen avaruus ja $F: X \rightarrow X$ on jatkuva kuvaus, sanotaan, että F on *yksikäsitteisesti ergodininen*, jos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi(F^n(x))$$

suppenee tasaisesti kohti vakiofunktiota kaikilla jatkuvilla funktioilla $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$. Koska jatkuvat funktiot ovat Riemann-integroituvia, Lauseen 3.8 mukaan siis ympyrän \mathbb{S}^1 irrationaaliset kierrot ovat yksikäsitteisesti ergodisia.

Mittateorian käsitteiden avulla Propositio 3.8 voidaan muotoilla myös näin: Olkoon δ_x *Diracin mitta*,

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{jos } x \in A \\ 0 & \text{jos } x \notin A \end{cases}.$$

Tällöin jono $\left(\sum_{i=1}^n \delta_{R_\alpha^n(x)} \right)_{n=1}^\infty$ heikko-*suppenee ympyrän Lebesguen mittaan, joka on normalisoitu todennäköisyysmitaksi.²

²Siis koko ympyrän mitta on 1.

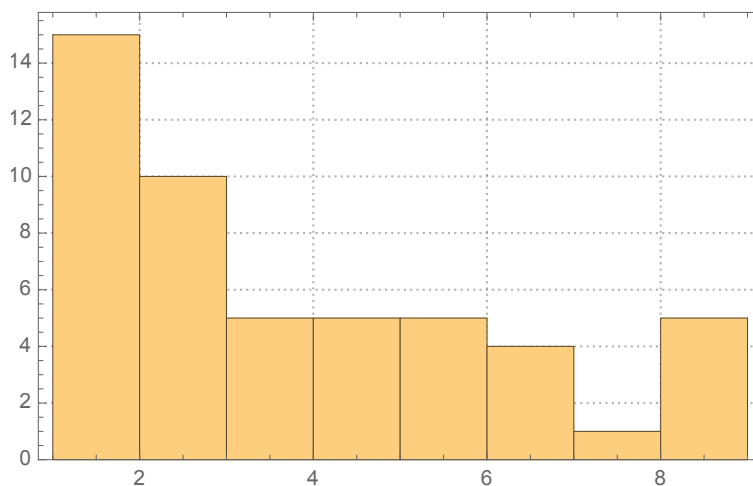
3.3 Kakkosen potenssit ja Benfordin laki

Benford [Ben] havaitsi, että monissa aineistoissa esiintyvien lukujen ensimmäisen numeron jakauma ei suinkaan ole tasainen vaan luvun 1 esiintymistiheys on noin 0.3.³ Tarkastelemme yhtä tällaista aineistoa ja selitämme Benfordin havaitseman jakauman tässä tapauksessa dynamiikan keinoilla.

Luvun 2 ensimmäiset 50 potenssia ovat

2	2048	2097152	2147483648	2199023255552
4	4096	4194304	4294967296	4398046511104
8	8192	8388608	8589934592	8796093022208
16	16384	16777216	17179869184	17592186044416
32	32768	33554432	34359738368	35184372088832
64	65536	67108864	68719476736	70368744177664
128	131072	134217728	137438953472	140737488355328
256	262144	268435456	274877906944	281474976710656
512	524288	536870912	549755813888	562949953421312
1024	1048576	1073741824	1099511627776	1125899906842624

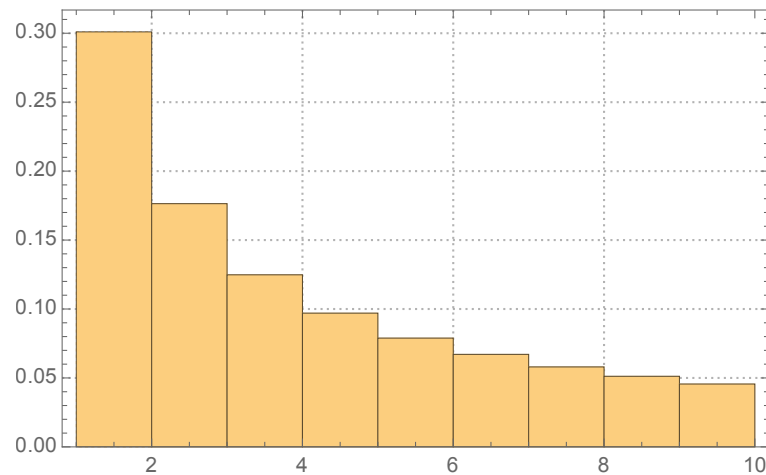
Näiden lukujen ensimmäisten numeroiden jakauma joukossa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ näyttää mielenkiintoiselta. Ensimmäisen 40 numeron joukossa ei esiinny 7 eikä 9. Vasta luvun 2^{46} ensimmäinen numero on 7!



Kuva 3.2: Lukujen 2^n ensimmäisten numeroiden jakauma, $1 \leq n \leq 50$.

Korkeammilla potensseilla kuitenkin esiintyy kaikkia eri numeroita ja 10000 ensimmäisen näin muodostetun numeron jakauma esitettynä eri numeroiden suhteellisen esiintymistiheytenä näyttää vakiintuvan kohti tiettyä jakaumaa. Kuva 3.3 näyttää luvun 2^k ensimmäisten numeroiden suhteelliset esiintymistiheydet, kun $1 \leq k \leq 10000$.

³Itse asiassa Newcomb oli tehnyt saman havainnon jo vuonna 1881 mutta ilmiö on tullut nimetyksi Benfordin mukaan. Esimerkkejä Benfordin lain mukaan käyttäytyvistä tilastoista on esitelty verkkosivulla <http://www.testingbenfordslaw.com/>.



Kuva 3.3: Ensimmäisten numeroiden suhteelliset osuudet luvuilla 2^k , kun $k \leq 10000$.

Luvun 3 ensimmäisten 50 potenssin ensimmäisten numeroiden sarja ei näytä yhtä hyvin järjestyneeltä kuin luvun 2 tapauksessa:

3	177147	10460353203	617673396283947	36472996377170786403
9	531441	31381059609	1853020188851841	109418989131512359209
27	1594323	94143178827	5559060566555523	328256967394537077627
81	4782969	282429536481	16677181699666569	984770902183611232881
243	14348907	847288609443	50031545098999707	2954312706550833698643
729	43046721	2541865828329	150094635296999121	8862938119652501095929
2187	129140163	7625597484987	450283905890997363	26588814358957503287787
6561	387420489	22876792454961	1350851717672992089	79766443076872509863361
19683	1162261467	68630377364883	4052555153018976267	239299329230617529590083
59049	3486784401	205891132094649	12157665459056928801	717897987691852588770249

Näiden lukujen ensimmäisten numeroiden jakauma näyttää karkeasti samanlaiselta kuin kakkosen potensseille ja 10000 numeron jakauma näyttää lähestyvän samaa jakaumaa kuin edellä kuten kuvien 3.3 ja 3.5 vertailu osoittaa.

Seuraava lause osoittaa tekemämme havainnon oikeaan osuneeksi ja että potenssien ensimmäiset numerot todellakin noudattavat Benfordin lakia.

Seuraus 3.9. *Olkoon $b \in \mathbb{N} - 10\mathbb{N}$, $b \geq 2$. Tällöin*

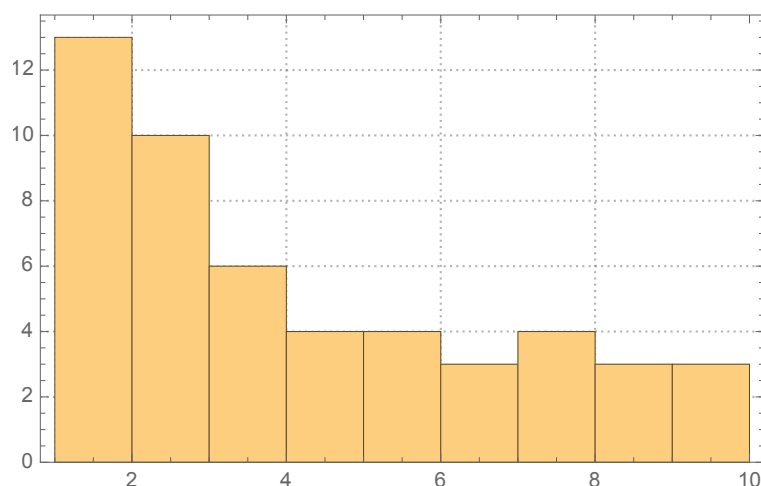
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{m \in \mathbb{N} \cap [0, n] : \text{luvun } b^m \text{ ensimmäinen numero on } k\}}{n} = \log_{10}(k) - \log_{10}(k-1).$$

Todistus. Luvun b^n ensimmäinen numero on $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$, jos ja vain jos

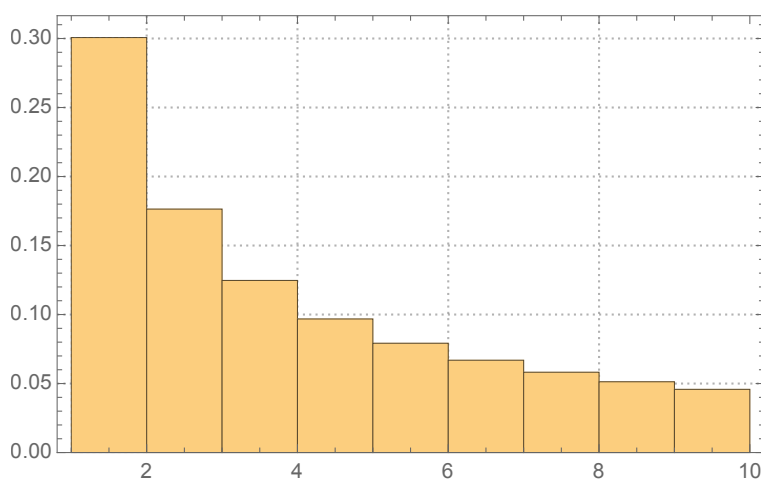
$$k \cdot 10^\ell \leq b^n < (k+1) \cdot 10^\ell$$

jollain $\ell \in \mathbb{N}$. Toisin sanoen

$$\log_{10} k + \ell \leq n \log_{10} b < \log_{10}(k+1) + \ell. \quad (3.5)$$



Kuva 3.4: Lukujen 3^n ensimmäisten numeroiden jakauma, $1 \leq n \leq 50$.



Kuva 3.5: Ensimmäisten numeroiden suhteelliset osuudet luvuilla 3^k , kun $k \leq 10000$.

Välit

$$L_k = [\log_{10} k, \log_{10}(k+1)[,$$

$k \in \{1, 2, \dots, 9\}$ jakavat ympyrän \mathbb{S}^1 kymmeneen osaan, joiden pituudet ovat $\log_{10}(k) - \log_{10}(k-1)$. Epäyhtälöpari (3.5) voidaan ilmaista ympyrälle kuvattuna muodossa

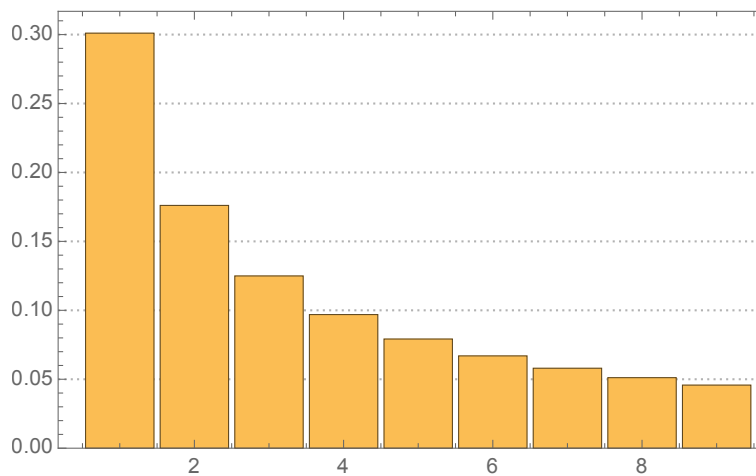
$$R_{\log_{10} 2}^n([0]) = [n \log_{10} b] \in L_k.$$

Oletuksen nojalla $\alpha = \log_{10} b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, joten kierron R_α rata on tasaisesti jakautunut. Väite seuraa tasaisesta jakautumisesta, Lause 3.7. \square

Väliden L_k pituuksista

1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.301	0.176	0.125	0.097	0.079	0.067	0.058	0.051	0.046

muodostettu pylväsdiagrammi⁴ muistuttaa hyvin tarkasti Kuvien 3.3 ja 3.5 jakaumia.



Kuva 3.6:

Harjoitustehtäviä

3.1. Todista Lemma 3.3.

3.2. Todista Lemma 3.5.

3.3. Olkoon $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reaalinen lukujono, jolle $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$. Olkoon $b_n = 1 - a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$$

3.4. Olkoon $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Osoita, että on $n \in \mathbb{N}$, jolle luvun 2^n ensimmäiset numerot ovat k .⁵

⁴Katso kuva 3.6.

⁵Esimerkiksi, jos $k = 5497$, niin luvuksi n käy 39, sillä $2^{39} = 549755813888$. Ratkaisu ei toki ole yksikäsitteinen.

Luku 4

Kulman m -kertaistava kuvaus

Luvuissa 2 ja 3 tarkasteleva dynamiikka on hyvin rauhallisesti käyttäytyvä: Kutistavien kuvausten tapauksessa kaikkien pisteiden radat lähestyvät samaa kiintopistettä eksponentiaalisella nopeudella ja ympyrän kierrolla kaikki pisteet käyttäytyvät täsmälleen samalla tavalla. Tästä luvusta alkaen tarkastelemme monimutkaisemmin käyttäytyviä systeemejä.

4.1 Kulman m -kertaistava kuvaus

Olkoon $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Olkoon $E_m : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ kulman m -kertaistava kuvaus,

$$E_m([s]) = [ms].$$

Kompleksilukujen avulla ilmaistuna E_m on kuvauksen $z \mapsto z^m$ rajoittuma yksikköympyrälle.

Lemma 4.1. *Jokaisella pisteellä $p \in \mathbb{S}^1$ on täsmälleen m alkukuvaa kuvauksella E_m .*

Todistus. Olkoon $p = [s] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Havaitaan, että $E_m\left(\left[\frac{s+k}{m}\right]\right) = [s]$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Luvut $\frac{s+k}{m} \in [0, 1[$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$, antavat jokaiselle ekvivalenssiluokalle täsmälleen yhden edustajan. \square

Propositio 4.2.

$$\mathcal{P}_n(E_m) = \left\{ \left[\frac{k}{m^n - 1} \right] \in \mathbb{S}^1 : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Todistus. Harjoitustehtävä 4.1. \square

Erityisesti kuvauksella E_m on $m-1$ kiintopistettä, kiintopisteiden joukko on

$$\mathcal{P}_1(E_m) = \left\{ \left[\frac{k}{m-1} \right] \in \mathbb{S}^1 : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Joukossa \mathcal{P}_n on $m^n - 1$ pistettä, jotka jakautuvat ympyrälle tasaisin välein. Ne jakavat ympyrän \mathbb{S}^1 väleihin, joiden pituus on $\frac{1}{m^n - 1}$.

Propositio 4.3. Kuvauksen E_m jaksollisten pisteiden joukko

$$\mathcal{P}(E_m) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n(E_m)$$

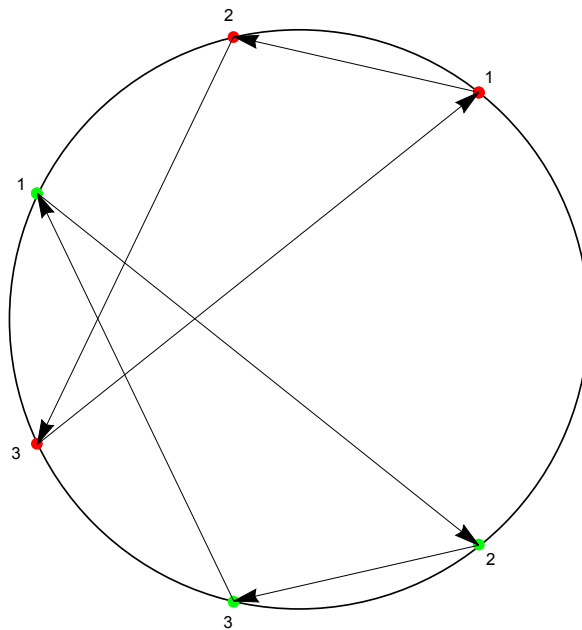
on tiheä.

Todistus. Harjoitustehtävä 4.2. □

Esimerkki 4.4. Kuvauksen E_2 kiintopisteiden joukko on $\mathcal{P}_1(E_2) = \{0\}$ ja 2-jaksollisten pisteiden joukko

$$\mathcal{P}_2(E_2) = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$$

koostuu kiintopisteestä 0 ja 2-jaksollisesta radasta $\frac{1}{3} \overset{\curvearrowright}{\longleftarrow} \frac{2}{3}$. Joukossa $\mathcal{P}_3(E_2)$ on 7 pistettä: kiintopiste 0 ja kahden 3-jaksollisen radan $\frac{1}{7} \overset{\curvearrowright}{\longleftarrow} \frac{2}{7} \overset{\curvearrowright}{\longleftarrow} \frac{4}{7}$ ja $\frac{3}{7} \overset{\curvearrowright}{\longleftarrow} \frac{6}{7} \overset{\curvearrowright}{\longleftarrow} \frac{5}{7}$ pisteet.



Kaikille jonoille $(b_i)_{i=1}^{\infty}$, missä $b_i \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ pätee

$$E_m\left(\left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{m^i}\right]\right) = \left[b_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{i+1}}{m^i}\right] = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{i+1}}{m^i}\right],$$

ja erityisesti

$$E_m^N\left(\left[\sum_{i=1}^N \frac{b_i}{m^i}\right]\right) = E_m^N\left(\left[\sum_{i=1}^N \frac{b_i m^{N-i}}{m^N}\right]\right) = [0]$$

kaikille $N \in \mathbb{N} - \{0\}$. Kulman m -kertaistava kuvaus käyttäytyy siis hyvin reaalilukujen m -kantaisen esityksen kanssa.

Reaalilukuväli $\left[\frac{k}{m^N}, \frac{k+1}{m^N}\right]$ ja ympyrän \mathbb{S}^1 väli

$$J = J_{m^N}^k = \left[\frac{k}{m^N}, \frac{k+1}{m^N}\right]$$

ovat m -adisia välejä. Välit $J_{2^N}^k$ ovat dyadisia välejä.

Lemma 4.5. $E_m^N(J_{m^N}^k) = \mathbb{S}^1$.

Todistus. Päätepisteet kuvautuvat pisteeksi $k + \mathbb{Z} = (k+1) + \mathbb{Z} = 0 + \mathbb{Z}$. Jokaiselle $0 < s < 1$ pätee $E_m^N\left(\frac{k+s}{m^N} + \mathbb{Z}\right) = s + \mathbb{Z}$, joten $E_m^N(J_{m^N}^k) = \mathbb{S}^1$. \square

Koska jokainen piste $x \in \mathbb{S}^1$ sisältyy äärettömän moneen sisäkkäiseen m -adiseen väliin, jotka kuvautuvat koko ympyräksi kuvauksen E_m sopivilla iteraateilla, on jokaisella tällaisella välillä piste, joka kuvautuu toiselle puolelle ympyrää kuin x . Sanotaan, että systeemi (E_m, \mathbb{S}^1) riippuu herkästi alkuarvoista.

Esimerkki 4.6. Kuvauksen E_m ratoja voi tarkastella m -adisten välien avulla. Rajoitutaan yksinkertaistamisen vuoksi tutkimaan kuvausta E_2 . Jokainen ympyrän piste voidaan esittää muodossa

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i}\right]$$

ja kuvaus E_2 sopii tämän esityksen kanssa hyvin yhteen. Päte nimittäin

$$E_2\left(\left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i}\right]\right) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{i+1}}{2^i}\right].$$

Tämän havainnon avulla voi määrittää pisteitä, joiden radoilla on haluttuja ominaisuuksia: Olkoon $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ jono, joka saadaan luettelemalla peräkkäin kaikki äärelliset jonot, jotka voidaan muodostaa numeroista 0 ja 1:

$$010001101110000001010011100101110111 \dots \quad (4.1)$$

Olkoon

$$p = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}\right] \in \mathbb{S}^1.$$

Huomaamme, että

$$J_{2^N}^k = \left[\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}\right] = \left\{ \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i}\right] : \sum_{i=1}^N b_i 2^{N-i} = k \right\}.$$

Siis sopivalla $M \in \mathbb{N}$ pätee $E_2^M(p) \in J_{2^N}^k$ mille tahansa dyadiselle välille, joten pisteen p rata on tiheä. Vastaavalla tavalla voidaan antaa esimerkki tiheästä radasta kuvaukselle E_m , kun $m \geq 3$, luettelemalla kaikki äärelliset jonot, jotka voidaan muodostaa numeroista $0, 1, 2, \dots, m$.

4.2 Cantorin joukko

Jonon (4.1) avulla saadaan esimerkki ehkä vielä mielenkiintoisemmasta radasta kuvaukselle E_3 . Johdantona tätä varten käsitellään tärkeää reaalilukujen osajoukkoa:

Cantorin $\frac{1}{3}$ -joukko on

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} : a_i \in \{0, 2\} \right\} \subset [0, 1]$$

Cantorin $\frac{1}{3}$ -kannattaa ajatella äärettömänä leikkauksena seuraavasti: Olkoot $I_0 = [0, 1]$, $I_1^0 = [0, \frac{1}{3}]$ ja $I_1^1 = [\frac{2}{3}, 1]$. Välit I_1^0 ja I_1^1 ovat siis ne kaksi suljettua väliä, jotka jäävät jäljelle, kun välistä I_0 poistetaan keskeltä avoin väli $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Olkoot

$$I_2^0 = \left[0, \frac{1}{3^2}\right], \quad I_2^1 = \left[\frac{2}{3^2}, \frac{1}{3}\right], \quad I_2^2 = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{3^2}\right], \quad I_2^3 = \left[\frac{8}{3^2}, 1\right]$$

ne neljä suljettua väliä, jotka jäävät jäljelle, kun väleistä I_1^0 ja I_1^1 poistetaan keskeltä avoimet välit, joiden pituus on $\frac{1}{3^2}$. Jatketaan induktiolla: Vaiheessa n on 2^n suljettua väliä $I_n^0, I_n^1, \dots, I_n^{2^n-1}$. Jokaisen välin I_n^k pituus on 3^{-n} . Näistä väleistä muodostetaan vaiheen $n+1$ välit poistamalla jokaisesta keskeltä avoin väli, jonka pituus on $3^{-(n+1)}$.

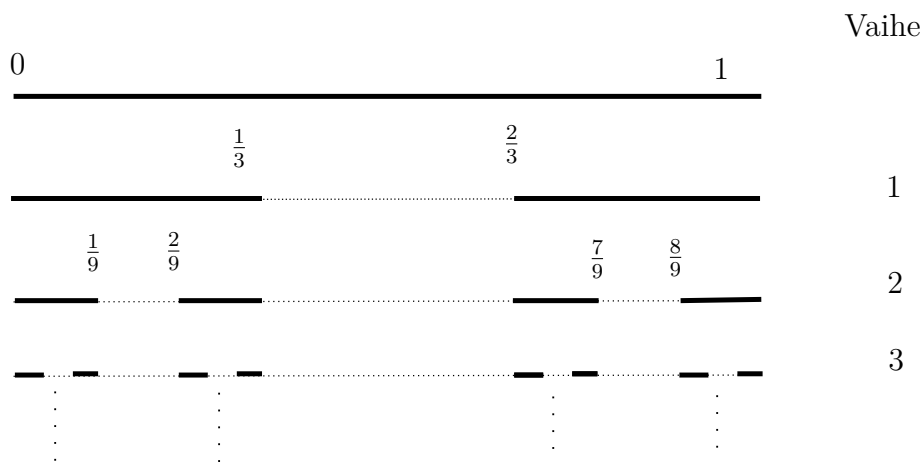
Olkoon

$$K_n = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} I_n^k.$$

Tällöin

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{2^n-1} I_n^k.$$

Koska joukot $\bigcup_{k=0}^{2^n-1} I_n^k$ ovat kompaktien joukkojen äärellisinä yhdisteinä kompakteja, K on kompaktien joukkojen leikkausjoukkona kompakti.



Koska K on joukon K_n osajoukko jokaisella $k \in \mathbb{N}$, ja välien I_n^k pituuksien summa on $(\frac{2}{3})^n$, niin Cantorin joukko K on nollamittainen joukko.

Jos valitsemme sisäkkäisen jonon Cantorin joukon konstruktiossa esiintyviä jonoja $I_1^{k(1)} \supset I_2^{k(2)} \supset I_3^{k(3)} \supset \dots$, niin analyysin kurssilla käsiteltävän *sisäkkäisten välien periaatteen* nojalla $\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i^{k(i)}$ on yhden pisteen joukko jokaisella tällaisella välien muodostamalla jonolla. Selvästi kahta eri jonoa vastaa kaksi eri pistettä koska jossain vaiheessa toiseen jonoon on valittu kahdesta mahdollisesta välistä oikeanpuoleinen ja toiseen vasemmanpuoleinen. Toisaalta jokainen piste määrää täsmälleen yhden jonon $(I_i^{k(i)})_{i=1}^{\infty}$.

Jokaiseen Cantorin joukon pisteeseen voidaan liittää yksikäsitteinen *osoite*, joka on jono $(a_i)_{i=1}^{\infty}$, missä $a_k = 0$, jos k . vaiheessa valitaan vasemmanpuoleinen kahdesta mahdollisesta jonosta ja $a_k = 1$, jos k . vaiheessa valitaan oikeanpuoleinen väli. Jos $x \in I_k^{\ell}$, niin äärellisen pituiseksi katkaistu koodi $a_1 a_2 \dots a_k$ on luvun ℓ binääriesitys.

Edellä esitetty koodaus antaa bijektion Cantorin joukon ja *jonoavaruuden*¹

$$\Sigma_2 = \{\omega : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}\}$$

välille. Cantorin diagonaalitodistuksen avulla on nyt helppo osoittaa, että K on ylinumeroituva.

Esimerkki 4.7. Kaikille jonoille $(b_i)_{i=1}^{\infty}$ pätee

$$E_3\left(\left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}\right]\right) = \left[b_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{i+1}}{3^i}\right] = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{i+1}}{3^i}\right],$$

joten Cantorin $\frac{1}{3}$ -joukon K kuva ympyrällä

$$[K] = \{[x] \in \mathbb{S}^1 : x \in K\}$$

on E_3 -invariantti.

Olkoon $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ Esimerkissä 4.6 määritelty jono (4.1). Olkoon

$$q = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2a_i}{3^i}\right] \in \mathbb{S}^1.$$

Kuten kuvauksen E_2 tapauksessa näemme, että sopivalla $M \in \mathbb{N}$ pätee $E_3^M(q) \in I_N^k$ mille tahansa $N \in \mathbb{N}$ ja $k \in \mathbb{Z}$. Siis pisteen q radan sulkeuma on Cantorin $\frac{1}{3}$ -joukon K kuva ympyrällä \mathbb{S}^1 .

Harjoitustehtäviä

4.1. Todista Propositio 4.2.

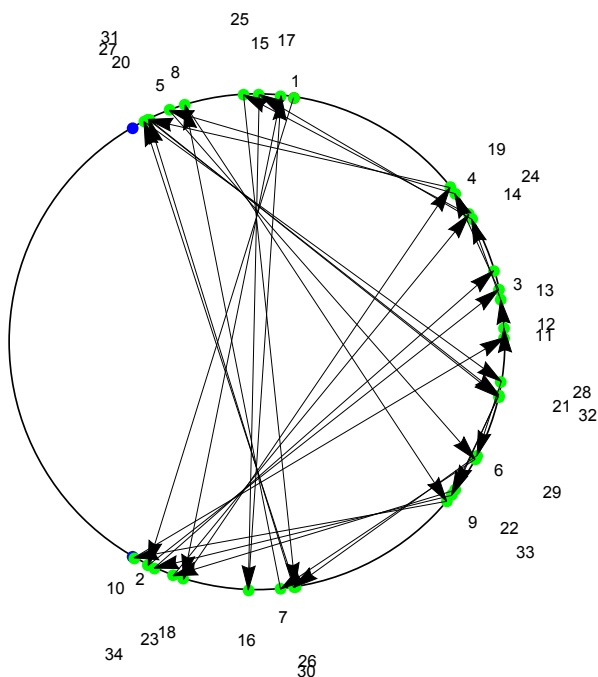
4.2. Todista Propositio 4.3.

4.3. Määritä kaikki systeemin $E_3: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ radat, joiden jaksot ovat 1, 2 tai 3.

4.4. Olkoon $x \in \mathbb{S}^1$ ja olkoon $\varepsilon > 0$. Osoita, että välillä $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ on kuvauksen E_2 jaksollisia pisteitä ja pisteitä, joiden rata kuvauksella E_2 on tiheä.

4.5. Osoita, että Cantorin $\frac{1}{3}$ -joukko $K \subset \mathbb{R}$ on ylinumeroituva.

¹Tarkastelemme jonoavaruuksia lähemmin luvussa 5.



Kuva 4.1: Piste q rataa kuvauksella E_3 .

4.6. Osoita, että

$$[K] = \left\{ x \in \mathbb{S}^1 : E_3^k(x) \notin \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right] \forall k \in \mathbb{N} \right\}.$$

4.7. Olkoon

$$[K] = \{ [x] \in \mathbb{S}^1 : x \in K \}.$$

Olkoon $s: [K] \rightarrow \mathbb{S}^1$ kuvaus, joka määritellään asettamalla

$$s\left(\left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}\right]\right) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i/2}{2^i}\right] = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^{i+1}}\right].$$

Osoita, että s on hyvin määritelty jatkuva surjektio, joka ei ole injektio. Osana tätä osoita, että pisteillä, jotka ovat muotoa $\frac{k}{2^n}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ on kaksi 2-kantaista esitystä. Osoita, että

$$s \circ E_3 = E_2 \circ s.$$

Luku 5

Symboliset dynaamiset systeemit

5.1 Jonoavaruudet

Olkoon \mathcal{A} äärellinen joukko, jossa on ainakin kaksi alkioita. Kutsumme joukkoa \mathcal{A} *aakkostoksi* ja sen alkioita *symboleiksi* tai *kirjaimiksi*. *Yksipuolinen jonoavaruus* aakkostolla \mathcal{A} on on metrinen avaruus $(\Sigma_{\mathcal{A}}, d)$, missä

$$\Sigma_{\mathcal{A}} = \{\omega: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}\} = \{a_0 a_1 a_2 \cdots : a_i \in \mathcal{A} \text{ kaikilla } i \in \mathbb{N}\}$$

ja metriikka d määritellään asettamalla $d(\omega, \omega) = 0$ kaikille $\omega \in \Sigma_N$ ja kaikille $\omega \neq \omega'$

$$d(\omega, \omega') = 2^{-m(\omega, \omega')}, \quad (5.1)$$

kun

$$m(\omega, \omega') = \min \{k : \omega(k) \neq \omega'(k)\}.$$

Kaksipuolinen jonoavaruus aakkostolla \mathcal{A} on on metrinen avaruus $(\Omega_{\mathcal{A}}, d)$, missä

$$\Omega_{\mathcal{A}} = \{\omega: \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{A}\} = \{\cdots a_{-2} a_{-1} a_0 a_1 a_2 \cdots : a_i \in \mathcal{A} \text{ kaikilla } i \in \mathbb{Z}\}$$

ja d määritellään lausekkeella 5.1, kun kun

$$m(\omega, \omega') = \min \{|k| : \omega(k) \neq \omega'(k)\}.$$

Hyvin usein valitsemme $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$. Tällöin käytämme merkintöjä

$$\Sigma_N = \Sigma_{\{0,1,\dots,N-1\}} = \{\omega: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, \dots, N-1\}\}$$

ja

$$\Omega_N = \Omega_{\{0,1,\dots,N-1\}} = \{\omega: \mathbb{Z} \rightarrow [0, N-1] \cap \mathbb{N}\}.$$

Tilanteesta ja mieltymyksistä riippuen jonoavaruuden alkioita voi käsitellä jonoina tai kuvauksina. Merkintöjen helpottamiseksi sovimme, että \bar{a}_n on äärellinen sana $aa \cdots a$, jossa symboli a esiintyy n kertaa ja että \bar{a} on tarpeen mukaan joko vasemmalta, oikealta tai

molemmista suunnista ääretön sana, jossa esiintyy ainoastaan symboli a . Yleisemmin, jos w on jokin äärellinen sana, \bar{w} on tarpeen mukaan joko vasemmalta, oikealta tai molemmista suunnista ääretön sana, jossa toistuu äärellinen sana w äärettömän monta kertaa peräkkäin.

Kaksipuolisen jonoavaruuden alkion $\omega \in \Omega_N$ kirjoittaminen jonona on itse asiassa hie-man hankalaa koska on jollain tavalla sovittava, mikä jonon indeksointi on. Toisin sanoen tarvitaan jonkinlainen osoitin, joka kertoo, missä kohtaa jonoa on $\omega(0)$. Yksipuolisessa jonoavaruudessa ei ole tätä ongelmaa.

Esimerkki 5.1. (1) $d(\bar{0}, 0001\bar{0}) = \frac{1}{8}$.

(2) Olkoon $\omega \in \Sigma_N$. Määritellään alkiot $\omega_n \in \Sigma_N$ asettamalla

$$\omega_n(k) = \begin{cases} \omega(k) & \text{kaikilla } k \neq n \\ \omega(n) + 1 \pmod N, & \text{kun } k = n. \end{cases}$$

jokaiselle $n \in \mathbb{N}$. Nyt $d(\omega, \omega_n) = 2^{-n}$ ja $\omega_n \rightarrow \omega$, kun $n \rightarrow \infty$.

Esimerkki 5.2. (1) Metriikan määritelmän nojalla kahden pisteen etäisyys on aina 2^{-i} jollain $i \in \mathbb{N}$.

(2) $\bar{B}(\omega, 1)$ on koko avaruus millä tahansa keskipisteellä $\omega \in \Sigma_N$ tai $\omega \in \Omega_N$.

(3) Olkoon $\omega \in \Sigma_N$. Tällöin

$$B(\omega, 1) = \{\omega' \in \Sigma_N : \omega'(0) = \omega(0)\}.$$

(4) Olkoon $\omega \in \Omega_N$. Tällöin jokaisella $k \in \mathbb{N}$ pätee

$$\bar{B}(\omega, 2^{-k}) = \{\omega' \in \Omega_N : \omega'|_{[-k+1, k-1]} = \omega|_{[-k+1, k-1]}\}.$$

Propositio 5.3. *Avaruudet (Σ_N, d) ja (Ω_N, d) ovat ultrametrisiä avaruuksia.*¹

Todistus. Harjoitustehtävä 5.1. □

Propositio 5.4. *Seuraavat väitteet pätevät jonoavaruuksissa Σ_N ja Ω_N .*

(1) *Jokaisen pallon jokainen piste on sen keskipiste.*

(2) *Avoimet pallot ovat suljettuja palloja ja suljetut pallot ovat avoimia palloja. Kaikilla $2^{-n} \leq r < 2^{-n+1}$ ja $2^{-n} < s \leq 2^{-n+1}$ pätee avaruudessa Σ_N*

$$\bar{B}(0, r) = B(0, s) = \{\omega \in \Sigma_N : \omega|_{[0, n]} = 0\}$$

Kaksipuolisten jonojen avaruudessa Ω_N pätee

$$\bar{B}(0, r) = B(0, s) = \{\omega \in \Omega_N : \omega|_{[-n, n]} = 0\}$$

Todistus. (1) Olkoon $x \in \Sigma_N$ ja olkoon $r > 0$. Olkoot $y, z \in B(x, r)$. Tällöin ultrametrisyyden nojalla

$$d(y, z) = \max(d(y, x), d(x, z)) < r.$$

Siis $B(x, r) \subset B(y, r)$. Samalla päättelyllä vaihtamalla pisteiden x ja y roolit saadaan $B(y, r) \subset B(x, r)$. Väite todistetaan samalla tavalla kaksipuoleisessa jonoavaruudessa.

(2) Harjoitustehtävä 5.4. □

¹Katso liite A

Olkoon $n = (n_1 < n_2 < \dots < n_K)$ luonnollisten lukujen tai kokonaislukujen järjestetty äärellinen jono ja olkoon $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K) \in \mathcal{A}^K$. Joukot

$$C_\alpha^n = \{\omega \in \Sigma_N : \omega(n_i) = \alpha_i\}$$

ja

$$C_\alpha^m = \{\omega \in \Omega_N : \omega(n_i) = \alpha_i\}$$

ovat *sylintereitä*.

Joskus, erityisesti yksipuolisten jonojen avaruudessa käytetään merkintää

$$[\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n] = C_\alpha^{[0,n] \cap \mathbb{N}}.$$

Esimerkki 5.5. Proposition 5.4 nojalla jonoavaruudessa Σ_N pätee $B(0, 2^{-(n+1)}) = C_{\bar{0}_n}^{[0,n]}$ ja jonoavaruudessa Σ_N pätee $B(0, 2^{-(n+1)}) = C_{\bar{0}_{2n+1}}^{[-n,n]}$.

Lemma 5.6. *Sylinterit ovat avoimia ja suljettuja joukkoja. Avaruuden Σ_N pallot ovat sylintereitä $C_\alpha^{[0,K] \cap \mathbb{N}}$. Avaruuden Ω_N pallot ovat symmetrisiä sylintereitä $C_\alpha^{[-K,K] \cap \mathbb{Z}}$. \square*

Todistus. Harjoitustehtävä 5.5. \square

Metrisen avaruuden X piste x on *eristetty*, jos on $r > 0$, jolle $B(x, r) = \{x\}$.

Jos metrisessä avaruudessa X ei ole eristettyjä pisteitä, sanotaan, että X on *perfekti*.

Propositio 5.7. *Avaruudet (Σ_N, d) ja (Ω_N, d) ovat kompakteja, täydellisiä, ja perfektejä metrisiä avaruuksia.*

Todistus. Kompaktius todistetaan Harjoitustehtävissä 5.6 ja 5.7.

Täydellisyys seuraa jonokompaktiudesta: Jos Cauchyn jonolla on suppeneva osajono, niin jono suppenee. Väitteen voi todistaa myös konstruktiolla: Olkoon $(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchyn jono avaruudessa Ω_N . Tällöin jokaisella $k \in \mathbb{N}$ on $M_k \in \mathbb{N}$ siten, että pätee $\omega_m|_{[-k,k]}$ on vakio kaikille $m \geq M_k$. Asetetaan $\omega(\pm k) = \omega_{M_k}(\pm k)$. Selvästi ω on tarkasteltavan jonon raja-arvo.

Yksipuolinen jonoavaruus Σ_N on perfekti esimerkin 5.1(2) nojalla. Kaksipuolisten jonojen tapaus todistetaan samaan tapaan. \square

5.2 Vasen siirto

Kuvaus $\sigma = \sigma_N: \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$ tai $\sigma = \sigma_N: \Omega_N \rightarrow \Omega_N$, joka määritellään asettamalla

$$\sigma(\omega)(k) = \omega(k+1)$$

kaikille $k \in \mathbb{N}$ tai $k \in \mathbb{Z}$, on *vasen siirto* tai *topologinen Bernoullin siirto*.

Yksipuolisen jonoavaruuden vasen siirto on surjektio ja kaksipuolisen jonoavaruuden vasen siirto on bijektio, sen käänteiskuvaus on *oikea siirto*

$$\sigma^{-1}(\omega)(k) = \omega(k-1)$$

Jonoavaruuden Σ_N osajoukko X on *siirtoinvariantti*, jos $\sigma(X) \subset X$ ja jonoavaruuden Ω_N osajoukko X on *siirtoinvariantti*, jos $\sigma(X) = X$.

Jos X on jonoavaruuden siirtoinvariantti osajoukko, niin $\sigma|_X$ määrää dynaamisen systeemin, jota kutsutaan *symboliseksi dynaamiseksi systeemiksi*.

Jos L -Lipschitz-kuvaus f on bijektio ja jos sen käänteiskuvaus on L -Lipschitz-kuvaus, niin f on L -biLipschitz-kuvaus.

Propositio 5.8. *Vasen siirto $\sigma: \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$ on 2-Lipschitz-kuvaus. Vasen siirto $\sigma: \Omega_N \rightarrow \Omega_N$ on 2-biLipschitz-kuvaus.*

Todistus. Olkoot $\omega, \omega' \in \Sigma_N$ jonoja, joiden etäisyys on 2^{-k} . Tällöin siis $\omega|_{[0,k-1] \cap \mathbb{N}} = \omega'|_{[0,k-1] \cap \mathbb{N}}$ ja $\omega(k) \neq \omega'(k)$. Vastaavasti $\sigma(\omega)|_{[0,k-2] \cap \mathbb{N}} = \sigma(\omega')|_{[0,k-2] \cap \mathbb{N}}$ ja $\sigma(\omega)(k-1) \neq \sigma(\omega')(k-1)$, joten

$$d(\sigma(\omega), \sigma(\omega')) = 2^{-(k-1)} = 2 \cdot 2^{-k} = 2d(\omega, \omega').$$

Väite kaksipuolisille jonoille todistetaan samaan tapaan. \square

Propositio 5.9. *Siirroille $\sigma: \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$ ja $\sigma: \Omega_N \rightarrow \Omega_N$ pätee $\#\mathcal{P}_n(\sigma) = N^n$. Molemmilla systeemeillä jaksollisten pisteiden joukko on tiheä.*

Todistus. Olkoon W_n niiden äärellisten sanojen joukko, joiden pituus on $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Selvästi $\#W_n = N^n$ ja pätee

$$\mathcal{P}_n(\sigma) = \{\bar{w} \in \Omega_N : w \in W_n\}.$$

Olkoon $\omega \in \Omega_N$ ja olkoon $w_n = \omega|_{[-n,n] \cap \mathbb{Z}}$. Selvästi $\bar{w}_n \rightarrow \omega$, kun $n \rightarrow \infty$. Koska \bar{w}_n on jaksollinen, jaksollisten pisteiden tiheys seuraa kaksipuolisille jonoille. Yksipuolisten jonojen väite todistetaan vastaavalla tavalla. \square

Propositio 5.10. *Siirroilla $\sigma: \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$ ja $\sigma: \Omega_N \rightarrow \Omega_N$ on tiheitä ratoja.*

Todistus. Esimerkissä 4.6 käsitellyt jonot antavat esimerkkejä pisteistä, joiden rata on tiheä avaruuksissa Σ_N . Kaksipuolisten jonojen tapaus todistetaan samaan tapaan. \square

Olkoot $\omega, \omega' \in \Sigma_N$, $\omega \neq \omega'$. Tällöin on $k \in \mathbb{N}$, jolle $\omega(k) \neq \omega'(k)$. Siis $d(\sigma^k \omega, \sigma^k \omega') = 1$. Erityisesti, jos ω ja ω' ovat lähellä toisiaan, niin $\omega|_{[0,N]} = \omega'|_{[0,N]}$ jollain N mutta $\omega(m(\omega, \omega')) \neq \omega'(m(\omega, \omega'))$. Siis $d(\sigma^{m(\omega, \omega')} \omega, \sigma^{m(\omega, \omega')} \omega') = 1$ ja näemme, että Bernoullin siirto riippuu herkästi alkuarvosta samaan tapaan kuin kulman m -kertaistavat kuvaukset.

Harjoitustehtäviä

5.1. Todista Propositio 5.3

5.2. Osoita, että jonoavaruudet Σ_N ovat ylinumeroituvia.²

5.3. Olkoot $x, y \in \Sigma_2$ ja olkoot $0 < r \leq s$. Mitä voit sanoa leikkausjoukosta $B(x, r) \cap B(y, s)$?

²Cantorin diagonaalitodistus.

5.4. Todista Proposition 5.4 kohta (2).

5.5. Todista Lemma 5.6

5.6. Osoita, että jokaisella jonoavaruuden Σ_2 jonolla on suppeneva osajono. ³

5.7. Osoita, että avaruudet Ω_2 ja Σ_2 ovat homeomorfiset. ⁴

5.8. Anna esimerkki pisteestä $\alpha \in \Omega_{\{0,1\}}$, jonka rata on tiheä vasemmalla siirrolla σ .

Olkoon $F_N: \Sigma_N \rightarrow [0, 1]$ kuvaus, joka määritellään asettamalla

$$F_N(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\omega(k)}{N^{k+1}}$$

kaikille $\omega \in \Sigma_N$.

5.9. Osoita, että kuvaus F_N on jatkuva surjektio.

5.10. Olkoon $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ ympyrän parametrisointi, joka määriteltiin luvun 3 alussa ja olkoon $E_N: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ kulman N -kertaistava kuvaus. Osoita, että

$$E_N \circ \Phi \circ F_N = \Phi \circ F_N \circ \sigma.$$

³Tämä osoittaa, että metrinen avaruus Σ_2 on kompakti. Olkoon $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ ääretön jono. Tällöin äärettömän monelle n pätee $\omega_n(0) = 0$ tai äärettömän monelle n pätee $\omega_n(0) = 1$. Siirry osajonoon ja tarkastele jonon alkioiden arvoja $\omega_n(1)$.

⁴Tämä osoittaa, että metrinen avaruus Ω_2 on kompakti. Miten kaksipuolinen jono kuvataan yksipuoliseksi jonoksi?

Luku 6

Kaoottisen dynaamiset systeemit

Edellä tarkastelemamme esimerkit kulman m -kertaistavista kuvauksista ja Bernoullin siirroista paljastavat, että nämä dynaamiset systeemit ovat ”dynamiikaltaan runsaampia” ja jossain määrin vaikeammin hallittavia kuin kutistavat kuvaukset ja ympyrän kierrot. Dynaamisilla systeemeillä (E_m, \mathbb{S}^1) ja (σ, Σ_N) on ainakin seuraavat ominaisuudet

- jaksollisten pisteiden joukko on tiheä,
- systeemillä on tiheitä positiivisia ratoja,
- pisteillä, joiden etäisyys on hyvin pieni, voi olla keskenään täysin erilainen asymp-toottinen käyttäytyminen.

Tässä luvussa tarkastelemme dynaamisten systeemien ominaisuuksia abstraktimmin kuin aiemmissa.

6.1 Topologinen transitiivisuus

Diskreetti dynaaminen systeemi $f: X \rightarrow X$ on *topologisesti transitiivinen*, jos sillä on tiheä positiivinen rata.

Metrinen avaruus on *separoituva*, jos sillä on numeroituva tiheä osajoukko.

Esimerkki 6.1. (1) Separoituvia metrisiä avaruuksia ovat esimerkiksi kaikki euklidiset avaruudet koska $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$.

(2) Kompaktit metriset avaruudet ovat separoituvia. Siis esimerkiksi \mathbb{S}^1 ja Proposition 5.7 nojalla jonoavaruudet Σ_N ja Ω_N ovat separoituvia. Nämä avaruudet ovat separoituvia silläkin perusteella, että Propositionissa 3.2, Esimerkissä 4.6 ja Propositionissa 5.10 olemme käsitelleet dynaamisia systeemejä, joilla on näissä avaruuksissa tiheitä ratoja.

(3) Ylinumeroituva diskreetti metrinen avaruus ei ole separoituva.

Jos X ei ole separoituva, niin mikään diskreetti dynaaminen systeemi $f: X \rightarrow X$ ei ole topologisesti transitiivinen, koska pisteen rata on numeroituva tai äärellinen joukko. Topologinen transitiivisuus on monissa tilanteissa yhtäpitävä avoimien joukkojen kuvautumiseen liittyvän ehdon kanssa:

Lause 6.2. *Olkoon X metrinen avaruus, jossa ei ole eristettyjä pisteitä. Olkoon $f: X \rightarrow X$ jatkuva. Jos f on topologisesti transitiivinen, niin kaikille epätyhjille avoimille joukoille $U, V \subset X$ on $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, jolle $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Todistus. Olkoon $x \in X$ piste, jolle $\overline{\mathcal{O}_f^+(x)} = X$. Olkoot U ja V epätyhjiä avoimia joukkoja. Tällöin on $n_U \in \mathbb{N}$ siten, että $y_U = f^{n_U}(x) \in U$. Radan $\mathcal{O}_f^+(x)$ alkuosa $\{f^k(x) : 0 \leq k < n_U\}$ on suljettu joukko, joten $X - \{f^k(x) : 0 \leq k < n_U\} \subset \overline{\mathcal{O}_f^+(x)}$. Olkoon W pisteen $f^k(x)$, $0 \leq k < n_U$, avoin ympäristö. Koska $f^k(x)$ ei ole eristetty piste millään $0 \leq k < n_U$, on $z_k \in W \cap (X - \{f^k(x) : 0 \leq k < n_U\})$. Siis $\mathcal{O}_f^+(y_U) \cap W \neq \emptyset$. Siis pisteen y_U rata on tiheä, joten on N_V siten, että $f^{N_V}(y_U) \in V$. \square

Esimerkki 6.3. Lauseen 6.2 käytetään oleellisella tavalla sitä, että avaruudessa X ei ole eristettyjä pisteitä. Esimerkissä 1.2 tarkasteltu Collatzin kuvaus C määrää dynaamisen systeemin äärellisessä joukossa $\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 16\}$. Pisteen 3 rata on tiheä mutta pisteen $C(3) = 10$ rata ei sisällä pistettä 3, joten se ei ole tiheä.

Lause 6.4. *Olkoon X täydellinen separoituva metrinen avaruus ja olkoon $f: X \rightarrow X$ jatkuva. Jos kaikille epätyhjille avoimille joukoille $U, V \subset X$ pätee $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ jollain $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, niin f on topologisesti transitiivinen.*

Todistus. Olkoon $A \subset X$ numeroituva tiheä osajoukko. Olkoon

$$\{U_k : k \in \mathbb{N}\} = \{B(a, r) : a \in A, r \in \mathbb{Q}_+\}.$$

Osoitamme, että on $x \in X$, jolle $\mathcal{O}_f^+(x) \cap U_k \neq \emptyset$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Koska jokainen avoin joukko sisältää ainakin yhden joukon kokoelmasta $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$,¹ niin tällaisen pisteen x rata on tiheä.

Oletuksen nojalla on $N_2 \in \mathbb{N}$, jolle $f^{N_2}(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$. Valitaan piste $a_2 \in A \cap U_1$ ja säde $r_2 \in \mathbb{Q}_+$, $r_2 \leq \frac{1}{2}$ siten, että $\overline{B(a_2, r_2)} \subset U_1 \cap (f^{N_2})^{-1}(U_2)$. Samoin on $N_3 \in \mathbb{N}$ siten, että $B(a_2, r_2) \cap (f^{N_3})^{-1}(U_3)$ on avoin epätyhjä joukko. Valitaan $a_3 \in A$ ja $0 < r_3 < 2^{-2}$, jne. Näin saadaan Cauchyn jono $(a_k)_{k=2}^\infty$, joka täydellisyyden nojalla suppenee kohti raja-arvoa $a \in X$. Konstruktiosta seuraa, että $a \in \bigcap_{k=1}^\infty \overline{B(a_k, r_k)}$, joten $f^{N_k}(a) \in U_{k+1}$ kaikilla $k \geq 1$. \square

6.2 Kaaos

Dynaamisten systeemien yhteydessä puhutaan usein hieman epämääräisesti *kaaoksesta* ilman että termin sisältöä kiinnitetään kovin tarkasti.

¹Itse asiassa jokainen epätyhjä avoin joukko sisältää äärettömän monta tällaista palloa, koska avaruudessa ei ole eristettyjä pisteitä.

Olkoon X ääretön metrinen avaruus.^a Dynaaminen systeemi (X, f, \mathbb{A}) on *kaottinen*, jos se on topologisesti transitiivinen ja sen jaksollisten pisteiden joukko on tiheä.

^aTämä oletus sulkee pois tapauksen, jossa X koostuu yhdestä jaksollisesta radasta. Kaikki eivät ole äärettömyyttä.

Esimerkki 6.5. (1) Kulman m -kertaistava kuvaus $E_m: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ on kaottinen Proposition 4.3 ja Esimerkin 4.6 nojalla.

(2) Vasemmat siirrot $\sigma: \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$ ja $\sigma: \Omega_N \rightarrow \Omega_N$ ovat kaottisia Propositoiden 5.9 ja 5.10 nojalla.

(3) Ympyrän kaikki pisteet ovat rationaalisen kierron jaksollisia pisteitä ja irrationaalinen kierto on topologisesti transitiivinen. Kumpikaan näistä ei ole kaottinen systeemi, sillä vain toinen ehdoista on voimassa.

Yksi kaaokselta usein edellytettävistä piirteistä on *perhosefekti* eli herkkä riippuvuus alkuarvoista.²

Dynaaminen systeemi $f: X \rightarrow X$ riippuu herkästi alkuarvoista, jos systeemillä on *herkkyysvakio* $\Delta > 0$ siten, että jokaisella $x \in X$ ja $\varepsilon > 0$ on $y \in B(x, \varepsilon)$ ja $N \in \mathbb{N}$, joille $d(f^N(x), f^N(y)) \geq \Delta$.

Herkkä riippuvuus alkuarvosta tarkoittaa, että pieni epätarkkuus lähtötilanteessa voi muuttaa tulevaisuuden kokonaan.

Esimerkki 6.6. (1) Lineaarikuvaus $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Lx = 2x$ riippuu herkästi alkuarvosta vaikka se ei ole kaottinen. Kuvauksella on yksi kiintopiste 0 ja kaikki muut pisteet $x \in \mathbb{R}^n$ toteuttavat $\|L^k x\| = 2^k \|x\| \rightarrow \infty$, kun $k \rightarrow \infty$.

(2) Jos $f: X \rightarrow X$ on isometria, sen määräämä dynaaminen systeemi ei riipu herkästi alkuarvoista. Mikään ympyrän kierto ei riipu herkästi alkuarvosta sillä kierrot ovat ympyrän isometrioita: $d(R_\alpha(x), R_\alpha(y)) = d(x, y)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{S}^1$.

Joskus herkkä riippuvuus alkuarvoista otetaan osaksi kaottisuuden määritelmää. Seuraava tulos osoittaa, että herkkä riippuvuus alkuarvoista seuraa kaottisuuden määritelmästä paitsi triviaaleissa tilanteissa.

Lause 6.7. *Olkoon X ääretön metrinen avaruus, jossa ei ole eristettyjä pisteitä ja olkoon $f: X \rightarrow X$ jatkuva kuvaus, jonka määräämä dynaaminen systeemi on kaottinen. Tällöin dynaaminen systeemi $f: X \rightarrow X$ riippuu herkästi alkuarvoista.*

Todistus. Jos X koostuu yhdestä jaksollisesta radasta, niin siinä on eristettyjä pisteitä. Koska jaksolliset radat ovat äärellisiä joukkoja ja ne ovat tiheässä, niitä on siis oltava äärettömän monta. Olkoot $q_1, q_2 \in X$ jaksollisia pisteitä, joiden radat ovat erilliset. Olkoon

$$\Delta = \min\{d(x_1, x_2) : x_i \in \mathcal{O}^+(q_i)\}/8.$$

Osoitetaan, että Δ on systeemin $f: X \rightarrow X$ herkkyysvakio.³

²Herkkää riippuvuutta alkuarvoista havainnollistetaan elokuvan Chaos [LGA] osassa 1 alkaen kohdasta 6:35 <https://youtu.be/vts0YHACsYY?t=395>.

³Emme pohdi lainkaan sitä, että vakio ei välttämättä ole suurin mahdollinen.

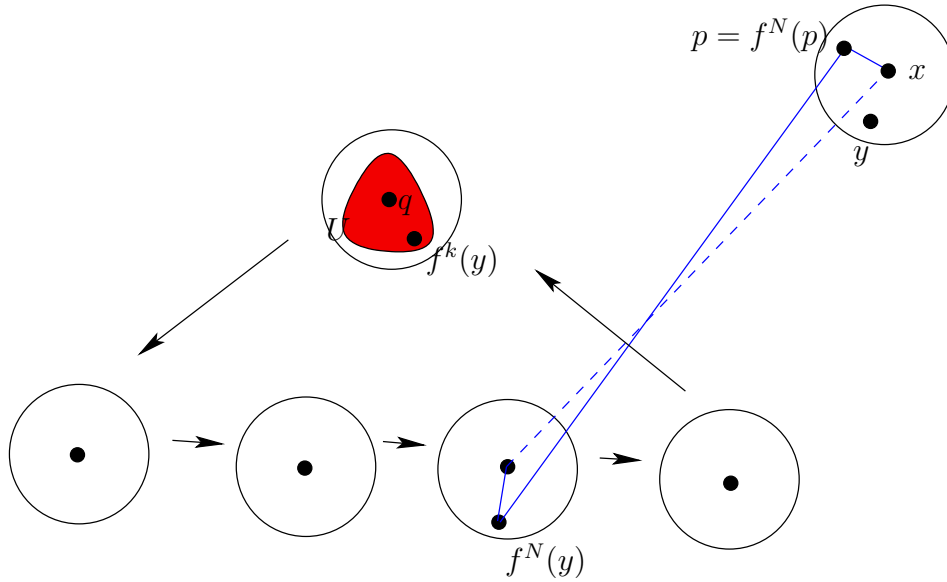
Olkoon $x \in X$. Kolmioepäyhtälön ja luvun Δ valinnan nojalla pätee $d(x, \mathcal{O}^+(q_1)) \geq 4\Delta$ tai $d(x, \mathcal{O}^+(q_2)) \geq 4\Delta$. Olkoon $q \in \{q_1, q_2\}$ näin löydetty jaksollinen piste, jolle pätee $d(x, \mathcal{O}^+(q)) \geq 4\Delta$.

Olkoon $0 < \varepsilon < \Delta$. Pallossa $B(x, \varepsilon)$ on jaksollinen piste $p \in B(x, \varepsilon)$, koska jaksolliset pisteet ovat tiheässä. Olkoon pisteen p jakso n .

Olkoon

$$U = \bigcap_{i=0}^n (f^i)^{-1}(B(f^i(q), \Delta)).$$

Joukko U on äärellisen monen avoimen joukon leikkauksena avoin ja $q \in U$, joten U ei ole tyhjä joukko. Lauseen 6.2 todistuksessa näimme, että on $y \in B(x, \varepsilon)$, jolle pätee $f^k(y) \in U$ jollain $k \in \mathbb{N}$, koska systeemillä on tiheä rata ja avaruudessa X ei ole eristettyjä pisteitä.



Olkoon $N = n(\lfloor \frac{k}{n} \rfloor + 1)$. Tällöin $k = n \frac{k}{n} < N \leq n + k$. Joukon U määritelmän mukaan pätee $f^{N-k}(U) \subset B(f^{N-k}(q), \Delta)$, joten

$$f^N(y) = f^{N-k}(f^k(y)) \in B(f^{N-k}(q), \Delta).$$

Koska N on pisteen p jakson monikerta, pätee $f^N(p) = p$ ja kolmioepäyhtälö antaa

$$d(f^N(p), f^N(y)) \geq d(x, f^{N-k}(q)) - d(f^{N-k}(q), f^N(y)) - d(p, x),$$

joten luvun Δ määritelmän ja pisteen q valinnan nojalla

$$d(f^N(p), f^N(y)) \geq 4\Delta - \Delta - \Delta = 2\Delta. \quad (6.1)$$

Jos pätsi, $d(f^N(p), f^N(x)) < \Delta$ ja $d(f^N(x), f^N(y)) < \Delta$, kolmioepäyhtälö antaisi ristiriidan epäyhtälön (6.1) kanssa, joten pätee $d(f^N(p), f^N(x)) \geq \Delta$ tai $d(f^N(x), f^N(y)) \geq \Delta$. On siis osoitettu, että on piste $z \in \{p, y\} \subset B(x, \varepsilon)$, jolle pätee $d(f^N(z), f^N(x)) \geq \Delta$. \square

6.3 Topologisesti sekoittavat systeemit

Diskreetti dynaaminen systeemi $f: X \rightarrow X$ on *topologisesti sekoittava*, jos kaikille avoimille epätyhjille joukoille $U, V \subset X$ on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ kaikille $n \geq N$.

Propositio 6.8. *Olkoon X on täydellinen ja separoituva metrinen avaruus ja olkoon $f: X \rightarrow X$ jatkuva ja sekoittava. Tällöin f on topologisesti transitiivinen.*

Todistus. Väite seuraa Lauseesta 6.4. □

Esimerkki 6.9. Kuvaus E_m on topologisesti sekoittava Lemman 4.5 nojalla.

Propositio 6.10. *Vasemmat siirrot $\sigma: \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$ ja $\sigma: \Omega_N \rightarrow \Omega_N$ ovat topologisesti sekoittavia.*

Todistus. Yksipuolisen jonoavaruuden tapaus on helppo: Jos $U \subset \Sigma_N$ on epätyhjä avoin joukko, niin U sisältää jonkin sylinterin $C_\alpha^{[0,M]}$ jollain $M \in \mathbb{N}$. Koska $\sigma^{M+1}(C_\alpha^{[0,M]}) = \Sigma_N$, niin pätee $\sigma^{M+1}(U) = \Sigma_N$, mistä väite seuraa.

Olkoon $U, V \subset \Omega_N$ epätyhjiä avoimia joukkoja. Tällöin U sisältää jonkin symmetrisen sylinterin $C_\alpha^{[-M_U, M_U]}$ ja V sisältää jonkin symmetrisen sylinterin $C_\beta^{[-M_V, M_V]}$ joillain $M_U, M_V \in \mathbb{N}$. Kun $n \geq n_0 = 2(\max(M_U, M_V) + 1)$, niin

$$\sigma^n(C_\alpha^{[-M_U, M_U]}) \cap C_\beta^{[-M_V, M_V]} = C_{\alpha \cup \beta}^{[-M_U - n_0, M_U - n_0] \cup [-M_V, M_V]}$$

on sylinteri, erityisesti siis epätyhjä joukko, joka sisältyy leikkaukseen $\sigma^n(U) \cap V$. □

Jos dynaaminen systeemi on topologisesti sekoittava pelkän transitiivisuuden sijaan, se riippuu herkästi alkuarvoista ilman oletusta jaksollisten ratojen tiheydestä.

Lause 6.11. *Olkoon X metrinen avaruus, jossa on vähintään kaksi pistettä. Olkoon $f: X \rightarrow X$ topologisesti sekoittava. Tällöin f riippuu herkästi alkuarvoista.*

Todistus. Olkoon $\Delta > 0$ siten, että on pisteet $a, b \in X$, joille $d(a, b) > 4\Delta$. Osoitamme, että Δ on systeemin herkkyysvakio.

Olkoon $x \in X$ ja olkoon $\varepsilon > 0$. Oletuksen nojalla on $N \in \mathbb{N}$ siten, että kaikille $n \geq N$ pätee

$$f^n(B(x, \varepsilon)) \cap B(a, \Delta) \neq \emptyset \quad \text{ja} \quad f^n(B(x, \varepsilon)) \cap B(b, \Delta) \neq \emptyset$$

kaikille $n \geq N$. Siis on pisteet $y_a, y_b \in B(x, \varepsilon)$, joille $f^N(y_a) \in B(a, \Delta)$ ja $f^N(y_b) \in B(b, \Delta)$. Kolmioepäyhtälön nojalla $d(f^N(y_a), f^N(y_b)) \geq 2\Delta$, koska $d(a, b) > 4\Delta$. Kolmioepäyhtälön nojalla pätee $d(f^N(y_a), f^N(x)) \geq \Delta$ tai $d(f^N(y_b), f^N(x)) \geq \Delta$, joten y_a tai y_b on etsitty piste. □

6.4 Konjugointi ja semikonjugointi

Tässä luvussa tarkastelemme keinoja, joilla tarkasteltavan dynaamisen systeemin luonnetta voidaan joissain tilanteissa tutkia toisen jo ennalta tunnetun dynaamisen systeemin avulla.

Olko X ja Y metrisiä avaruuksia. Kuvaus $g: Y \rightarrow Y$ on kuvauksen $f: X \rightarrow X$ topologinen tekijä, jos on jatkuva surjektio $s: X \rightarrow Y$ siten, että $g \circ s = s \circ f$. Kuvaus s on semikonjugoiva kuvaus.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow s & & \downarrow s \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Jos kuvaus s on homeomorfismi, niin kuvaukset f ja g ovat konjugaatteja ja s on konjugoiva kuvaus.

Lemma 6.12. Jos $g \circ s = s \circ f$, niin $g^n \circ s = s \circ f^n$.

Todistus. Oletuksen nojalla

$$g^n \circ s = g^{n-1} \circ g \circ s = g^{n-1} \circ s \circ f = \dots = s \circ f^n. \quad \square$$

Propositio 6.13. Olko $f: X \rightarrow X$ ja $g: Y \rightarrow Y$ jatkuvia kuvauksia ja olkoon g kuvauksen f topologinen tekijä semikonjugoivalla kuvauksella $s: X \rightarrow Y$. Tällöin

- (1) s kuvaa kuvauksen f jaksolliset radat kuvauksen g jaksollisiksi radoiksi.
- (2) s kuvaa kuvauksen f tiheät radat kuvauksen g tiheiksi radoiksi.
- (3) jos f on topologisesti sekoittava, niin g on topologisesti sekoittava.

Todistus. (1) Olkoon $x \in X$ siten, että $f^n(x) = x$. Lemman 6.12 nojalla

$$g^n(s(x)) = s(f^n(x)) = s(x).$$

(2) ja (3) Harjoitustehtävä 6.3. □

Propositio 6.14. Olko $f: X \rightarrow X$, $g: Y \rightarrow Y$ ja $h: Z \rightarrow Z$ jatkuvia kuvauksia. Olkoon g kuvauksen f topologinen tekijä semikonjugoivalla kuvauksella $s: X \rightarrow Y$ ja olkoon h kuvauksen g topologinen tekijä semikonjugoivalla kuvauksella $t: Y \rightarrow Z$. Tällöin

- (1) h on kuvauksen f topologinen tekijä semikonjugoivalla kuvauksella $t \circ s$.
- (2) jos f ja g ovat konjugaatteja ja g ja h ovat konjugaatteja, niin f ja h ovat konjugaatteja.

Todistus. Jatkuvien surjektioiden yhdistetty kuvaus on jatkuva surjektio ja homeomorfismien yhdistetty kuvaus on homeomorfismi. Lisäksi

$$h \circ (t \circ s) = (h \circ t) \circ s = (t \circ g) \circ s = t \circ (g \circ s) = t \circ (s \circ f) = (t \circ s) \circ f. \quad \square$$

Esimerkki 6.15. (1) Olkoon $[K] \subset \mathbb{S}^1$ Esimerkissä 4.7 konstruoitu E_3 -invariantti Cantorin joukko. Harjoitustehtävässä 4.7 osoitettiin, että kuvaus $E_2: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ on kuvauksen $E_3: [K] \rightarrow [K]$ topologinen tekijä.

(2) Harjoitustehtävissä 5.9 ja 5.10 osoitetaan, että $E_N: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ on vasemman siirron $\sigma: \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$ topologinen tekijä.

Seuraus 6.16. Olko X ja Y äärettömiä metrisiä avaruuksia. Olko $f: X \rightarrow X$ ja $g: Y \rightarrow Y$ jatkuvia kuvauksia ja olkoon g kuvauksen f topologinen tekijä. Jos f on kaoottinen, niin g on kaoottinen.

Todistus. Proposition 6.13 nojalla kuvauksen g jaksolliset radat ovat tiheässä ja sillä on tiheä rata. \square

Esimerkki 6.17. Tšebyšovin⁴ polynomi P_n on se yksikäsitteinen polynomi, jolle pätee

$$P_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$$

kaikille $\theta \in \mathbb{R}$. Polynomien P_n lausekkeet saadaan de Moivre'n kaavasta:

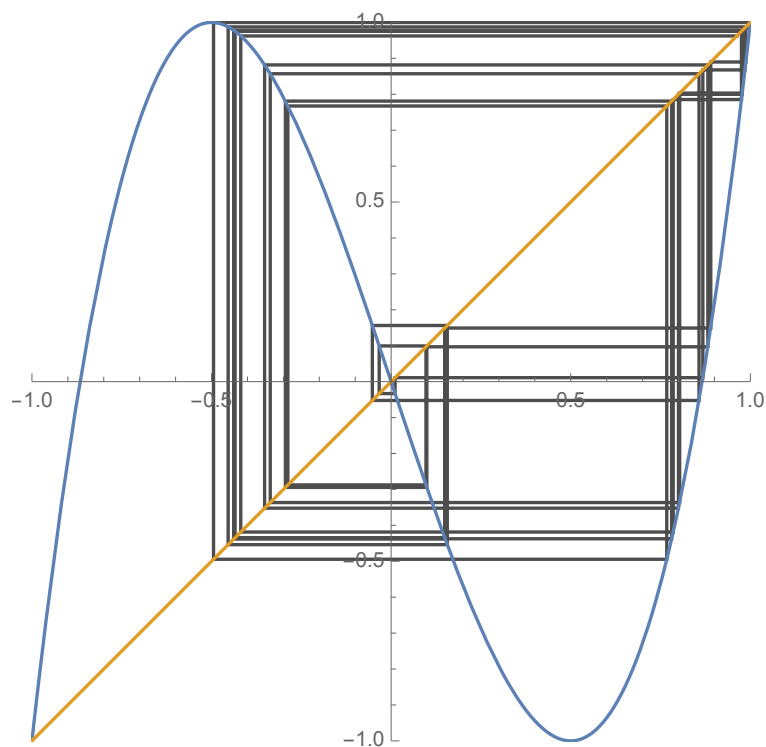
$$P_2(x) = 2x^2 - 1, \quad P_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad P_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

ja niin edelleen.

Määritelmänsä mukaan kuvaus $P_m: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ on kulman m -kertaistaistavan kuvauksen $E_m: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ topologinen tekijä semikonjugoivalla kuvauksella $s: \mathbb{S}^1 \rightarrow [-1, 1]$,

$$s([t]) = \cos(2\pi t).$$

Kuvaus $P_m: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ on kaoottinen Seurauksen 6.16 ja Esimerkin 6.5(1) nojalla.



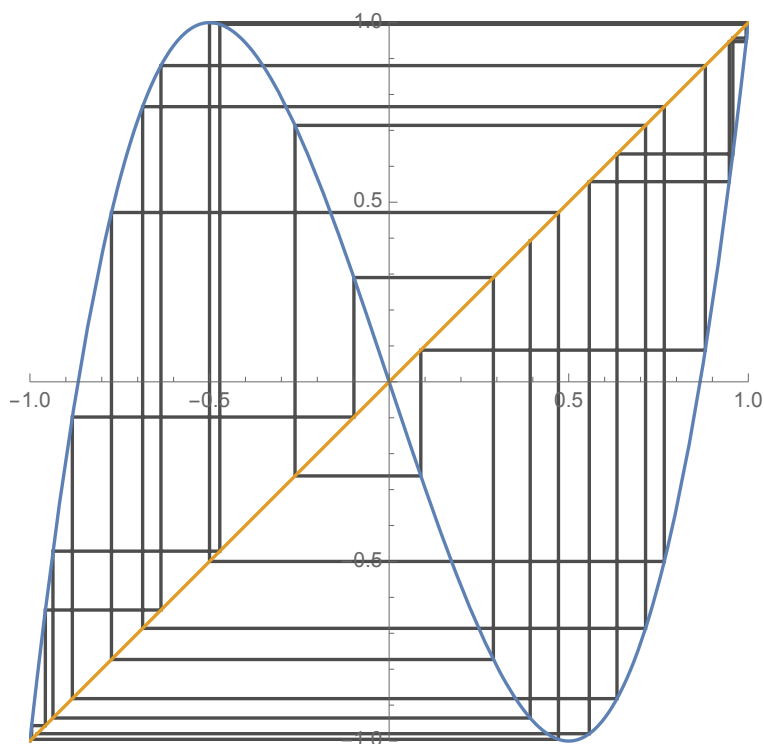
Kuva 6.1: Piste $\cos(2\pi q)$ rataa kuvauksella P_3 , missä q on kuten esimerkissä 4.7.

Olkoon $\lambda > 0$. Kuvaus $T_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$T_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x, & \text{kun } x \leq \frac{1}{2} \\ \lambda - \lambda x, & \text{kun } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

on *telttafunktio* parametrilla λ .

⁴Englanninkielisissä lähteissä nimi esiintyy muodossa Chebyshev.



Kuva 6.2: Pisteen $\cos(2\pi q')$ rataa kuvauksella P_3 , missä $q' \approx 0.185764$ on luku, jonka esitys kannassa 3 on 0.012000102101112202122.

Esimerkki 6.18. Telttakuvaus $T_2: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ja logistinen funktio⁵ $F_4: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ovat semikonjugaatteja. Osoitamme, että kuvaus F_4 on kuvauksen T_2 topologinen tekijä semikonjugoivalla kuvauksella $s: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,

$$s(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi t)).$$

Jos $x \in [0, \frac{1}{2}]$, pätee

$$s \circ T(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(4\pi t)) = 1 - \cos^2(2\pi x)$$

ja jos $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, niin kosinin jaksollisuuden ja parillisuuden nojalla pätee

$$s \circ T(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi(2 - 2t))) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi(-2t))) = \frac{1}{2}(1 - \cos(4\pi t)).$$

Toisaalta

$$F_4 \circ s(t) = 4\left(\frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi t))\right)\left(1 - \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi t))\right) = 1 - \cos^2(2\pi x).$$

Harjoitustehtävissä 6.5-6.7 osoitetaan, että kuvaukset T_2 ja F_4 ovat kaoottisia Seurauksen 6.16 ja Esimerkin 6.17 nojalla.

⁵Logistiset funktiot määriteltiin Harjoitustehtävän 1.12 yhteydesä.

Harjoitustehtäviä

6.1. Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

(a) Osoita, että kuvaus $f|_{]1, \infty[}:]1, \infty[\rightarrow]1, \infty[$ riippuu herkästi alkuarvoista.

(b) Osoita, että kuvaus $f|_{]0, 1[}:]0, 1[\rightarrow]0, 1[$ ei riipu herkästi alkuarvoista.

6.2. Osoita, että herkkä riippuvuus alkuarvoista ei välttämättä säily konjugoinnissa.⁶

6.3. Todista Proposition 6.13 kohdat (2) ja (3).

6.4. Olkoot $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$. Osoita, että kierto $R_{k\alpha}$ on kierron R_α topologinen tekijä.⁷

6.5. Osoita, että kuvaus $h_1: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,

$$h_1(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

on homeomorfismi, joka konjugoi kuvaukset T_2 ja F_4 :

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{T_2} & [0, 1] \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_1 \\ [0, 1] & \xrightarrow{F_4} & [0, 1] \end{array}$$

6.6. Etsi homeomorfismi $h_2: [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$, joka konjugoi kuvauksen F_4 ja toisen Tšebyšovian polynomikuvauksen $P_2(x) = 2x^2 - 1$ rajoittuman välille $[-1, 1]$.⁸

6.7. Osoita, että kuvaukset F_4 ja T_2 ovat kaoottisia.

6.8. Tee graafista analyysia telttafunktiolle T_2 ja/tai funktiolle F_4 niin, että joitain erillisiä ratoja havaitaan.

Olkoon $\alpha: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$,

$$\alpha(\omega)(i) = \begin{cases} 1 - \omega(i), & \text{jos } \omega(j) = 1 \text{ kaikille } j < i, \\ \omega(i) & \text{muuten.}^a \end{cases}$$

^aEsimerkiksi siis $\alpha(\bar{0}) = 1\bar{0}$ koska ei ole luonnollisia lukuja $j < 0$. Siis kaikille sellaisille luvuille pätee mikä tahansa väite.

6.9. Osoita, että α on bijektio ja määritä sen käänteiskuvaus.

Osoita, että α kuvaa sylinterit $C_\alpha^{[0, k]}$ sylintereiksi.

Osoita, että α on homeomorfismi.

Osoita, että α on topologisesti transitiivinen.

Miten α liittyy kuvaukseen $x \mapsto x + 1$, kun luonnolliset luvut esitetään 2-kantaisesti?

⁶Anna vastaesimerkki. Älä etsi liian kaukaa.

⁷Tarvittava semikonjugoiva kuvaus on esiintynyt kurssilla aiemminkin.

⁸Ensimmäisen asteen polynomifunktio toimii.

Pisteen $x \in X$ ω -rajajoukko dynaamisessa systeemissä $f: X \rightarrow X$ on

$$\omega_f(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k \geq n} \{f^k(x)\}}$$

6.10. Olkoon $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ kuvaus, joka määritellään asettamalla $f(0) = 0$ ja napakoordinaattien avulla

$$f(re^{i\phi}) = \sqrt{r} e^{i2\phi},$$

kun $0 \neq z = r e^{i\phi}$. Määritä ω -rajajoukko $\omega_f(z_0)$ kaikille $z_0 \in \mathbb{C}$.

6.11. Olkoot $M, N \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $M < N$. Osoita, että vasen siirto $\sigma: \Sigma_M \rightarrow \Sigma_M$ on vasemman siirron $\sigma: \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$ topologinen tekijä.⁹

6.12. Osoita, että vasen siirto $\sigma: \Omega_2 \rightarrow \Omega_2$ ja oikea siirto $\sigma^{-1}: \Omega_2 \rightarrow \Omega_2$ ovat konjugaatteja.

⁹Riittää tarkastella tapaus $M = 2$, $N = 3$.

Luku 7

Koodaaminen

Koodaamisella tarkoitetaan dynaamisen systeemin $f: X \rightarrow X$ liittämistä symboliseen dynaamiseen systeemiin. Tämä voidaan tehdä esimerkiksi jakamalla avaruus X osiin X_1, X_2, \dots, X_{N-1} , joiden leikkausjoukot ovat pieniä, ja tarkastelemalla pisteiden $x \in X$ reittiä kuvauksen f iteraateilla.

Yleisessä tapauksessa voidaan joutua monenlaisiin vaikeuksiin: Pisteiden reitti ei ole yksikäsitteinen, jos joukot X_1, X_2, \dots, X_{N-1} eivät ole erillisiä. Toisaalta useammallakin eri pisteellä voi olla sama reitti. Tällöin onkin usein helpompi lähestyä koodaamista hieman toisin ja määrittellä semikonjugoiva kuvaus sopivasta symboliavaruudesta tarkasteltavaan avaruuteen kuten teimme Harjoitustehtävissä 5.9 ja 5.10 kuvaukselle $E_N: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$.

Tässä luvussa tarkastelemme kolmea erilaista dynaamista systeemiä ja löydämme niille symbolisen dynaamisen systeemi, jonka topologinen tekijä alkuperäinen systeemi on.

7.1 Telttakuvaukset

Tarkastellaan luvussa 6.4 määritellyn telttakuvauksen $T_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ratojen käyttäytymistä eri alkuarvoilla.

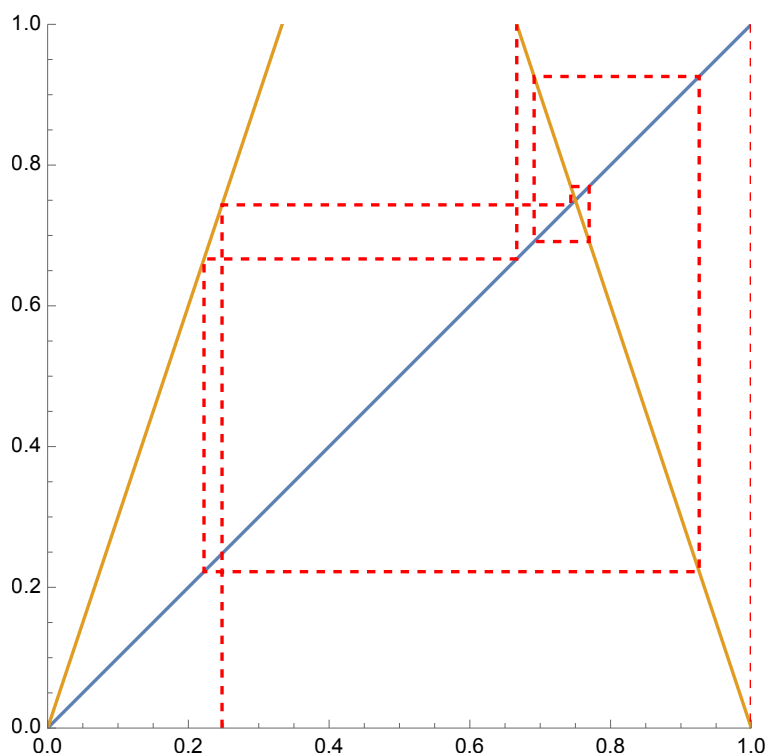
- Jos $x < 0$, niin $T_3^k(x) = 3^k x \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -\infty$.
- Jos $x > 1$, niin $T_3(x) < 0$, joten $T_3^k(x) = 3^k x \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -\infty$.
- Jos $x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, niin $T_3(x) > 1$, joten $nT_3^k(x) = 3^k x \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -\infty$.
- Jos $x \in]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[\cup]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$, niin $T_3(x) \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, joten $T_3^2(x) > 1$. Siis $T_3^k(x) = 3^k x \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -\infty$.

Induktiolla havaitsemme, että $\lim_{k \rightarrow \infty} T^k(x) = -\infty$ kaikille $x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(]-\infty, 0]) = \mathbb{R} - K$, missä K on luvussa 4.2 määritelty Cantorin $\frac{1}{3}$ -joukko. Kuvauksen T_3 dynamiikka joukossa $\mathbb{R} - K$ ei ole erityisen kiinnostavaa.

Jos $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \in K$, $a_k \in \{0, 2\}$ kaikilla $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, ja $x \leq \frac{1}{2}$, niin $T_3(x) = 3x \in K$. Konstruktion nojalla Cantorin joukko K on invariantti peilauksella $R: y \mapsto 1 - y$. Jos

$x \in K$ ja $x > \frac{1}{2}$, niin $T_3(x) = 3R(x) \in T_3$, kuten edellä nähtiin. Siis Cantorin joukko K on T_3 -invariantti, joten T_3 määrää dynaamisen systeemin $T_3: K \rightarrow K$.

Joukkoon K kuuluvilla alkuarvoilla ratojen käyttäytyminen on erilaista kuin sen komplementissa: Systeemillä on kaksi kiintopistettä 0 ja $\frac{3}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2k+1}} \in K$. $(T_3)^m(\frac{1}{3^m}) = 1$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$. Siis $(T_3)^M(\frac{1}{3^m}) = 0$ kaikilla $M \geq m$, joten nämä jonot ovat vakiojonoja suurilla indekseillä k . Pisteet, jotka ovat muotoa $\frac{1}{3^m}$ ovat systeemin *esikiintopisteitä*. Vastaavasti $T_3(\frac{1}{4}) = \frac{3}{4}$, $T_3(\frac{1}{12}) = \frac{1}{4}$ ja niin edelleen. Systeemillä on runsaasti jaksollisia ratoja esimerkiksi $\frac{3}{10} \xrightarrow{\quad} \frac{9}{10} \xleftarrow{\quad} \frac{3}{10}$ ja $\frac{3}{28} \xrightarrow{\quad} \frac{9}{28} \xrightarrow{\quad} \frac{27}{28} \xleftarrow{\quad} \frac{3}{28}$. Nämä pisteet ovat Cantorin joukossa sillä niiden radat sisältyvät yksikköväliin. Niille voi myös etsiä esitykset Cantorin joukon pisteinä, esimerkiksi $\frac{8}{27} = \frac{2}{9} + \frac{2}{27}$ ja $\frac{3}{10} = \frac{8}{27} \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-4k}$.



Kuva 7.1: Graafinen analyysi Cantorin joukon alkion $\frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^7} \approx 0.248$ radalle telttakuvauksella T_3 .

Olkoon $S: K \rightarrow \Sigma_2$ kuvaus, joka määritellään asettamalla jokaiselle $x \in K$ ja jokaiselle $i \in \mathbb{N}$ kuvauksen $S(x)$ arvoiksi $S(x)(i) = a$, jos $T_3^i(x) \in I_1^a$. Kuvaus S on hyvin määritelty, koska K on T_3 -invariantti ja joukot I_1^0 ja I_1^1 ovat erillisiä. Osoitamme, että S on bijektio. Jos $S(x) = S(y)$, niin pisteet $T_3^n(x)$ ja $T_3^n(y)$ ovat samalla välillä I_1^0 tai I_1^1 kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jos $x, y \in I_1^a$, $a \in \{0, 1\}$, niin

$$|T_3(x) - T_3(y)| = 3|x - y|,$$

joten

$$|T_3^n(x) - T_3^n(y)| = 3^n|x - y|.$$

Koska K on T_3 -invariantti, pätee $|T_3^n(x) - T_3^n(y)| \leq 1$ kaikilla n , mikä on ristiriita ellei $|x - y| = 0$. Siis $x = y$, joten S on injektio.

Jos $J \subset I_1^0 \cup I_1^1$ on väli, niin $T_3^{-1}(J)$ koostuu kahdesta välistä, joista toinen on välin I_1^0 ja toinen välin I_1^1 osajoukko. Olkoon $\omega \in \Sigma_2$ ja olkoon jokaisella $n \geq 1$

$$\begin{aligned} I_{w(0)\omega(1)\dots\omega(n)} &= I_1^{\omega(0)} \cap T_3^{-1} I_1^{\omega(1)\dots\omega(n)} \\ &= I_1^{\omega(0)} \cap T_3^{-1} (I_1^{\omega(1)} \cap T_3^{-1} I_1^{\omega(2)\dots\omega(n)}) \\ &= I_1^{\omega(0)} \cap T_3^{-1} (I_1^{\omega(1)}) \cap T_3^{-2} (I_1^{\omega(2)}) \cap \dots \cap T_3^{-n} (I_1^{\omega(n)}) \end{aligned}$$

Välit $I_{w(0)\omega(1)\dots\omega(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ ovat sisäkkäisiä epätyhjiä kompakteja välejä, joten on

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_{w(0)\omega(1)\dots\omega(n)} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_3^{-n} (I_1^{\omega(n)}).$$

Konstruktio perusteella $S(x) = \omega$, joten S on surjektio.

Lause 7.1. *Dynaamiset systeemit $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ ja $T_3: K \rightarrow K$ ovat konjugaatteja. Dynaaminen systeemi $T_3: K \rightarrow K$ on kaoottinen.*

Todistus. Edellä tehtyjen tarkasteluiden lisäksi riittää tarkastaa, että kuvaus S on homeomorfismi, joka konjugoii kuvaukset T_3 ja σ . Olkoon $S(x) = \omega$. Tällöin

$$T_3(\{x\}) = T_3\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_3^{-n}(I_{\omega(n)})\right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_3^{-n}(I_{\omega(n+1)}) = \{S^{-1}(\sigma(\omega))\},$$

joten

$$S \circ T_3 = \sigma \circ S.$$

Koska metriset avaruudet K ja Σ_2 ovat kompakteja ja S on bijektio, S on homeomorfismi, jos se on jatkuva.¹ Lemman 5.6 nojalla riittää osoittaa, että sylinterien alkukuvat ovat avoimia joukkoja. Sylinterin $[\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_K]$ alkukuva on $S^{-1}([\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_K]) = K \cap I_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n}$. Olkoon $0 < \varepsilon < \frac{1}{6}$ ja olkoot

$${}^\varepsilon I_1^0 =]-\varepsilon, \frac{1}{3} + \varepsilon[\quad \text{ja} \quad {}^\varepsilon I_1^1 =]\frac{2}{3} - \varepsilon, 1 + \varepsilon[.$$

Cantorin joukon konstruktioista seuraa, että

$$K \cap I_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} = K \cap {}^\varepsilon I_1^{\alpha_0} \cap T_3^{-1}({}^\varepsilon I_1^{\alpha_1}) \cap T_3^{-2}({}^\varepsilon I_1^{\alpha_2}) \cap \dots \cap T_3^{-n}({}^\varepsilon I_1^{\alpha_n}),$$

joten $S^{-1}([\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_K])$ on avoin.

Kaoottisuus seuraa Seurauksesta 6.16. □

Esimerkin 7.1 havainnot voidaan yleistää telttakuvaukselle $T_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kaikille $\lambda > 2$.

Olkoon $\lambda \geq 3$. Olkoon

$$K^{(\lambda)} = \bigcup_{k=0}^{\infty} T_\lambda^{-k}([0, 1])$$

Erityisesti siis $K = K^{(3)}$ ja kaikki joukot $K^{(\lambda)}$, $\lambda \geq 0$ ovat homeomorffisia.

¹Katso esimerkiksi [Par, Lause 7.15].

Seuraus 7.2. *Olkoon $\lambda > 2$. Dynaaminen systeemi $T_\lambda: K^{(\lambda)} \rightarrow K^{(\lambda)}$ on konjugaatti vasemman siirron $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ kanssa. Erityisesti se on kaoottinen.*

Avaruudet (Σ_N, d) ja (Ω_N, d) ovat homeomorfisia Cantorin joukon K kanssa. Tämä osoitettiin Esimerkissä 7.1 jonoavaruudelle Σ_2 . Homeomorfisuus Cantorin joukon kanssa seuraa abstraktisti kompaktiudesta, perfektiydestä ja täysin epäyhtenäisyydestä, katso esimerkiksi [HY, Thm. 2.97].

7.2 Smalen hevosenkenkä

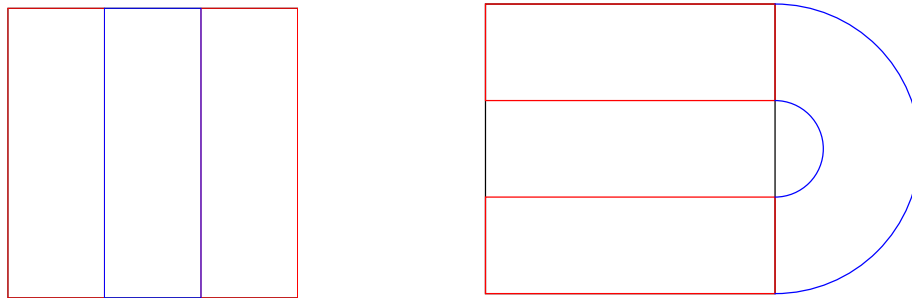
Olkoon $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ homeomorfismi, joka määritellään asettamalla

$$H(x) = \begin{cases} (3x_1, \frac{x_2}{3}), & \text{kun } 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{3} \text{ ja } 0 \leq x_2 \leq 1, \\ (3 - 3x_1, 1 - \frac{x_2}{3}), & \text{kun } \frac{2}{3} \leq x_1 \leq 1 \text{ ja } 0 \leq x_2 \leq 1, \end{cases}$$

asettamalla yksikköneliön keskimmaisessä kolmanneksessa

$$H(x) = \left(1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{x_2}{3} \right) \cos\left(\pi\left(x_1 - \frac{5}{2}\right)\right), \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{x_2}{3} \right) \sin\left(\pi\left(x_1 - \frac{5}{2}\right)\right) \right),$$

kun $\frac{1}{3} < x_1 < \frac{2}{3}$ ja $0 \leq x_2 \leq 1$, ja määrittelemällä H yksikköneliön komplementissa niin, että se on homeomorfismi. Lopulta olemme kiinnostuneita kuvauksen H rajoittumasta joukon $([1, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]) \times [0, 1]$ H -invariantissa osajoukossa, joten kuvauksen määrittelystä tämän joukon ulkopuolella riittää tietää, että se on homeomorfismi, joka kuvaa yksikköneliön $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ hevosenkengäksi, joka kulkee kaksi kertaa vaakasuoraan neliön I^2 läpi kuten kuvassa 7.3.



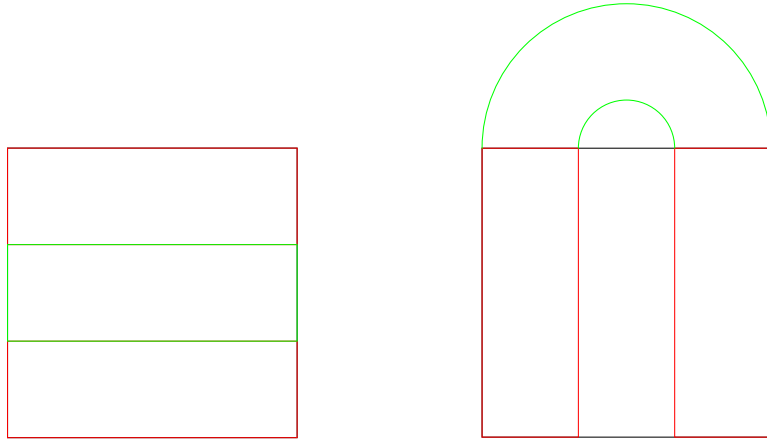
Kuva 7.2: Hevosenkenkäkuvaus H kuvaa yksikköneliön keskimmäisen (sinisen) kolmanneksen $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[\times [0, 1]$ yksikköneliön ulkopuolelle kaarevaksi osaksi.

Kuvauksen H käänteiskuvaus joukossa

$$[0, 1] \times \left([0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1] \right) = H\left(\left([1, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1] \right) \times [0, 1] \right)$$

saadaan lausekkeella

$$H^{-1}(x) = \begin{cases} (\frac{x_1}{3}, 3x_2), & \text{kun } 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ ja } 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{3}, \\ (1 - \frac{x_1}{3}, 3(1 - x_2)), & \text{kun } 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ ja } \frac{2}{3} \leq x_2 \leq 1, \end{cases}$$



Kuva 7.3: Hevosenkenkäkuvauksen käänteiskuvas H^{-1} kuvaa yksikköneliön keskimmäisen (vihreän) kolmanneksen $[0, 1] \times]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ yksikköneliön ulkopuolelle kaarevaksi osaksi.

ja yksikköneliöön jäävä kaistale kuvataan niin, että $H^{-1}([0, 1]^2)$ on myös hevosenkenkä, joka leikkaa yksikköneliötä toisin päin kuin $H([0, 1]^2)$.

Olkoot

$$J_0 = [0, 1] \times [0, \frac{1}{3}] \quad \text{ja} \quad J_1 = [0, 1] \times [\frac{2}{3}, 1].$$

Tällöin siis $[0, 1]^2 \cap H([0, 1]^2) = J_0 \cup J_1$. Kuvaamalla tämä joukko huomataan, että joukko $H^2([0, 1]^2) \cap [0, 1]^2$ koostuu neljästä vaakasuorasta kaistaleesta

$$J_{00} = J_0 \cap H(J_0), \quad J_{01} = J_0 \cap H(J_1), \quad J_{10} = J_1 \cap H(J_0) \quad \text{ja} \quad J_{11} = J_1 \cap H(J_1).$$

Vastaavasti $H^{-1}([0, 1]^2) \cap [0, 1]^2$ koostuu kahdesta pystysuorasta kaistaleesta

$$H^{-1}(J_0) = [0, \frac{1}{3}] \times [0, 1] \quad \text{ja} \quad H^{-1}(J_1) = [\frac{2}{3}, 1] \times [0, 1]$$

ja joukko $H^{-2}([0, 1]^2) \cap [0, 1]^2$ koostuu neljästä pystysuorasta kaistaleesta

$$H^{-1}(J_0) \cap H^{-2}(J_0), \quad H^{-1}(J_0) \cap H^{-2}(J_1), \quad H^{-1}(J_1) \cap H^{-2}(J_0) \quad \text{ja} \quad H^{-1}(J_1) \cap H^{-2}(J_1).$$

Vastaavalla tavalla kuin telttakuvaukselle tehtiin luvussa 7.1 asetetaan nyt jokaiselle $\omega \in \Omega_2$

$$J_\omega = \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} H^{-k}(J_{\omega(k)})$$

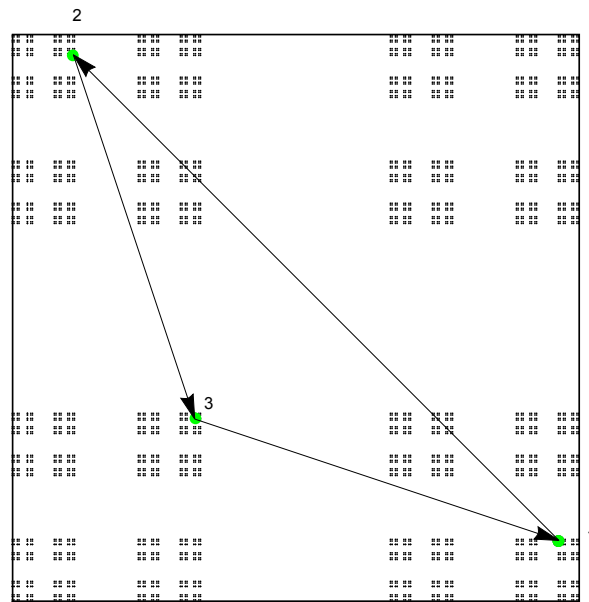
ja määritellään

$$\Lambda = \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} H^{-k-1}([0, 1]^2) = \bigcup_{\Omega_2} J_\omega.$$

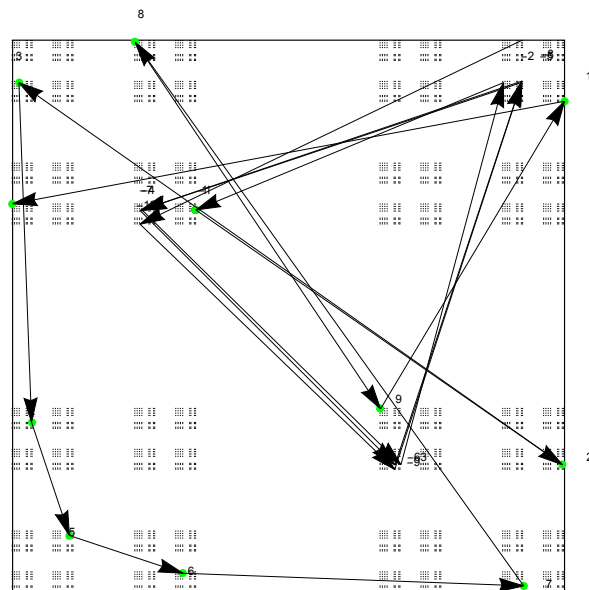
Joukot

$$\Lambda^- = \bigcap_{k=-1}^{-\infty} H^{-k}([0, 1]^2) \quad \text{ja} \quad \Lambda^+ = \bigcap_{k=0}^{-\infty} H^k([0, 1]^2)$$

ovat konstruktionsa perusteella yksikkövälin $[0, 1]$ ja Cantorin $\frac{1}{3}$ -joukon K tulojoukkoja: $\Lambda^- = K \times [0, 1]$ ja $\Lambda^+ = [0, 1] \times K$. Siis $\Lambda = \Lambda^- \cap \Lambda^+ = K \times K$ on tason Cantorin joukko.



Kuva 7.4: Hevosenkengän 2-ulotteinen Cantorin joukko $\Lambda \subset [0, 1]^2$ ja pisteen $(\frac{27}{28}, \frac{3}{28})$ rata. Pisteen $(\frac{27}{28}, \frac{3}{28})$ koodi on 3-jaksollinen $\omega(0)\omega(1)\omega(2) \in \Omega_2$, kun $\omega(0) = 0 = \omega(2)$, $\omega(1) = 1$.



Kuva 7.5: Pisteen $(\frac{6536}{19683}, \frac{40880}{59049}) \in \Lambda$ rataa hevosenkengäkuvauksella.

Joukko Λ on konstruktionsa nojalla H -invariantti. Jokaiselle $\omega \in \Omega_2$ on yksikäsitteinen piste x_ω , jolle pätee $\{x_\omega\} = J_\omega$. Näin saatava kuvaus $\phi: \Omega_2 \rightarrow \Lambda$, $\phi(\omega) = x_\omega$ on homeomorfismi ja

$$H(\{\phi(\omega)\}) = \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} H^{k-1}(J_{\omega(k)}) = \phi(\sigma\omega).$$

7.3 Topologiset Markovin ketjut

Tässä luvussa tarkastelemme symbolisia dynaamisia systeemejä jonoavaruuksien Σ_N ja Ω_N siirtainvarianteissa osajoukoissa.

Olkkoon $A = (A_{ij})$ neliömatriisi, jonka rivit ja sarakkeet indeksoidaan symboleilla $0, 1, \dots, N-1$ siten, että $A_{ij} \in \{0, 1\}$ kaikilla $i, j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Olkoot

$$\Omega_A = \{\omega \in \Omega_N : A_{\omega(i)\omega(i+1)} = 1 \text{ kaikilla } i \in \mathbb{Z}\}$$

ja

$$\Sigma_A = \{\omega \in \Sigma_N : A_{\omega(i)\omega(i+1)} = 1 \text{ kaikilla } i \in \mathbb{N}\}.$$

Matriisi A on *siirtymämatriisi*.

Käytämme avaruuksissa Σ_A ja Ω_A lausekkeella (5.1) määriteltyä metriikkaa.

Lemma 7.3. *Avaruuden $\Sigma_A \subset \Sigma_N$ avoimet ja suljetut pallot ovat sylintereitä*

$$[\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n]_A = C_\alpha^{[0,n] \cap \mathbb{N}}(A).$$

Avaruuden $\Omega_A \subset \Omega_N$ avoimet ja suljetut pallot ovat sylintereitä

$$[\alpha_{-n} \alpha_{-n+1} \dots \alpha_n]_A = C_\alpha^{[-n,n] \cap \mathbb{Z}}(A).$$

Todistus. Väite seuraa Lemmasta 5.6. □

Lemma 7.4. *Joukot $\Sigma_A \subset \Sigma_N$ ja $\Omega_A \subset \Omega_N$ ovat suljettuja siirtainvariantteja osajoukkoja.*

Todistus. Harjoitustehtävä 7.2 □

Seuraus 7.5. *Jos Σ_A ja Ω_A eivät ole tyhjiä, niin ne ovat kompakteja metrisiä avaruuksia.*

Todistus. Jonoavaruudet Σ_N ja Ω_N ovat kompakteja Proposition 5.7 nojalla. Osajoukot $\Sigma_A \subset \Sigma_N$ ja $\Omega_A \subset \Omega_N$ ovat suljettuja Lemman 7.4 nojalla, joten ne ovat kompakteja. □

Dynaamiset systeemit $\sigma|_{\Sigma_A} : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ ja $\sigma|_{\Omega_A} : \Omega_A \rightarrow \Omega_A$ ovat *topologisia Markovin ketjuja* tai *äärellisen tyypin alisiirtoja*.

Siirtymämatriisia $A = (A_{ij})$ vastaava *Markovin graafi* $\mathcal{G}(A)$ on suunnattu graafi, jonka *kärjet* ovat aakkoston $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, N-1\}$ alkiot ja kärjestä $\alpha \in \mathcal{A}$ on *suunnattu sivu* eli *nuoli* kärkeen $\beta \in \mathcal{A}$ täsmälleen silloin, kun $a_{\alpha\beta} = 1$.

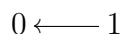
Suunnatun graafin (*sallittu*) *polku* tai *kävely* on äärellinen tai ääretön jono kärkiä $v_i \in \mathcal{A}$, joille pätee $a_{v_i v_{i+1}} = 1$. Äärellisen kävelyn $a_0 a_1 a_2 \dots a_m$ *pituus* on m .

Äärettömät kävelyt vastaavat siis jonoavaruuksien Σ_A ja Ω_A alkioita.

Esimerkki 7.6. (0) Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Markovin graafi on



ja $\Sigma_A = \emptyset$ ja $\Omega_A = \emptyset$.

(1) Matriisiin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Markovin graafi on

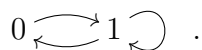


Kaksipuolinen jonoavaruus Ω_A koostuu kuvauksista $\mathbb{1}_{]-\infty, n]}: \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$ ja nollakuvauksesta. Erityisesti Ω_A on numeroituva.

(2) Matriisiin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Markovin graafi on



Harjoitustehtävässä 7.3 osoitetaan, että kaksipuolinen jonoavaruudet Σ_A ja Ω_A ovat yli-numeroituvia.

(3) Matriisi

$$\mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

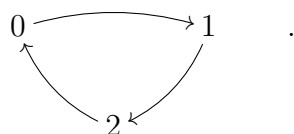
sallii kaikki kahden mittaiset sanat. Nyt siis $\Sigma_{\mathbb{1}_2} = \Sigma_2$ on *täysi siirto*. Vastaava Markovin graafi on



(4) Permutaatiomatriisiin

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Markovin graafi on



Jonoavaruudet Σ_P ja Ω_P ovat äärellisiä.

Lemma 7.7. *Matriisia A vastaavan Markovin graafin $\mathcal{G}(A)$ kärjestä i kärkeen j on $(A^m)_{ij}$ kävelyä, joiden pituus on m .*

Todistus. Olkoon $S(m, i, j)$ kärjestä i alkavien kärkeen j päättyvien sellaisten kävelyjen lukumäärä, joiden pituus on m . Markovin graafin määritelmän nojalla väite pätee, kun $m = 1$. Oletetaan, että $S(m, i, k) = (A^m)_{ik}$ kaikille $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ jollain $m \in \mathbb{N} - \{0\}$. Kävelystä, joka alkaa kärjestä i , päättyy kärkeen k ja jonka pituus on m saadaan kävely, joka alkaa kärjestä i , päättyy kärkeen j ja jonka pituus on $m+1$, jos ja vain jos $A_{kj} = 1$. Siispä

$$S(m+1, i, j) = \sum_{A_{jk}=1} S(m, i, k) = \sum_{k=0}^{N-1} S(m, i, k) A_{kj} = (A^{m+1})_{ik}. \quad \square$$

Propositio 7.8. $\#\mathcal{P}_n(\sigma|_{\Sigma_A}) = \#\mathcal{P}_n(\sigma|_{\Omega_A}) = \text{tr}(A^n)$.

Todistus. Olkoon $a_0a_1 \cdots a_{n-1}a_0$ suljettu kävely. Tällöin

$$\sigma^n(\overline{a_0a_1 \cdots a_{n-1}}) = \overline{a_0a_1 \cdots a_{n-1}}$$

ja havaitsemme, että

$$\#\mathcal{P}_n = \sum_{i=0}^{N-1} S(n, i, i).$$

Väite seuraa Lemmasta 7.7. □

Jos on $n \in \mathbb{N}$ siten, että $A^n > 0$ (siis kaikki matriisin A^n kertoimet ovat positiivisia), niin A on *transitiivinen*.

Lemma 7.9. *Jos A on transitiivinen, niin*

- (1) *matriisin A jokaisella rivillä ja jokaisella sarakeella on ainakin yksi 1 ja*
- (2) *on $n \in \mathbb{N}$ siten, että $A^n > 0$ kaikilla $m \geq n$.*

Todistus. (1) Olkoon $i \in \mathcal{A}$. Jos $A_{ij} = 0$ kaikilla $j \in \mathcal{A}$, niin $(A^2)_{ik} = \sum_{j=0}^{N-1} A_{ij}A_{jk} = 0$ kaikilla $k \in \mathcal{A}$ ja induktiolla nähdään, että A ei ole transitiivinen. Sarakkeita koskeva väite todistetaan samalla tavalla

(2) Oletetaan, että $A^\ell > 0$. Koska matriisin A jokaisella rivillä on ainakin yksi positiivinen kerroin eikä yhtään negatiivista, niin

$$(A^{\ell+1})_{ij} = \sum_{k=0}^{N-1} A_{ik}(A^\ell)_{kj} > 0. \quad \square$$

Propositio 7.10. *Olkoon A transitiivinen ja olkoon α äärellinen kävely graafissa $\mathcal{G}(A)$. Tällöin on kävely β siten, että $\overline{\alpha\beta}$ on matriisia A vastaavan topologisen Markovin ketjun jaksollinen rata.*

Todistus. Koska A on transitiivinen, niin Lemman 7.7 nojalla on kävely β kävelyn α päätepisteestä sen alkupisteeseen. suljettu polku $\alpha\beta$ määrää jaksollisen radan. □

Seuraus 7.11. *Olkoon A transitiivinen ja olkoon α kävely, jonka pituus on m graafissa $\mathcal{G}(A)$. Tällöin sylinterit $C_\alpha^{[n_0, n_0+m]}$ eivät ole tyhjiä.* □

Propositio 7.12. *Jos A on transitiivinen, niin jokainen avaruuden Σ_A sylinteri sisältää jaksollisen pisteen ja jokainen avaruuden Ω_A symmetrinen sylinteri sisältää jaksollisen pisteen.*

Todistus. Harjoitustehtävä 7.4. □

Seuraus 7.13. *Jos A on transitiivinen, niin topologisten Markovin ketjujen $\sigma: \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ ja $\sigma: \Omega_A \rightarrow \Omega_A$ jaksolliset pisteet ovat tiheässä.* □

Propositio 7.14. *Jos A on transitiivinen, niin topologiset Markovin ketjut $\sigma: \Omega_A \rightarrow \Omega_A$ ja $\sigma: \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ ovat topologisesti sekoittavia, erityisesti siis topologisesti transitiivisia.*

Todistus. Osoitamme väitteen kaksipuolisten jonojen tapauksessa. Kuten Proposition 6.10 todistuksessa riittää tarkastella symmetrisiä sylintereitä $C_\alpha^{[-K,K]}(A)$ ja $C_\beta^{[-K,K]}(A)$. Koska matriisi A on transitiivinen, on $M \in \mathbb{N}$ siten, että $A^M > 0$. Erityisesti siis $(A^\ell)_{\alpha_K \beta_{-K}} > 0$ kaikilla $\ell \geq M$, joten on kävely $w = \alpha_K \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_\ell \beta_{-K}$. Lemman 7.10 nojalla on jaksollinen piste, $\overline{ww'} \in C_\alpha^{[-K,K]}(A) \cap \sigma^n C_\beta^{[-K,K]}(A)$ sopivalla $n \in \mathbb{N}$. \square

Seuraus 7.15. *Jos A on transitiivinen siirtymämatriisi, niin topologiset Markovin ketjut $\sigma: \Omega_A \rightarrow \Omega_A$ ja $\sigma: \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ ovat kaoottisia.*

Todistus. Koska käytämme vähintään kahta symbolia ja A on transitiivinen, niin jonoavaruudet Σ_A ja Ω_A ovat äärettömiä. Väite seuraa Seurauksesta 7.13 ja Propositiosta 7.14. \square

7.4 Arnoldin kissakuvaus

Kokonaislukukertoiminen kääntyvä matriisi $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SL}_2 \mathbb{Z}$ määrää lineaarikuvauksen $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x) = Ax$, jonka dynamiikka on yksinkertaista: Lineaarikuvauksen L ominaisarvot ovat

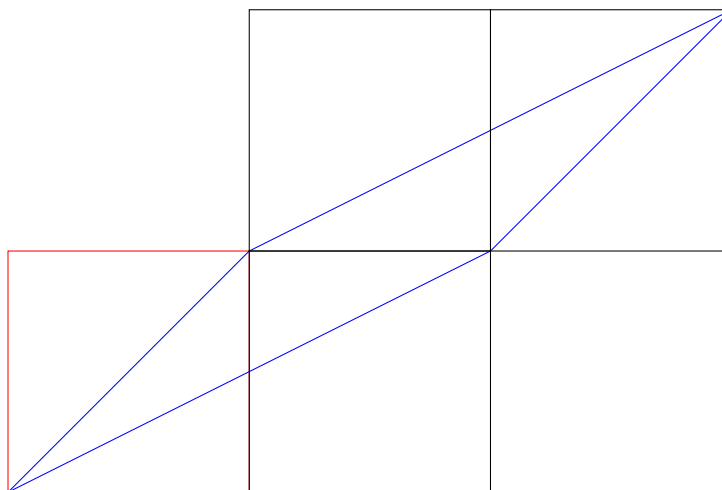
$$\lambda_1 = \phi^2 = \phi + 1 \approx 2.618$$

ja $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$, missä $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ on kultaisen leikkauksen luku. Vastaavat ominaisvaruudet ovat *epävakaa aliavaruus*

$$E^u = \mathbb{R} (1, \phi - 1) = \{(t, t(\phi - 1)) : t \in \mathbb{R}\}$$

ja *vakaa aliavaruus*

$$E^s = (E^u)^\perp = \mathbb{R} (-\phi + 1, 1).$$



Kuva 7.6: Yksikköneliön kuva kissakuvauksella

Olkoon $I^2 = [0, 1]^2$. Luvaus $\bar{L}: I^2 \rightarrow I^2$,

$$\bar{L}(x) = Lx - [Lx] = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - [2x_1 + x_2] \\ x_1 + x_2 - [x_1 + x_2] \end{pmatrix}$$

on *Arnoldin kissakuvaus*. Kuvauksen L determinantti on 1, joten se säilyttää pinta-alan, ja pieni pohdinta näyttää, että \bar{L} on itse asiassa bijektio, jonka käänteiskuvaus on $x \mapsto L^{-1}x \pmod{1}$.

Kissakuvausta kannattaa ajatella hieman abstraktimmin. Määritellään tasossa ekvivalenssirelaatio \sim asettamalla $x \sim y$, jos ja vain jos $x - y \in \mathbb{Z}^2$. Tämän ekvivalenssirelaation ekvivalenssiluokat muodostavat tekijäjoukkona *toruksen* $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{R}^2/\sim$, joka voidaan varustaa tekijämetriikalla

$$d_{\sim}(x, y) = \min\{d(\tilde{x}, \tilde{y}) : \tilde{x} \in x, \tilde{y} \in y\}.$$

Ajattelemme kissakuvauksen kuvauksena $\bar{L}: \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$,

$$L(x + \mathbb{Z}^2) = Lx + \mathbb{Z}^2. \quad (7.1)$$

Lemma 7.16. *Kuvaus \bar{L} on hyvin määritelty.*

Todistus. Jos $x - y \in \mathbb{Z}^2$, niin $Lx - Ly = L(x - y) \in \mathbb{Z}^2$ koska matriisin L kertoimet ovat kokonaislukuja. \square

Kissakuvaus ja sen käänteiskuvaus ovat jatkuvia tekijämetriikan suhteen, kissakuvaus on siis toruksen homeomorfismi. Yleisemmin jokainen kokonaislukukertoiminen 2×2 -matriisi, jonka determinantti on 1 määrää tällaisen kuvauksen.

Kuvausta \bar{L} kutsutaan kissakuvaukseksi koska sitä on perinteisesti havainnollistettu seuraamalla yksikköneliöön piirretyn kissan kuvan muuttumista kuvausta iteroitaessa. Tällaiset tietokonehavainnollistukset antavat yleensä virheellisen mutta viihdyttävän käsityksen, että \bar{L} olisi jaksollinen kuvaus. Virhe johtuu siitä, että pisteet, joiden molemmat koordinaatit ovat rationaalisia, ovat Harjoitustehtävän 7.5 nojalla kuvauksen \bar{L} jaksollisia pisteitä. Havainnollistuksessa käytettävän kuvan pikselien koordinaatit ovat rationaalilukuja.

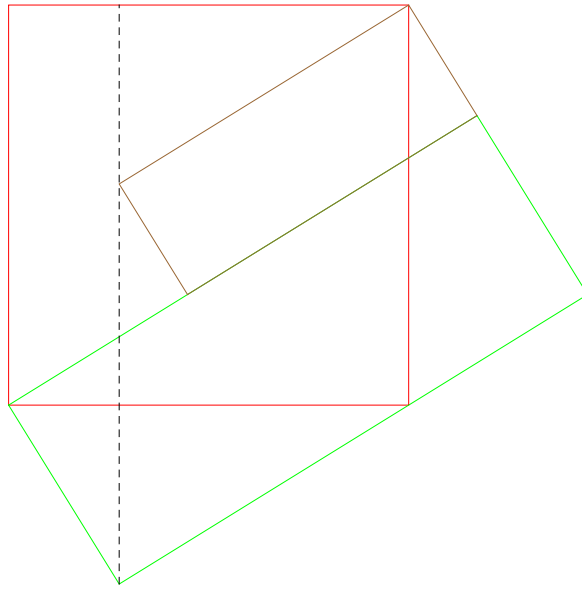
Yksikköneliö ei sovellu kissakuvauksen koodaukseen kovin hyvin, joten valitsemme kaksi suljettua suorakulmiota kuten kuvassa 7.7

- R_1 , jonka kärjet ovat $0, (\frac{5-\sqrt{5}}{10}, -\frac{1}{\sqrt{5}}), (1 + \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{5-\sqrt{5}}{10})$ ja $(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}, \frac{5+\sqrt{5}}{10})$ ja
- R_2 , jonka kärjet ovat $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{5-\sqrt{5}}{10}), (\frac{5+3\sqrt{5}}{10}, \frac{5+\sqrt{5}}{10}), (1, 1)$ ja $(\frac{5-\sqrt{5}}{10}, 1 - \frac{1}{\sqrt{5}})$.

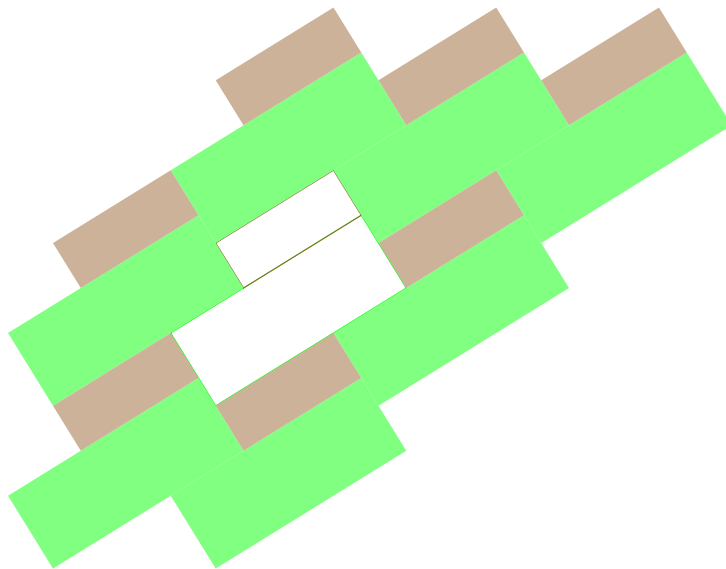
Suorakulmioiden R_1 ja R_2 sivut ovat ominaisavaruuksien E^s ja E^u suuntaisia ja niiden yhdiste sisältää edustajan jokaisesta ekvivalenssiluokasta. Koska valitsemme suljetut suorakulmiot, joillakin pisteillä on kaksi tai kolme edustajaa joukossa $R_1 \cup R_2$.

Voidaan tarkastaa, että joukon $R_1 \cup R_2$ siirrot kokonaislukuvektoreilla laatoittavat tason siten, että joukot $(R_1 \cup R_2) + k_1$ ja $(R_1 \cup R_2) + k_2$ ovat erillisiä tai niiden leikkaus sisältyy kahden affiinin suoran yhdisteeseen kaikilla $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^2$.

Suorakulmiot R_1 ja R_2 sopivat hyvin yhteen kuvauksen L kanssa kuten näemme kuvassa 7.9. Suorakulmioiden R_1 ja R_2 yhteinen jana sisältyy lineaarikuvauksen L epävakaaseen suoraan, joten kummankin suorakulmion pituus tulee kerrotuksi ominaisarvolla λ_1 , kun taas leveys jaetaan luvulla λ_1 .



Kuva 7.7: Suorakulmiot R_1 ja R_2 .

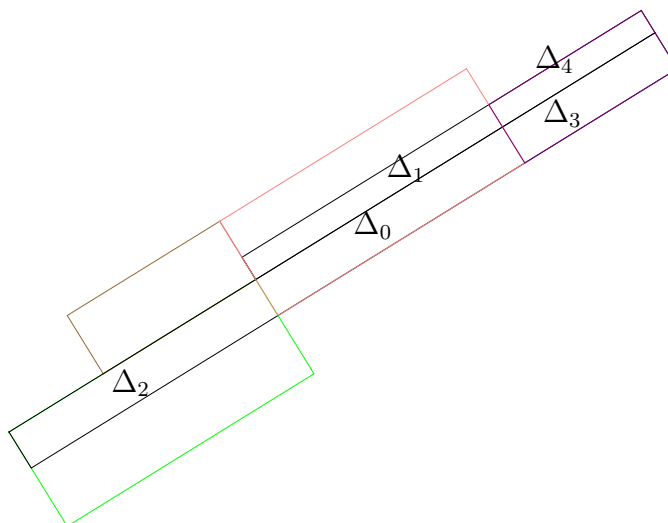


Kuva 7.8: Tason laatoitus laatoilla $R_1 + k$ ja $R_2 + k$, $k \in \mathbb{Z}^2$.

$L(R_1)$ leikkaa täsmälleen suorakulmioita R_1 , $R_1 + (1, 1)$ ja $R_2 + (2, 1)$. Koodaamista varten jaamme suorakulmion R_1 kolmeen ja suorakulmion R_2 kahteen osaan: Olkoot

$$\begin{aligned}\Delta_0 \cup \Delta_2 &= R_1 \cap \overline{LR_1}, \\ \Delta_1 &= R_1 \cap \overline{LR_2}, \\ \Delta_3 &= R_2 \cap \overline{LR_1}, \\ \Delta_4 &= R_2 \cap \overline{LR_2}.\end{aligned}$$

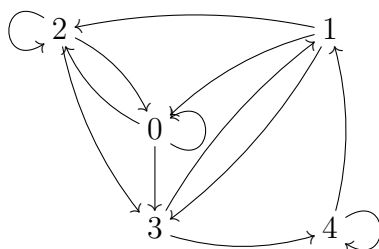
Laatat Δ_0 , Δ_1 ja Δ_2 jakavat laatan R_1 kolmeen viipaleeseen, jotka kulkevat laatan R_1



Kuva 7.9: Suorakulmioiden R_1 ja R_2 kuvautuminen kuvauksella L .

päästä päähän epävakaa aliavaruuden suuntaan ja laatat Δ_3 ja Δ_4 jakavat laatan R_2 kahteen vastaavanlaiseen viipaleeseen. Suorakulmioiden kuvautumista havainnollistetaan kuvassa 7.9.

Pisteiden reitit kuvauksella \bar{L} voidaan kuvata suunnatulla graafilla, jossa on nuoli kärjestä i kärkeen j , jos laatan Δ_i kuva leikkaa laattaa Δ_j .



Samat tiedot voidaan ilmaista tämän suunnatun graafin naapurimatriisilla. Tarkasteltavassa tilanteessa naapurimatriisi on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

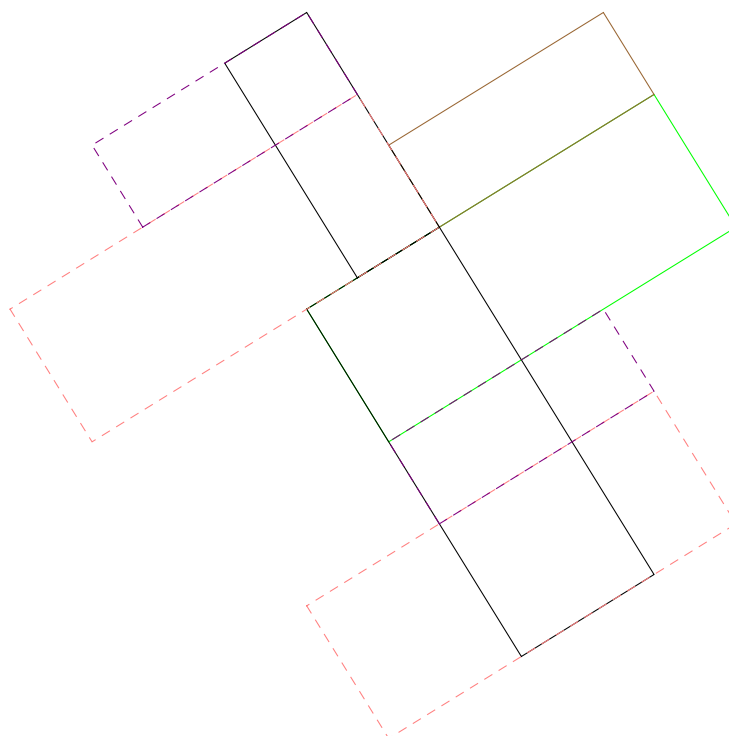
kun rivit indeksoidaan symboleilla 0, 1, 2, 3 ja 4.

Myös käänteiskuvaus \bar{L}^{-1} on yhteensopiva laattojen R_1 ja R_2 kanssa vastaavalla tavalla.

Lause 7.17. *Arnoldin kissa on kaoottinen dynaaminen systeemi.*

Todistus. Määritellään kuvaus $s: \Omega_A \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ kuten luvussa 7.2 asettamalla

$$s(\omega) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} L^{-n} \Delta_{\omega_n}.$$



Kuva 7.10: Suorakulmioiden R_1 ja R_2 kuvautuminen kuvauksella L^{-1} .

Koska L kutistaa vakaan aliavaruuden suunnassa ja L^{-1} kutistaa epävakaan aliavaruuden suunnassa, niin s on jatkuva surjektio. Määritelmästä seuraa, että $s \circ \sigma = \bar{L} \circ s$, joten s on semikonjugaatio.

Lasku osoittaa, että

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

joten A on transitiivinen. Seurauksen 7.15 nojalla σ_A on kaoottinen, joten Arnoldin kissa on kaoottinen Seurauksen 6.16 nojalla. \square

Harjoitustehtäviä

7.1. Osoita, että dynaamisella systeemillä $T_3: K \rightarrow K$ on tiheä rata.

7.2. Todista Lemma 7.4.²

7.3. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Osoita, että jonoavaruudet Σ_A ja Ω_A ovat ylinumeroituvia.

²Osoita, että komplementti on avoin.

7.4. Todista Propositio 7.12.

7.5. Osoita, että kaikki joukon $[0, 1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$ pisteet ovat Arnoldin kissakuvauksen jaksollisia pisteitä.³

7.6. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ja olkoon $L_\alpha = \{(t, \alpha t) : t \in \mathbb{R}\}$ suora, jonka kulmakerroin on α . Osoita, että suoran L_α kuvajoukko toruksella $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ on tiheä.

7.7. Lineaarikuvaus $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$S(x) = (x_1 + x_2, x_2),$$

määrää kuvauksen $\bar{S}: \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$,

$$\bar{S}(x + \mathbb{Z}^2) = S(x) + \mathbb{Z}^2.$$

Osoita, että dynaamisen systeemin $\bar{S}: \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ jaksolliset pisteet ovat tiheässä ja että se riippuu herkästi alkuarvoista, mutta systeemi ei ole kaottinen.

³Lavenna koordinaattien nimittäjät samoiksi. Luennolla osoitettiin, että F on bijektio.

Luku 8

Logistinen perhe

Tässä luvussa tarkastelemme luvun 1 harjoitusten yhteydessä määriteltyjen logististen funktioiden muodostamaa dynaamisten systeemien perhettä.

8.1 Logistisen perheen jakson kaksinkertaistava sarja

Määrittelemme parametrisoidut kuvauserheet tämän kurssin tarpeita varten rajoitetussa tilanteessa. Määritelmä on helppo yleistää moniulotteisemmille perheille.

Olko $I, \mathcal{L} \subset \mathbb{R}$ välejä. Olkoon $g_\lambda: I \rightarrow I$ on jatkuva funktio jokaisella $\lambda \in \mathcal{L}$. Kahden muuttujan jatkuva funktio $G: \Lambda \times I \rightarrow I$,

$$G(\lambda, x) = g_\lambda(x)$$

on parametrisoitu perhe kuvauksia $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ välillä $I \subset \mathbb{R}$. Joukko \mathcal{L} on perheen $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ parametrizijoukko.

Esimerkki 8.1. (1) *Logistinen perhe* on sileä: Kuvaus $(\lambda, x) \mapsto \mu x(1-x)$ on äärettömän monta kertaa derivoituva.

(2) Luvussa 6.4 määritellyt telttafunktiot muodostavat kuvauserheen $(T_\lambda)_{\lambda > 0}$.

Tässä luvussa tarkastelemme, miten parametrisoidun perheen kuvausten dynamiikka voi muuttua parametrin muuttuessa. Keskitymme logistisen perheen tarkasteluun parametrizijoukolla $\Lambda = [1, \infty[$ ja erityisesti, kun $\Lambda = [1, 4]$

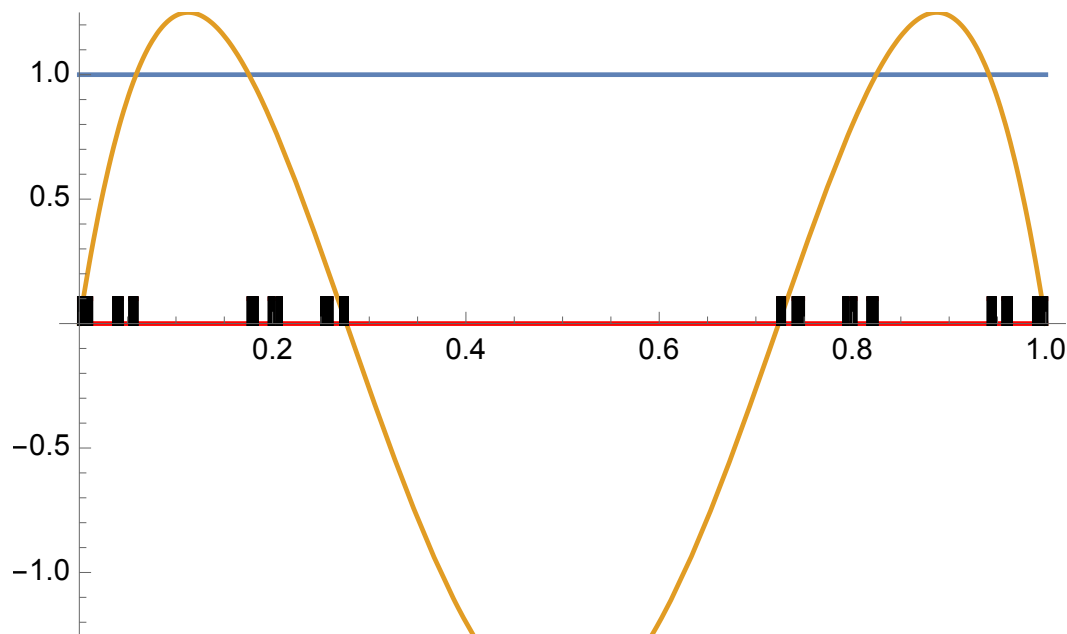
On helppo tarkastaa,¹ että kaikille $x \in \mathbb{R} - [0, 1]$ pätee $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$, kun $n \rightarrow \infty$, joten kaikki mielenkiintoinen dynamiikka tapahtuu yksikkövälin osajoukoissa. Jos $\mu > 4$, niin $F_\mu(\frac{1}{2}) = \frac{\mu}{4} > 1$, joten näillä parametreilla F_μ ei määrää yksikkövälin dynaamista systeemiä. Väli $]\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\mu}}, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\mu}}[$ kuvautuu yksikkövälin ulkopuolelle ja samalla

¹Vertaa telttafunktion tapaukseen luvussa 7.1.

tavalla kuin telttakuvausten tilanteessa voidaan osoittaa, että jokaisella parametrilla $\mu > 4$ logistisen funktion F_μ rajoittuma epälineaariseen Cantorin joukkoon

$$K'_\mu = [0, 1] - \bigcup_{k=0}^{\infty} (F_\mu^k)^{-1} \left(\left] \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\mu}}, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\mu}} \right[\right)$$

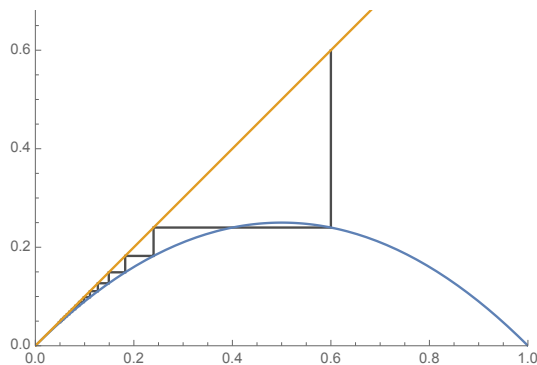
on topologisesti konjugaatti vasemman siirron $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ kanssa. Dynamiikka joukon K'_μ komplementissa on hyvin vakaata ja yksinkertaista. Katso esimerkiksi [Dev, §1.5]. Epälineaarinen Cantorin joukko K'_μ on homeomorfinen tavallisen Cantorin $\frac{1}{3}$ -joukon kanssa vaikka sen konstruktio ei ole yhtä säännöllinen.



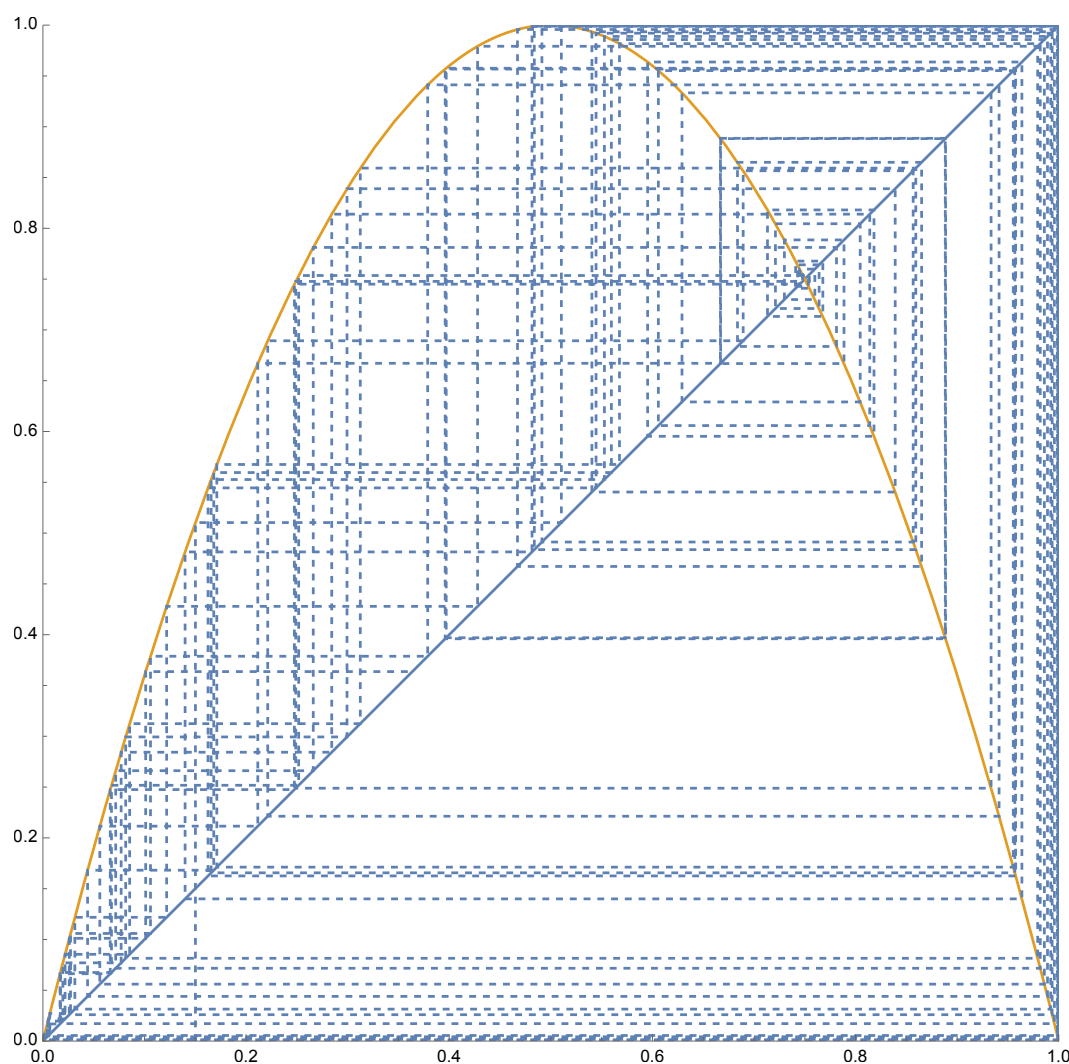
Kuva 8.1: Logistista kuvausta F_5 vastaava epälineaarinen Cantorin joukko ja kuvauksen F_5^2 kuvaajaa.

Kun $1 \leq \mu \leq 4$, kuvauksen F_μ maksimi toteuttaa $0 \leq \max_{x \in [0,1]} F_\mu(x) = F_\mu\left(\frac{1}{2}\right) \leq 1$ ja voimme rajoittua tarkastelemaan dynaamista systeemiä $F_\mu: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

Harjoitustehtävän 1.12 nojalla 0 on kuvauksen F_1 epämääräinen kiintopiste. Se hylkii negatiivisia lukuja ja vetää puoleensa kaikkia yksikkövälin pisteitä.



Kuva 8.3: $\mu = 1$. Dynamiikka on hyvin yksinkertaista.

Kuva 8.2: $\mu = 4$

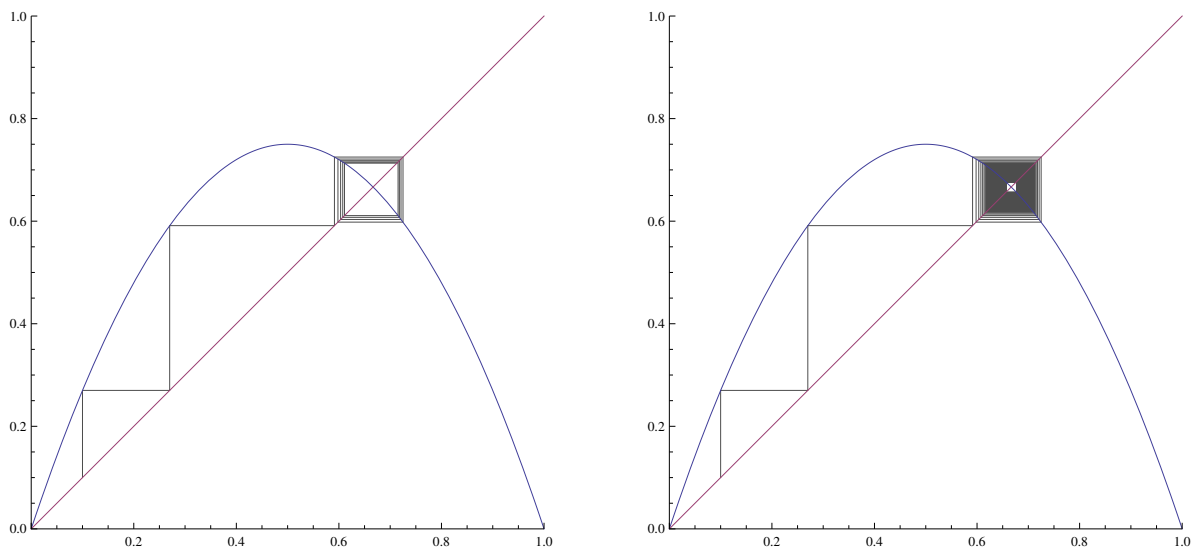
Parametrivälin toisessa ääripäässä kuvaus $F_4: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ on kaoottinen Harjoitustehtävän 6.7 nojalla. Kuva 8.2 havainnollistaa tämän systeemin tiheää rataa. Tarkastelomme tässä luvussa, miten dynamiikka muuttuu hyvin yksinkertaisesta kohti kaoottista, kun parametria μ kasvatetaan välillä $[1, 4]$.

Kuvauksella F_μ on kaksi kiintopistettä 0 ja $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$, kun $\mu > 1$. Kun $\mu > 1$, niin 0 on hylkivä kiintopiste. Toinen kiintopiste p_μ on Proposition 1.9 nojalla puoleensavetävä kiintopiste, kun $1 < \mu < 3$ koska tällöin

$$|F'_\mu(p_\mu)| = |\mu - 2\mu p_\mu| = |2 - \mu| < 1.$$

Kun $\mu = 3$, $F'_\mu(p_\mu) = -1$, joten $p_3 = \frac{2}{3}$ on epämääräinen kiintopiste. Osoittautuu, että p_3 on puoleensavetävä koko avoimella yksikköväliä. Se ei kuitenkaan vedä pisteitä puoleensa eksponentiaalisella nopeudella² vaan huomattavasti hitaammin. Tätä ilmiötä havainnollistetaan kuvassa 8.4.

²Katso luku 1.5.

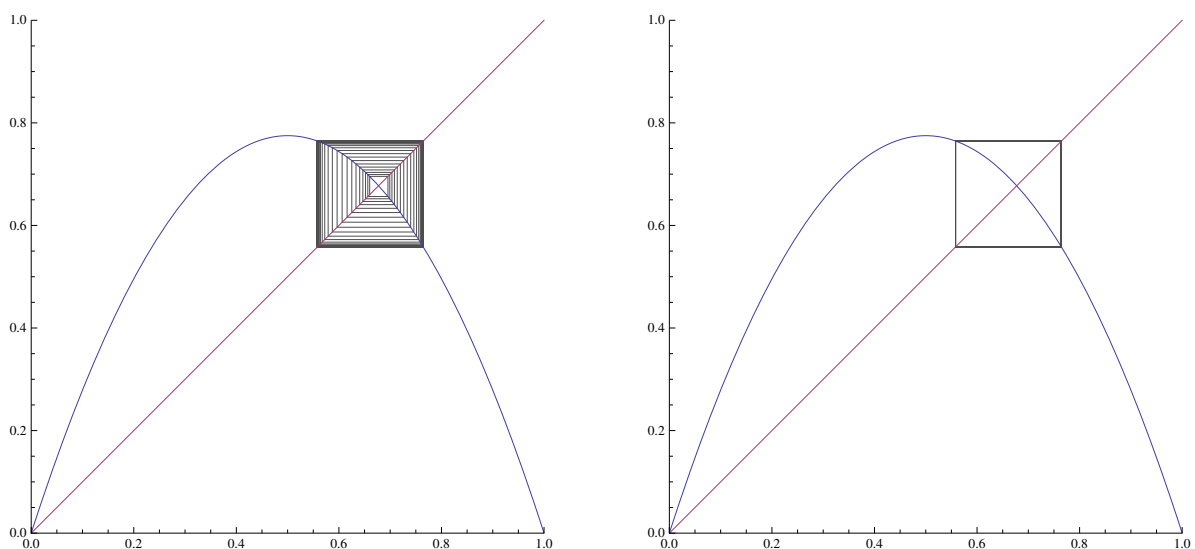


Kuva 8.4: $\mu = 3$. Vasen kuva näyttää graafisen analyysin ensimmäiset 10 iteraatiota ja oikea näyttää ensimmäiset 500 iteraatiota.

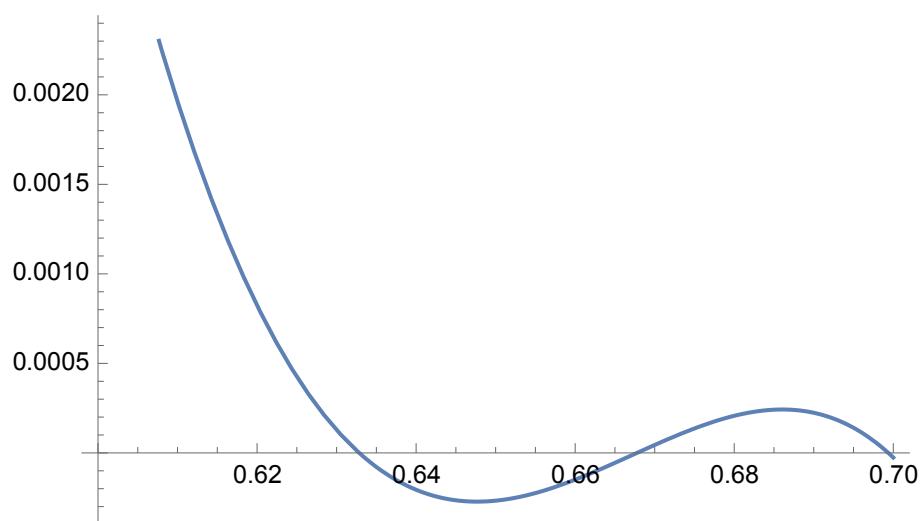
Kun $\mu > 3$, niin $|F'_\mu(p_\mu)| > 1$, joten p_μ on hylkivä. Tämän huomaa myös graafisella analyysillä. Kuvan 8.5 vasen kuva näyttää 500 ensimmäistä iteraatiota alkuarvolla $x = 0.66$, joka on lähellä kiintopistettä ja oikeanpuoleinen kuva näyttää iteraatiot 450-500. Radat lähestyvät nyt puoleensavetävää rataa

$$\{q_\mu^\pm\} = \left\{ \frac{\mu + 1 \pm \sqrt{(\mu - 3)(\mu + 1)}}{2\mu} \right\},$$

jonka jakso on 2. Tätä ilmiötä havainnollistaa myös erotuksen $F_{3.1}^2$ -id kuvaaja Kuvassa 8.6.

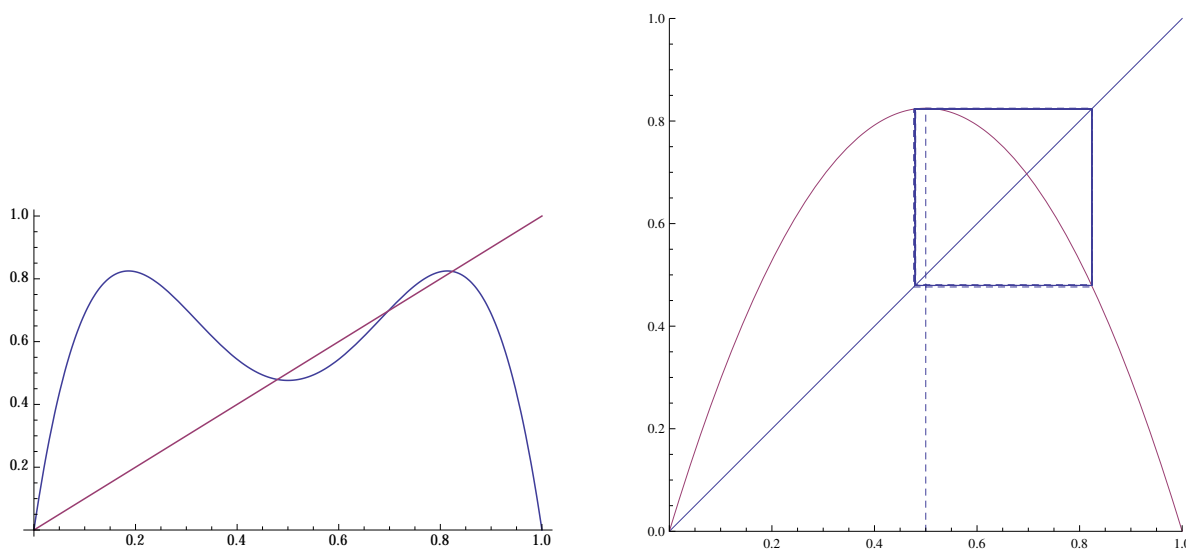


Kuva 8.5: $\mu = 3.1$



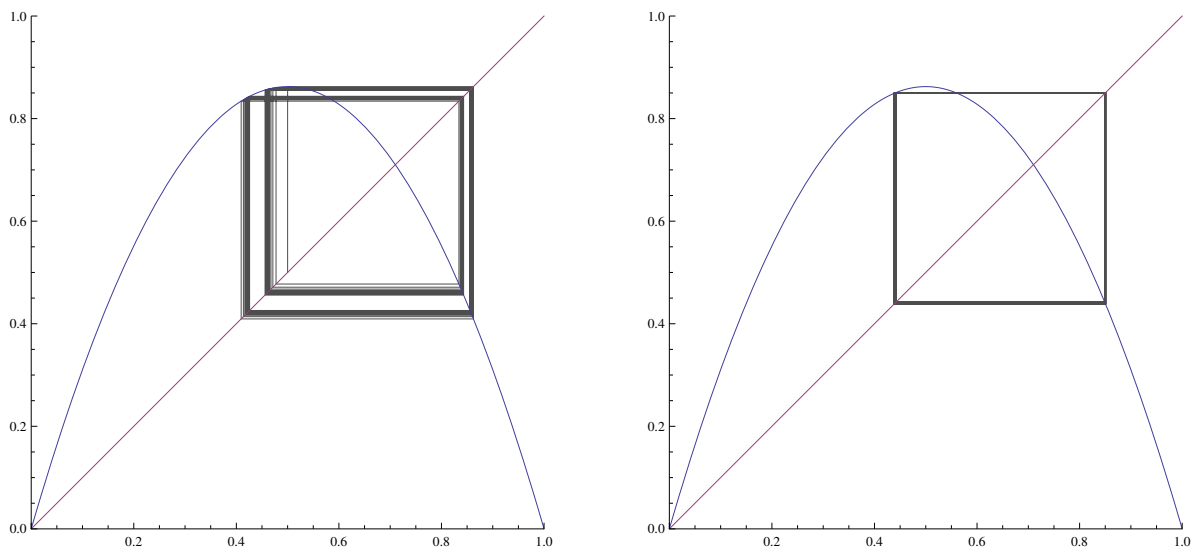
Kuva 8.6: Funktion $F_{3,0.1}^2$ – id kuvaaja. Kiintopisteen $p_{3,0.1} \approx 0.668$ lähellä on kaksi 2-jaksollista pistettä.

Kun parametria μ kasvatetaan edelleen maltillisesti, dynamiikan luonne ei muutu. Kuva 8.7 esittää tilannetta, kun $\mu = 3.3$.



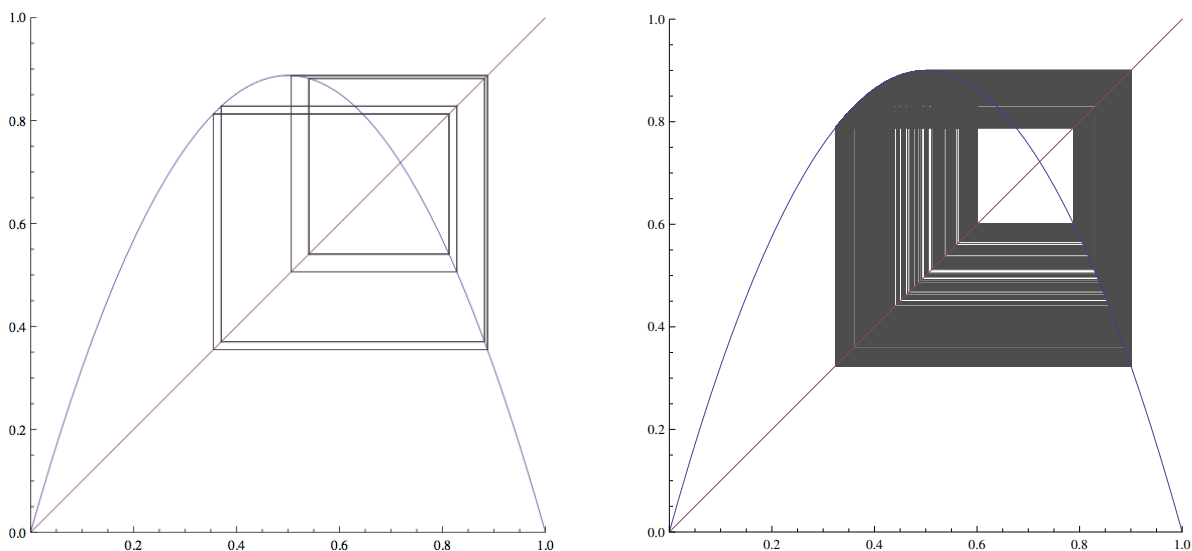
Kuva 8.7: $\mu = 3.3$. Vasen kuva on funktion $F_{3,3}^2$ kuvaaja, josta näkee, missä 2-jaksolliset pisteet $q_{3,3}^\pm$ ovat.

Kun $\mu = 1 + \sqrt{6} \approx 3.4495$, ensimmäisten iteraatioiden perusteella näyttää, että dynamiikka on muuttunut, mutta jos jätämme radan alkuosan pois ja tarkastelemme vain iteraatioita 4950 – 5000, havaitsemme, että systeemillä näyttäisi olevan edelleen puoleen-savetävä rata, jonka jakso on 2.

Kuva 8.8: $\mu = 1 + \sqrt{6}$.

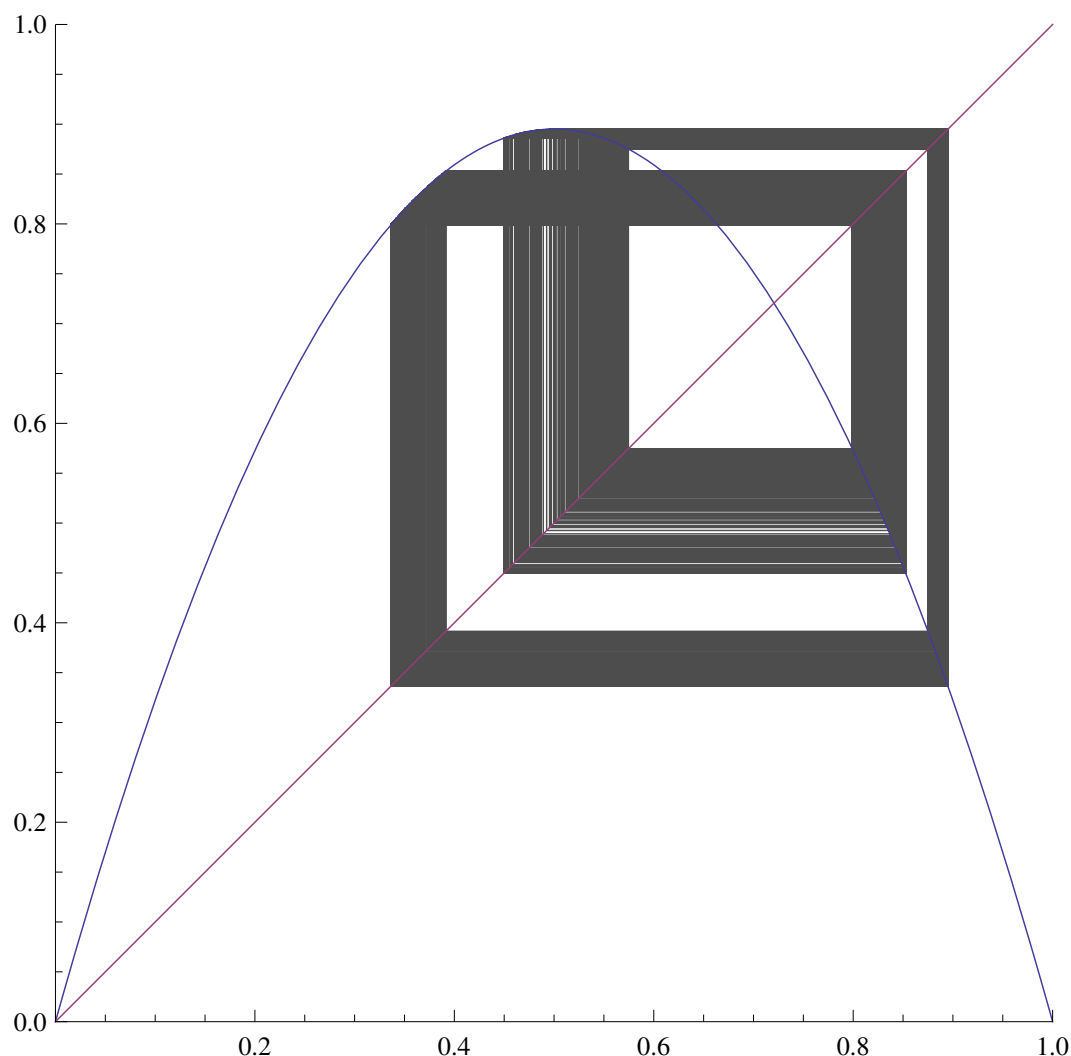
Lasku osoittaa, että $(F_{1+\sqrt{6}}^2)'(q_{1+\sqrt{6}}^\pm) = -1$, joten rata on epämääräinen eikä se ole vahvasti puoleensavetävä, mikä on yhteensopiva edellä tekemämme havainnon kanssa.

Kun parametria μ kasvatetaan edelleen, ilmestyy 4-jaksollinen puoleensavetävä rata. Näillä parametreilla kuvauksella F_μ on edelleen myös kiintopiste p_μ ja 4-jaksolliseen raataan sisältymätön 2-jaksollinen rata $\{q_\mu^\pm\}$, jotka ovat nyt kuitenkin hylkiviä. Parametrilla $\mu \approx 3.5440903596$ 4-jaksollinen rata muuttuu hylkiväksi ja ilmestyy puoleensavetävä 8-jaksollinen rata. Parametrilla $\mu = 3.55$ 8-jaksollinen puoleensavetävä rata erottuu hyvin. Mutta mitä on tapahtunut parametrilla $\mu = 3.6$? Molemmissa kuvissa on jätetty alusta noin 5000 iteraatiota huomioimatta.

Kuva 8.9: $\mu = 3.55$ ja $\mu = 3.6$

Osoittautuu, että on ääretön kasvava parametrijono $(\mu_k)_{k=0}^\infty = 1, 3, 1 + \sqrt{6}, \dots$ siten,

että kuvauksella F_μ on puoleensavetävä 2^k -jaksollinen rata, kun $\mu_{k-1} < \mu \leq \mu_k$. Lisäksi kuvauksella F_μ on 2^ℓ -jaksollinen hylkivä rata jokaisella $0 \leq \ell < k$. Tätä logistisen funktion dynamiikan monimutkaistumista parametrin kasvaessa kutsutaan *jakson kaksinkertaistavaksi sarjaksi* bifurkaatioita. Jono $(\mu_k)_{k=0}^\infty$ suppenee kohti raja-arvoa $\mu_\infty \approx 3.57$.



Kuva 8.10: $\mu = 3.57 \approx \mu_\infty$

8.2 Schwarzin derivaatta

Tässä luvussa teemme puoleensavetäviä ratoja koskevan havainnon, joka auttaa logistisen perheen dynamiikan muutoksen havainnollistamisessa.

Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ avoin joukko ja olkoon $I_f = \{x \in I : f'(x) \neq 0\}$. Kolme kertaa derivoituvan funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ Schwarzin derivaatta on $Sf: I_f \rightarrow \mathbb{R}$,

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

Esimerkki 8.2. Logistisen funktion F_μ Schwarzin derivaatta on riippumaton parametrin μ arvosta: $SF_\mu(x) = \frac{-6}{(1-2x)^2} < 0$

Lemma 8.3. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ avoin väli ja olkoot $f, g: I \rightarrow I$ kolme kertaa derivoituvia.

(1) Tällöin $S(f \circ g) = (Sf) \circ g (g')^2$.

(2) Jos $Sf, Sg < 0$, niin $S(f \circ g) < 0$.

Todistus. Harjoitustehtävä 8.2. □

Lemma 8.4. Jos $Sf < 0$, niin funktiolla f' ei ole positiivista lokaalia minimiä eikä negatiivista lokaalia maksimia.

Todistus. Jos $y_0 \in I$ on funktion f' maksimipiste, niin $f''(y_0) = 0$ ja $f'''(y_0) < 0$. Siis $Sf(y_0) = \frac{f'''(y_0)}{f'(y_0)} < 0$, joten $f'(y_0) < 0$. □

Propositio 8.5. Jos kuvauksella F_μ on puoleensavetävä jaksollinen rata, niin kriittinen piste $\frac{1}{2}$ sisältyy sen vakaaseen joukkoon.

Todistus. Olkoon $x_0 \in I$ puoleensavetävän p -jaksollisen radan piste ja olkoon³

$$J =]c, d[\subset W^s(x_0) \subset I$$

maksimaalinen avoin väli, jolle $x_0 \in J$. Jos mikään väleistä $J, F_\mu(J), \dots, F_\mu^{p-1}(J)$ ei sisällä kriittistä pistettä $\frac{1}{2}$, niin $F_\mu^p|_J$ on monotoninen.

Oletetaan, että $F_\mu^p|_J$ on kasvava. Tällöin päätepisteet c ja d ovat p -jaksollisia koska ne eivät sisälly vakaaseen joukkoon. Oletuksen mukaan $0 < (F_\mu^p)'(x_0) < 1$ ja suljetulla välillä $[c, d]$ ei ole muita kuvauksen F_μ^p kiintopisteitä kuin c, x_0 ja d . Koska F_μ^p kuvaa välin J itselleen, väliarvolauseen nojalla on pisteet $c < c' < x_0 < d' < d$, joissa $(F_\mu^p)'(c') = (F_\mu^p)'(d') = 1$, sillä muuten väli $F_\mu(J)$ olisi liian lyhyt.

Esimerkin 8.2 nojalla $SF_\mu(x) < 0$ kaikilla $x \neq \frac{1}{2}$, joten Lemmojen 8.3 ja 8.4 nojalla funktion F_μ^p derivaatalla ei ole positiivista lokaalia minimiä. Siis sillä on oltava nollakohta y_0 välillä $[c', d']$. Ketjusäännön mukaan

$$0 = (F_\mu^p)'(y_0) = \prod_{k=0}^{p-1} F_\mu'(F_\mu^k(y_0)),$$

joten pisteen y_0 rata sisältää funktion F_μ kriittisen pisteen.

Toinen tapaus todistetaan samaan tapaan tarkastelemalla kuvausta F_μ^2 . □

Seuraus 8.6. Kuvauksella $F_\mu: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ on korkeintaan yksi puoleensavetävä rata.

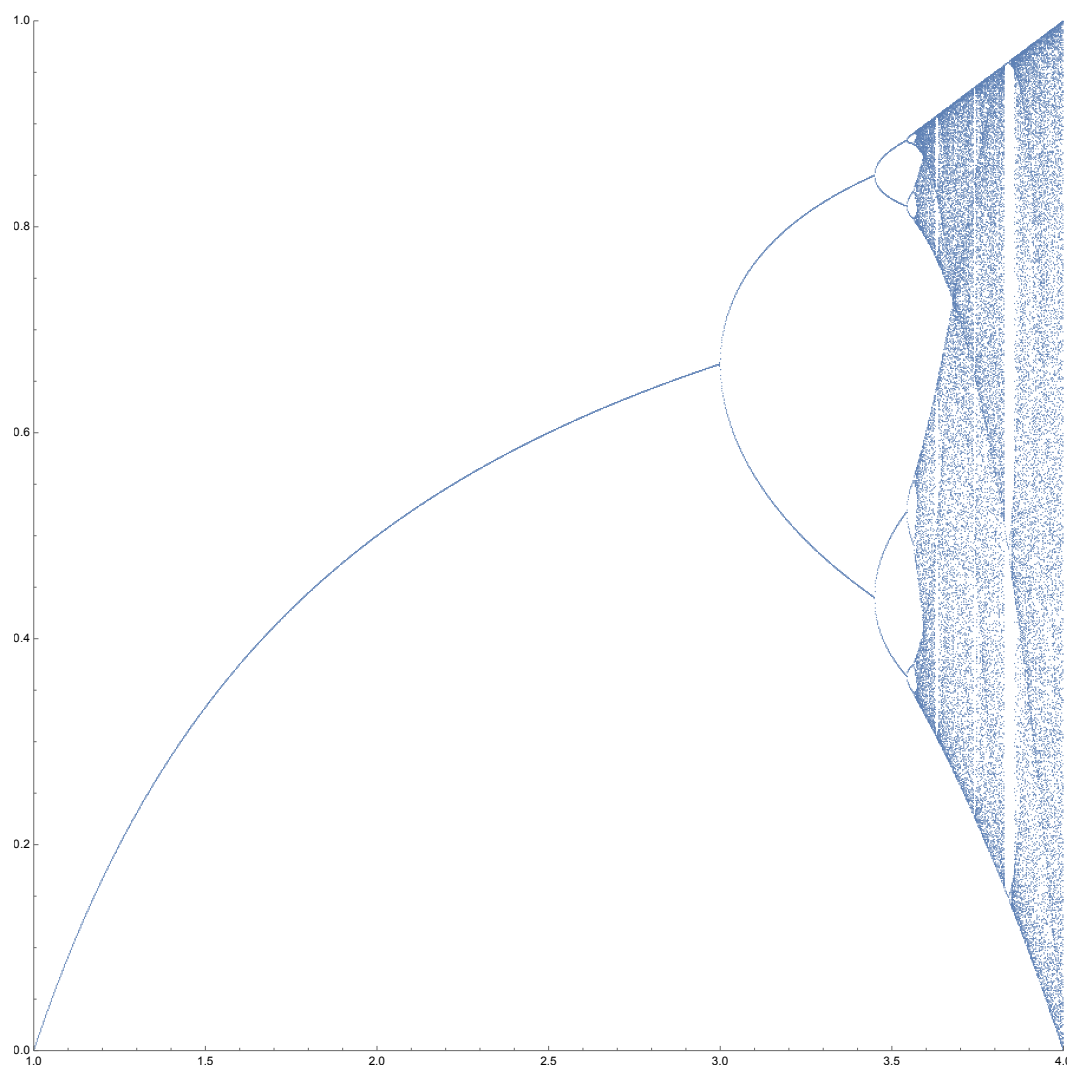
Todistus. Harjoitustehtävä 8.3 □

Seurausta 8.6 käytetään seuraavassa luvussa logistisen perheen dynamiikan kehityksen kuvaamiseen.

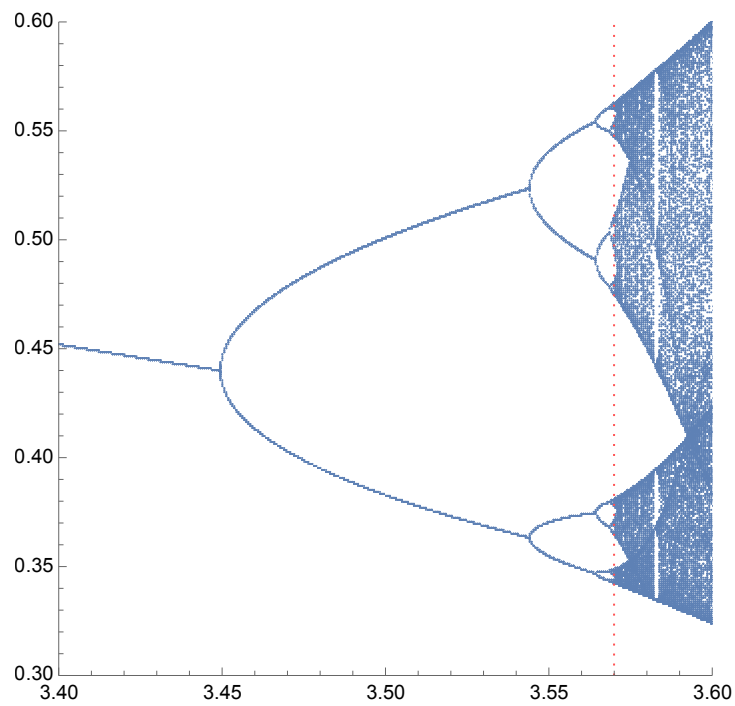
³Muista vakaan joukon $W^s(x_0)$ määritelmä luvusta 1.6.

8.3 Bifurkaatiokaavio

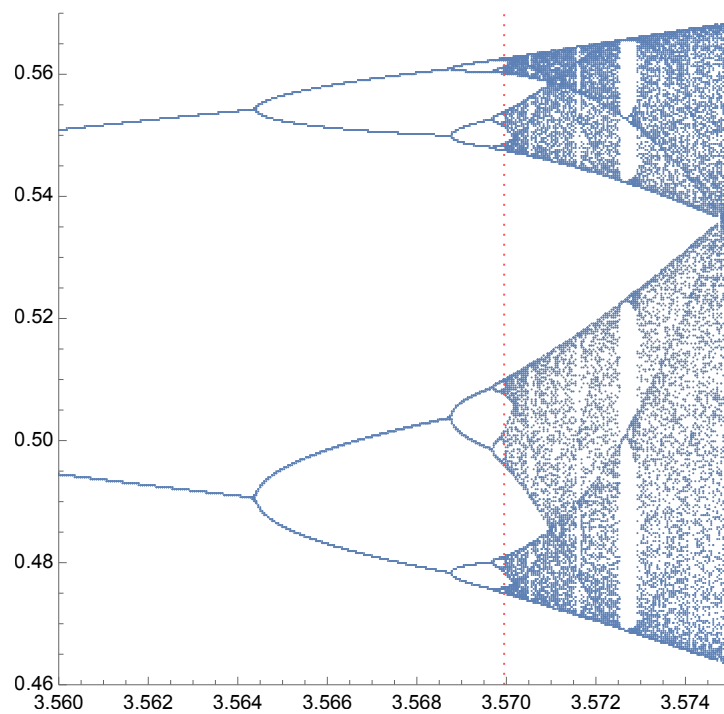
Luvussa 8.1 tarkastelemiamme dynamiikan muutoksia parametrin μ muuttuessa kutsutaan *bifurkaatioiksi*. Logistisen perheen dynamiikan muuttumista kuvaavan *bifurkaatiokaavion* muodostamiseksi lasketaan tasavälisesti valituille parametriarvoille $\mu \in [0, 4]$ funktion F_μ kriittisen pisteen rataa melko pitkälle. Jos kuvauksella F_μ on puoleensavetävä rata, niin pisteet $F_\mu^k(\frac{1}{2})$ ovat lähellä tätä rataa, kun k on riittävän suuri Proposition 8.5 nojalla. Piirretään useita peräkkäisiä pisteitä $F_\mu^k(\frac{1}{2})$ kriittisen pisteen radasta *riittävän suurilla* k . Tällöin puoleensavetävä rata näkyy bifurkaatiokaaviossa, olettaen tietenkin, että pyöritykset eivät aiheuta mainittavia laskuvirheitä.



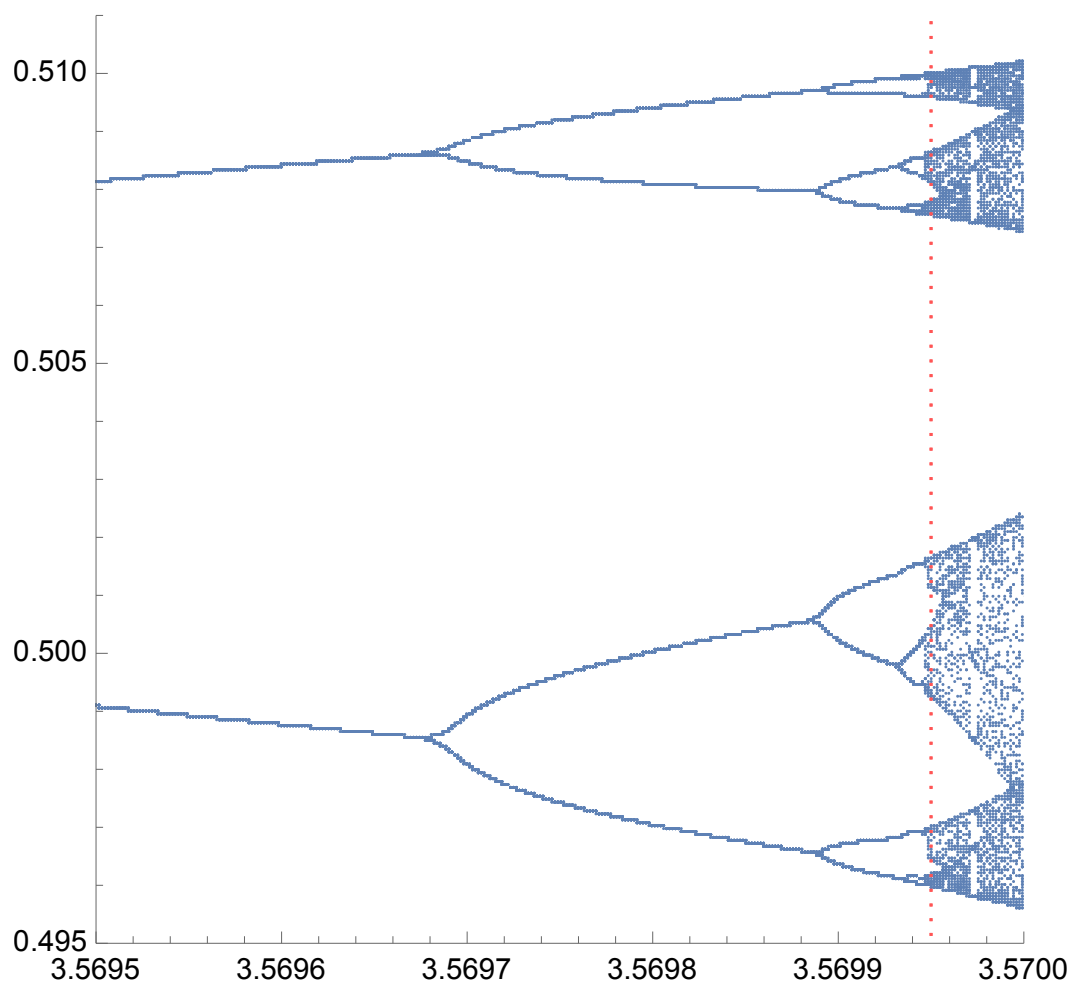
Kuva 8.11: Logistisen perheen bifurkaatiokaavio, kun $\mu \in [1, 4]$.



Kuva 8.12: Yksityiskohta logistisen perheen bifurkaatiokaaviosta, kun $\mu \in [3.4, 3.6]$. Punainen katkoviiva osoittaa parametrin μ_∞ .



Kuva 8.13: Yksityiskohta logistisen perheen bifurkaatiokaaviosta, kun $\mu \in [3.56, 3.575]$. Punainen pisteviiva osoittaa parametrin μ_∞ .



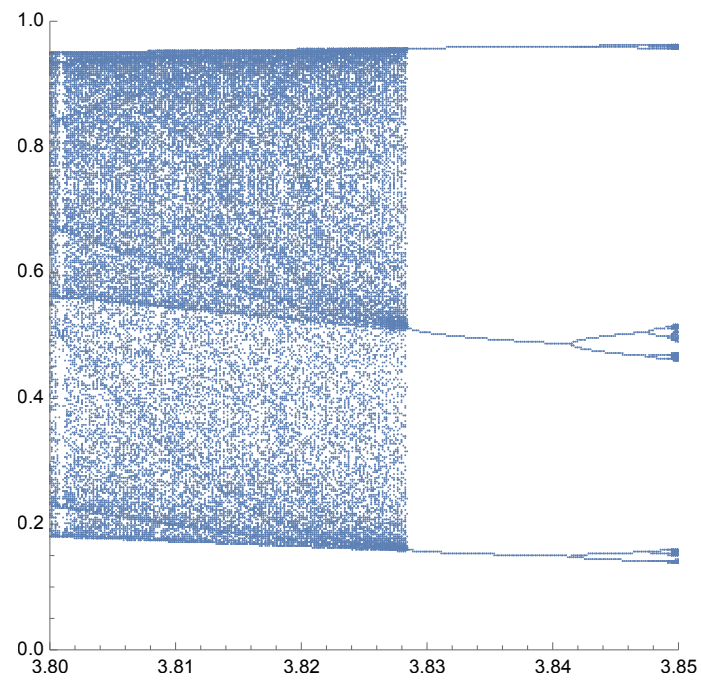
Kuva 8.14: Yksityiskohta logistisen perheen bifurkaatiokaaviosta, kun $\mu \in [3.5695, 3.57]$. Punainen pisteviiva osoittaa parametrin μ_∞ .

Bifurkaatiokaavio näyttää dynamiikan muuttumisen monimutkaisemmaksi, kun parametri μ kasvaa kohti arvoa μ_∞ . Kuvat 8.12, 8.13 ja 8.14 näyttävät, että bifurkaatiokaaviossa toistuu parametreilla μ_k , $k \in \mathbb{N}$, samanlainen jakautuminen kuin parametrilla $\mu_1 = 3$.

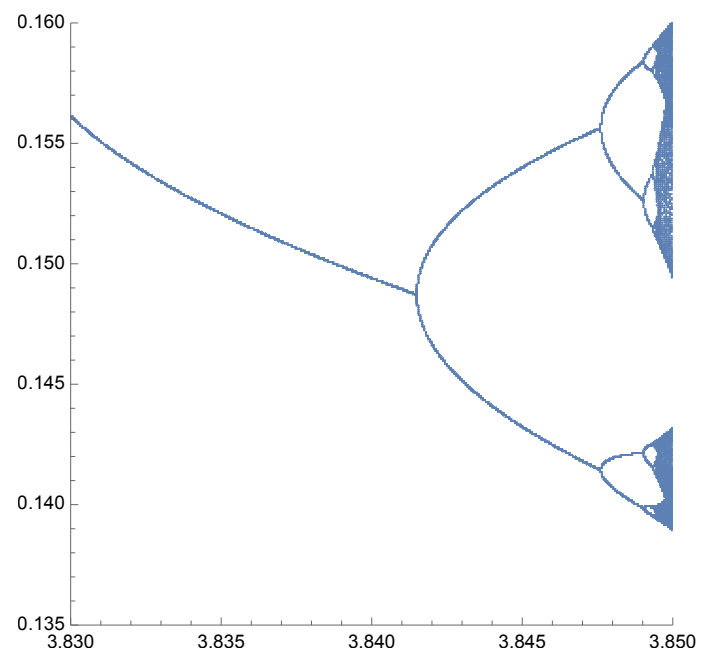
Parametria μ_∞ suuremmilla arvoilla näyttää siltä, että yleensä kriittisen pisteen rata kasaantuu kohti parametrin μ kasvaessa laajenevaa joukkoa, joka lopulta täyttää koko yksikkövälän, kun $\mu = 4$. Kehitys ei kuitenkaan ole yhtenäistä vaan kaaviossa on joidenkin parametrien kohdalla suurehkoja valkoisia osia. Erityisen selkeä ilmiö havaitaan, kun $\mu \approx 3.83$: välillä $\mu \in [3.83, 3.84]$ näyttää kuvien 8.15 ja 8.16 mukaan olevan puoleensavetävä 3-jaksollinen rata.

Propositio 8.7. *Kuvauksella $F_{1+2\sqrt{2}}$ on puoleensavetävä 3-jaksollinen rata.*

Todistus. Katso [SS], [Bec]. Tämä on kurssin harjoitustyö H.1. □



Kuva 8.15: Yksityiskohta logistisen perheen bifurkaatiokaaviosta, kun $\mu \in [3.8, 3.85]$.



Kuva 8.16: Yksityiskohta logistisen perheen bifurkaatiokaaviosta, kun $\mu \in [3.83, 3.85]$.

8.4 Sarkovskin lause

Reaalilukuvälin yksinkertainen topologinen rakenne johtaa joihinkin dynamiikan erityisominaisuuksiin, joita tarkastellaan kurssin harjoitustöissä H.2 ja H.3.

Positiivisten luonnollisten lukujen *Sarkovskin järjestys* \prec määritellään

$$1 \prec 2 \prec 4 \prec \dots \prec 2^k \prec 2^{k+1} \prec \dots \\ \dots \prec 2^3 \cdot 5 \prec 2^3 \cdot 3 \dots \prec 2^2 \cdot 5 \prec 2^2 \cdot 3 \dots \prec 14 \prec 10 \prec 6 \dots \prec 7 \prec 5 \prec 3.$$

Lause 8.8 (Sarkovskin lause). *Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli. Jos kuvauksella $f: I \rightarrow I$ on k -jaksollinen piste, niin sillä on ℓ -jaksollinen piste kaikilla $\ell \prec k$. Erityisesti, jos kuvauksella f on 3-jaksollinen piste, niin sillä on ℓ -jaksollinen piste kaikilla $\ell \in \mathbb{N} - \{0\}$.*

Todistus. Katso [HK, Luku 11.3.2], [Rob, Luku 3.1]. Tämä on yksi kurssin harjoitustöistä. \square

Sarkovskin lauseen nojalla siis reaalilukuvälin dynaamisella systeemillä on p -jaksollinen piste kaikilla $p \in \mathbb{N} - \{0\}$, jos sillä on 3-jaksollinen piste. Erityisesti siis Proposition 8.7 nojalla kuvauksella $F_{1+2\sqrt{2}}$ on p -jaksollinen piste kaikilla $p \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Harjoitustehtäviä

8.1. Osoita, että logistisella kuvauksella F_μ on puoleensavetävä 2-jaksollinen rata, kun $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$. Kuvaile tämän radan vakaata joukkoa. Millaisen joukon muodostavat ne pisteet $x \in [0, 1]$, joille on $N \in \mathbb{N}$ siten, että $F_\mu^N(x) = p_\mu$?

8.2. Todista Lemma 8.3.

8.3. Todista Lemma 8.6.

Luku H

Harjoitustyöt

Kirjoita selkeästi jäsennelty esitys yhdestä tehtävästä esimerkiksi annettujen lähteiden avulla. Autan tarvittaessa lähteiden hankkimisessa ja tulkitsemisessa. Täydennä lähteen esitystä tarvittaessa ja sovita merkinnät jne. vastaamaan kurssilla käytettyjä. Harjoitustyö kirjoitetaan ensisijaisesti L^AT_EXilla. Tarvittavia pohjatiedostoja saa esimerkiksi täältä.

Kurssin suoritus arvostellaan, kun harjoitustyö on palautettu. Palauttamisella ei ole muodollista aikarajaa.

Ryhmätyö on sallittua. Tällaisissa tapauksissa palautetaan ainostaan yksi harjoitustyö, jonka tekemiseen kaikki ryhmän jäsenet ovat osallistuneet aktiivisesti.

Aiheet

H.1. Osoita, että logistisella funktiolla F_μ on puoleensavetävä aidosti 3-jaksollinen rata sopivalla parametrin μ arvolla. Selitä, miten tämä ilmenee bifurkaatiokaaviossa.

Lähteitä: [SS], [Bec]. Nämä artikkelit ovat ladattavissa yliopiston verkossa.

H.2. Todista seuraava versio Sarkovskin lauseesta 8.8: Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ kompakti väli ja olkoon $f: I \rightarrow I$ jatkuva. Jos dynaamisella systeemillä $f: I \rightarrow I$ on piste, jonka jakso on 3, niin systeemillä on piste, jonka jakso on q millä tahansa $q \geq 2$.

Lähteitä: [Dev, Luku 1.10], [HK, Luku 11.3.2], [Rob, Luku 3.1].

H.3. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli ja olkoon $f: I \rightarrow I$ jatkuva. Osoita, että f on kaoottinen, jos se on topologisesti transitiivinen.

Lähteitä: [VB].

Liite A

Metriset avaruudet

Metrisiä avaruuksia käsitellään laajemmin omalla kurssillaan. Tässä valitsemme teoriasta vain tarpeelliset osat. Lisää voi opiskella esimerkiksi lähteistä [Väi] ja [Par].

Olkoon $X \neq \emptyset$. Kuvaus $d: X \times X \rightarrow [0, \infty[$ on *etäisyysfunktio* eli *metriikka* joukossa X , jos sillä n seuraavat ominaisuudet

- $d(x, y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$ (positiivisuus),
- $d(x, y) = d(y, x)$ kaikille $x, y \in X$ (symmetrisyys), ja
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ kaikille $x, y, z \in X$ (kolmioepäyhtälö)

Pari (X, d) on *metrinen avaruus*.

Metriikka on tapa mitata joukon X pisteiden etäisyyksiä, sen määritelmään on valittu ominaisuuksia, jotka euklidisen normin määräämällä avaruuden \mathbb{R}^n euklidisella etäisyydellä (metriikalla)

$$d_E(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

on.

Esimerkki A.1. Metrisiä avaruuksia ovat esimerkiksi seuraavat:

- (1) Euklidinen metrinen avaruus (\mathbb{R}^n, d_E) .
- (2) Olkoon X epätyhjä joukko. *Diskreetti metriikka* δ joukossa X määritellään asettamalla

$$\delta(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{jos } a \neq b \\ 0, & \text{jos } a = b. \end{cases}$$

Pari (X, d) on *diskreetti metrinen avaruus*.

- (3) Kahden metrisen avaruuden (X, d_X) ja (Y, d_Y) tuloavaruudessa $X \times Y$ on erilaisia ”luonnollisia” metriikoita: Jokaiselle $p \geq 1$ määritellään metriikka

$$d_p((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt[p]{d_X(x_1, x_2)^p + d_Y(y_1, y_2)^p}.$$

Lisäksi maksimimetriikka

$$d_{\max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

on myös usein käyttökelpoinen.

Olkoon $X \neq \emptyset$. Funktio $d: X \times X \rightarrow [0, \infty[$ on *ultrametriikka*, jos sillä on metriikalta vaadittavat ominaisuudet (1) ja (2) ja se toteuttaa *ultrametrin epäyhtälön*

$$d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$$

kaikille $x, y, z \in X$. Pari (X, d) on *ultrametrinen avaruus*.

Propositio A.2. *Ultrametriikka on metriikka.* □

Olkoon X metrinen avaruus. Olkoon $x_0 \in X$ ja olkoon $r > 0$. Joukko

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

on *r-säteinen avoin pallo* ja

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

on *r-säteinen suljettu pallo*. Avaruuden X osajoukko on *avoin*, jos se voidaan esittää avoimien pallojen yhdisteenä ja *suljettu*, jos sen komplementti on avoin.

Kuvaus $F: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ on *jatkuva* pisteessä $x_0 \in X_1$, jos ja vain jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on $\delta > 0$ siten, että $d_2(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$ kaikilla $x \in X_1$, joille $d_1(x, x_0) < \delta$.

Kuvaus on jatkuva, jos ja vain jos jokaisen avoimen joukon alkukuva on avoin.

Kuvaus F on *K-Lipschitz -jatkuva* vakiolla $K > 0$, jos kaikille $x, y \in X$ pätee

$$d_2(F(x), F(y)) \leq K d_1(x, y).$$

Cauchyn jonot ja jonojen suppeneminen määritellään kuten euklidisessa avaruudessa. Metrinen avaruus X on *täydellinen*, jos sen kaikki Cauchyn jonot suppenevat.

Kokoelma $(U_j)_{j \in J}$ on joukon B *peite*, jos $B \subset \bigcup_{j \in J} U_j$ ja se on *avoin peite*, jos joukot U_j ovat avoimia. Peite on *äärellinen*, jos indeksijoukko J on äärellinen. Jos $J' \subset J$, niin peite $(U_j)_{j \in J'}$ on peitteen $(U_j)_{j \in J}$ *alipeite*.

Metrisen avaruuden X osajoukko A on *kompakti*, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen alipeite.

Joukko A on *jonokompakti*, jos jokaisella jonolla, jonka alkiot kuuluvat joukkoon A on osajono, joka suppenee kohti jotain joukon A pistettä.

Metrisen avaruuden osajoukko on kompakti, jos ja vain jos se on jonokompakti. Heinen ja Borelin lause, jonka mukaan euklidisen avaruuden osajoukko on kompakti, jos ja vain jos se on suljettu ja rajoitettu, *ei päde* yleisesti.

Esimerkki A.3. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ suljettu väli. Välillä I määriteltyjen jatkuvien kuvausten $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektoriavaruus $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ varustettuna maksiminormilla

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in I} \|f(t)\|$$

on täydellinen metrinen avaruus, kun se varustetaan metriikalla $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$. Tämä seuraa kurssilla Sarjat ja Approksimointi/Analyysi 3 todistettavasta tuloksesta, jonka mukaan tasaisesti suppeneva jono jatkuvia funktioita suppenee kohti jatkuvaa funktioita.

Metrisen avaruus (X, d) on *ultrametrinen* avaruus, jos kolmioepäyhtälöä vahvempi epäyhtälö

$$d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$$

pätee kaikille $x, y, z \in X$. Diskreetti metrisen avaruus

Kuvaus $F: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ on *isometrinen upotus*, jos kaikille $x, y \in X_1$ pätee

$$d_2(F(x), F(y)) = d_1(x, y).$$

Jos isometrinen upotus on bijektio, niin se on *isometria*. Jos $G: (X_2, d_2) \rightarrow (X_3, d_3)$ on isometrinen upotus, niin $G \circ F$ on isometrinen upotus.

Esimerkki A.4. (1) Olkoon $b \in \mathbb{R}^n$. Kuvaus $x \mapsto x + b$ on euklidisen avaruuden (\mathbb{R}^n, d_E) isometria.

(2) Ortogonaalinen $n \times n$ -matriisi A määrää isometrian $x \mapsto Ax$ euklidisessä avaruudessa (\mathbb{R}^n, d_E) ja pallon pinnalla (\mathbb{S}^{n-1}, d_E) .

Metrisen avaruus X on *separoituva*, jos sillä on numeroituva tiheä osajoukko.

Esimerkiksi $\mathbb{R}^n = \overline{\mathbb{Q}^n}$, $\mathbb{S}^1 = \overline{\{[q] : q \in \mathbb{Q}\}}$, joten nämä metriset avaruudet ovat separoituvia. Kaikki kompaktit metriset avaruudet ovat separoituvia. Toisaalta, jos Y on ylinumeroituva joukko varustettuna *diskreetillä metriikalla* $d(a, b) = 1$ kaikilla $a \neq b$, niin Y ei ole separoituva.

Harjoitustehtäviä

A.1. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Osoita, että lauseke

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

on metriikka joukossa $X \times Y$.

A.2. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Osoita, että lauseke

$$d_{\max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

on metriikka joukossa $X \times Y$.

A.3. Olkoon X ultrametrinen avaruus. Osoita, että kaikille $y \in B(x, r) \subset X$ pätee $B(y, r) = B(x, r)$.

- A.4.** Osoita, kaikki ultrametrisen avaruuden avaruuden pallot ovat avoimia ja suljettuja
- A.5.** Osoita, että Heinen ja Borelin lauseen väite ei päde äärettömässä diskreetissä metrisessä avaruudessa.
- A.6.** Osoita, että Heinen ja Borelin lauseen väite ei ole voimassa metrisessä avaruudessa $(\mathbb{R}^n - \{0\}, d_E)$.
- A.7.** Osoita, että kompaktit metriset avaruudet ovat separoituvia.

Kirjallisuutta

- [Bec] J. Bechhoefer. The Birth of Period 3, Revisited. *Math. Mag.*, 69(2):115–118, 1996 <http://www.jstor.org/stable/2690665?origin=pubexport>.
- [Ben] F. Benford. The law of anomalous numbers. *Proc. Amer. Phil. Soc.*, 78:551–572, 1938.
- [Con] J. H. Conway. On unsharable arithmetical problems. *Amer. Math. Monthly*, 120(3):192–198, 2013.
- [Dev] R. L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Studies in Nonlinearity. Westview Press, Boulder, CO, 2003. Reprint of the second (1989) edition.
- [HK] B. Hasselblatt and A. Katok. *A first course in dynamics*. Cambridge University Press, New York, 2003.
- [HSD] M. W. Hirsch, S. Smale, and R. L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, volume 60 of *Pure and Applied Mathematics*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2004.
- [HY] J. G. Hocking and G. S. Young. *Topology*. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1961.
- [LGA] J. Leys, É. Ghys, and A. Alvarez. Chaos. A mathematical adventure. <http://www.chaos-math.org/en>.
- [Par] J. Parkkonen. Metriset avaruudet ja topologia. <http://users.jyu.fi/~parkkone/MetTop2018/Topo2018.pdf>, 2018.
- [Rob] C. Robinson. *Dynamical systems*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995. Stability, symbolic dynamics, and chaos.
- [SS] P. Saha and S. H. Strogatz. The Birth of Period 3. *Mathematics Magazine*, 68:42–47, 1995 <https://www.maa.org/sites/default/files/269137619927.pdf>.
- [Väi] J. Väisälä. *Topologia I*. Limes ry, 2007.
- [VB] M. Vellekoop and R. Berglund. On intervals, transitivity = chaos. *Amer. Math. Monthly*, 101(4):353–355, 1994.