Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi 1 2022

Harjoitus 6: ratkaisuja

1. Osoita, että Hamiltonin systeemin kokonaisenergian rataderivaatta on 0. Osoita, että Hamiltonin systeemin ratkaisukäyrät sisältyvät kokonaisenergian tasa-arvojoukkoihin.

Ratkaisu. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkoon $H\colon \Omega \to \mathbb{R}$ Hamiltonin funktio. Hamiltonin systeemin vektorikenttä on $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, $f(x,y) = (\frac{\partial H(x,y)}{\partial y}, -\frac{\partial H(x,y)}{\partial x})$ ja $\nabla H(x,y) = (\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial H(x,y)}{\partial y})$. Siis

$$\dot{H}(x,y) = (\nabla H(x,y) \mid f(x,y) = \Big(\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} \Big| \frac{\partial H(x,y)}{\partial y}\Big) + \Big(\frac{\partial H(x,y)}{\partial y} \Big| -\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}\Big) = 0\,.$$

Toinen väite seuraa Propositiosta 7.4.

2. Todista Propositio 7.11.

Ratkaisu. Linearisoinnin kerroinmatriisi on

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}\,.$$

Sen ominaisarvot ovat karakterisen polynomin

$$\lambda^2 + \frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 (H(x,y)}{\partial x \partial y})^2 = \lambda^2 - \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x \partial y} & -\frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \lambda^2 - \det A.$$

juuret $\pm\sqrt{\det A}$, jotka ovat positiivinen ja negatiivinen reaaliluku $\pm\sqrt{\det A}$, jos $\det A > 0$ ja puhtaasti imaginaariset kompleksiluvut $\pm i\sqrt{-\det A}$, jos $\det A < 0$. Siis linearisointi on satula tai keskus.

Tasapainopiste b on Hamiltonin funktion H gradientin nollakohta. Differentiaalilaskennasta muistamme, että b on lokaali maksimi tai minimi, jos $\det A > 0$ ja satulapiste, jos $\det A < 0$.

3. Olkoon $V\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $V(t) = (t^2-1)^2$. Tarkastele tason differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -V'(x_1) - \mu x_2 \end{pmatrix}$$

tasapainopisteitä parametrin $\mu \geqslant 0$ eri arvoilla.

Ratkaisu. Huomataan, että $V'(t) = 2t(t^2-1)$, joten tehtävän vektorikenttä on

$$f_\mu(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -4x_1(x_1^2-1) - \mu x_2 \end{pmatrix}\,.$$

Vektorikentän f_μ ensimmäisen komponentin mukaan tasapainopisteessä $x_2 = 0$. Toisen komponentin mukaan pätee siis $x_1 \in \{-1, 0, 1\}$. Vektorikentän differentiaalin matriisi pisteessä x on

$$Df_\mu(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -12x_1^2 + 4 & -\mu \end{pmatrix}\,.$$

Siis

$$Df_\mu(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -\mu \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad Df_\mu((\pm 1, 0)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -\mu \end{pmatrix}.$$

Matriisin $Df_\mu(0)$ ominaisarvot ovat $\frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2+16}}{2}$, joten linearisointi origossa on satula ja origo on epälineaarisena satulapisteenä epävakaa Lauseen 6.6 nojalla. Matriisin $Df_\mu((\pm 1, 0))$ ominaisarvot ovat $\frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2-32}}{2}$, joten linearisoinnit pisteissä $(\pm 1, 0)$ ovat molemmat

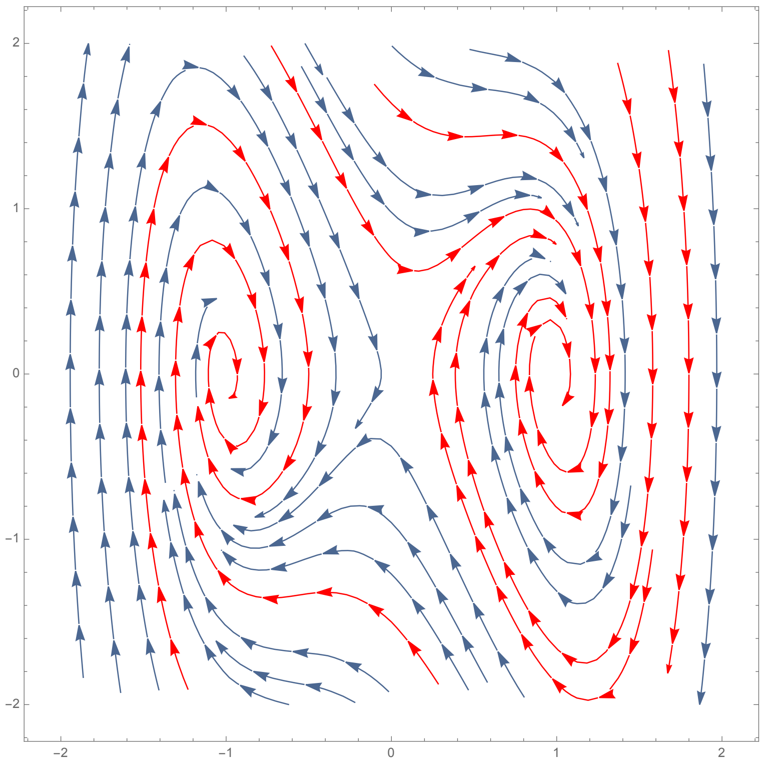
(1) keskuksia, jos $\mu = 0$,

(2) spiraalinieluja, jos $0 < \mu < 4\sqrt{2}$,

(3) surkastuneita nieluja, jos $\mu = 4\sqrt{2}$, sillä ominaisarvoa $4\sqrt{2}$ vastaava ominaisavaruus on yhtälön $x_2 = -2\sqrt{2}x_1$ määräämä suora.

(4) nieluja, jos $\mu > 4\sqrt{2}$.

Tapaukset (2)-(4), joissa $\mu > 0$, ovat hyperbolisia, joten kaikissa niissä origo on asymptoottisesti vakaa Lauseen 6.3 nojalla.



Kuva 1: Tehtävän 3 ratkaisuja, kun $\mu = 1$.

Kun $\mu = 0$, huomaamme, että tarkasteltava systeemi on Hamiltonin systeemi funktiolle

$$H(x) = V(x_1) + \frac{1}{2}x_2^2 = (x_1^2 - 1)^2 + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Matriisi $Df_0((\pm 1, 0))$ on kääntyvä, koska sen determinantti on tasapainopisteet $(\pm 1, 0)$ ovat vakaita Proposition 7.12 nojalla.

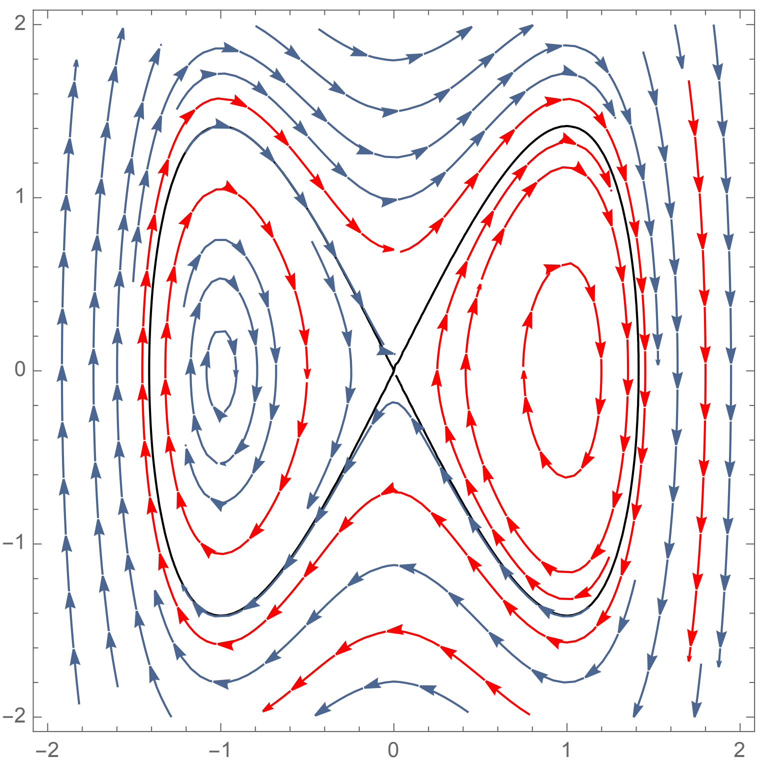
Koska $H(0) = 1$, origon vakaa ja epävakaa käyrä sisältyvät tasa-arvojoukkoon

$$H^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1^2 - 1)^2 + \frac{1}{2}x_2^2 = 1\},$$

jonka yhtälö napakoordinaateissa on

$$r^2(\theta) = \frac{3\cos^2\theta - 1}{2\cos^4\theta}\,.$$

Yhtälöä tarkasttelemalla huomaa, että se määrää kahdeksikon, jonka silmukat ovat sektoreissa $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ ja $\frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{4}$.



Kuva 2: Tehtävän 3 ratkaisuja ja origon vakaa ja epävakaa monisto, kun $\mu = 0$.

4. Osoita, että differentiaaliyhtälö

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + x^2 \end{cases}$$

on Hamiltonin systeemi. Määritä kriittisten pisteiden vakaus. Määritä hyperbolisten kriittisten pisteiden globaalit vakaat ja epävakaat käyrät.

Ratkaisu. Ehto $\partial_y H(x,y) = y$ toteutuu, jos $H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + h(x)$. Ehto $-\partial_x H(x,y) = h'(x) = x + x^3$ toteutuu, jos $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$. Siis tarkasteltava differentiaaliyhtälö on Hamiltonin systeemi Hamiltonin funktiolla $H(x,y) = \frac{1}{2}(y^2 - x^2) - \frac{1}{3}x^3$.

Vektorikentän kriittiset pisteet ovat $(-1,0)$, $(0,0)$ ja $(1,0)$. Linearisointeja varten lasketaan

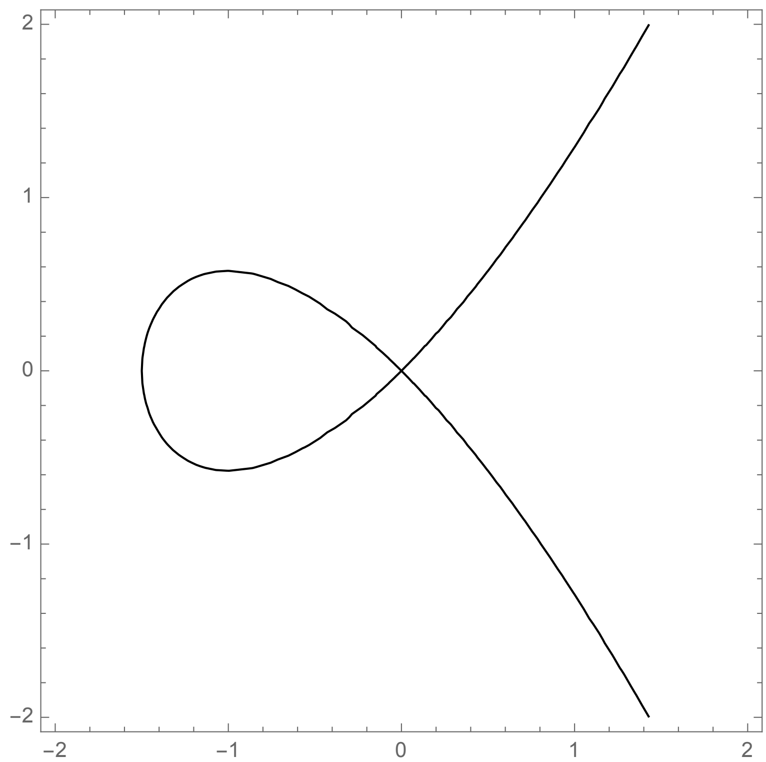
$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1+2x & 0 \end{pmatrix}$$

Siis linearisoinnin kerroinmatriisi pisteessä $(0,0)$ on $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, jonka ominaisarvot ovat ± 1. Siis $(0,0)$ on satulapiste. Linearisoinnin kerroinmatriisi pisteissä $(\pm 1, 0)$ on $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, jonka ominaisarvot ovat $\pm i$. Siis linearisoinnit pisteissä $(\pm 1, 0)$ ovat keskuksia. Nämä pisteet ovat Proposition 7.11

Satulapisteen vakaat ja epävakaat käyrät sisältyvät tasa-arvojoukkoon $H(x,y) = H(0,0) = 0$. Yhtälö $H(x,y) = 0$ saadaan napakoordinaateissa muotoon $r = 0$ tai

$$\frac{2}{3}r = \frac{1 - 2\cos^2\phi}{\cos^3\phi} = g(\phi)\,.$$

On helppo tarkastaa, että $g(\phi) > 0$, jos ja vain jos $\frac{\pi}{4} < \phi < \frac{\pi}{2}$ tai $\frac{3\pi}{4} < \phi < \frac{5\pi}{4}$ tai $\frac{3\pi}{2} < \phi < \frac{7\pi}{4}$ modulo 2π. Lisäksi g on monotoninen kaikillä näillä väleillä, $g(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$ ja $\lim_{\phi\to\frac{\pi}{2}-} = \lim_{\phi\to\frac{3\pi}{2}+} = \infty$. Käyrä $H(x,y) = 0$ on symmetrinen x-akselin suhteen ja $H(-\frac{3}{2}, 0) = 0$. Näiden tietojen avulla voi päätellä, että tasa-arvokäyrä on polkuyhtenäinen.



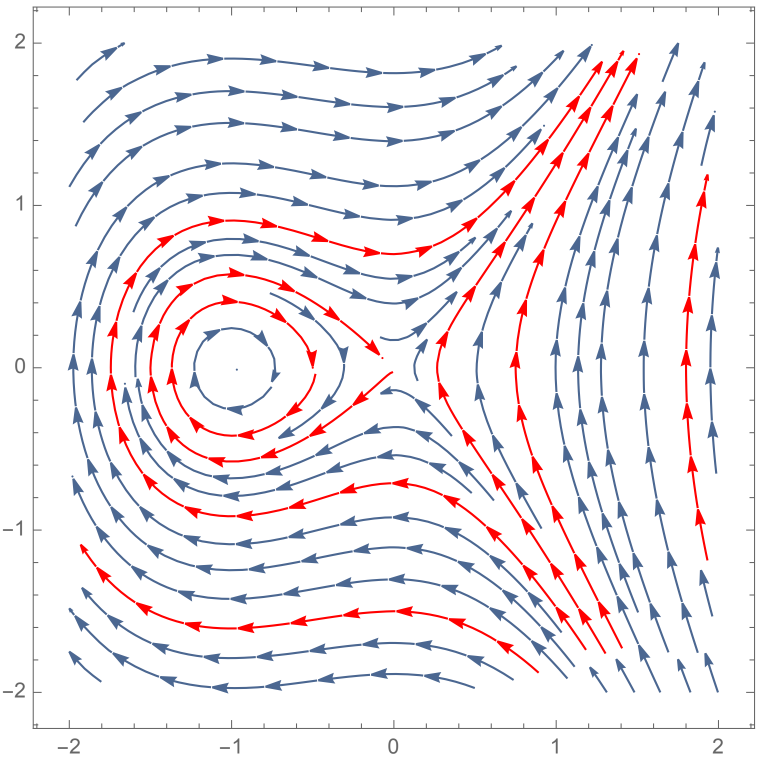
Kuva 3: Vakaa ja epävakaa monisto sisältyvät tähän käyrään.

Linearisointeja tarkastelemalla huomaamme, että ratkaisut kiertävät tasa-arvokäyrään sisältyvää silmukkaa myötäpäivään, joten silmukka sisältyy origon vakaaseen ja epävakaaseen käyrään. Tämän näkee helposti myös huomaamalla, että vektorikentän arvo pisteessä $(-\frac{3}{2}, 0)$ on $(0, \frac{3}{4})$, joka osoittaa ylempään puolitasoon päin. Erityisesti silmukka on homokliininen rata, Epävakaaseen käyrään sisältyy myös oikealle ylös menevä haara ja oikealle alas menevä haara on vakaan käyrän osa.

5. Olkoon $0 < r < 1$. Osoita, että 0 on Lorenzin differentiaaliyhtälön ainoa tasapainopiste. Osoita, että funktio $V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$V(x) = x_1^2 + \sigma(x_2^2 + x_3^2)$$

on Liapunovin funktio origossa.



Kuva 4: Tehtävän 4 yhtälön ratkaisukäyriä.

Ratkaisu. Tasapainopisteessä $x_2 = x_1$, joten $x_1(r-1-x_3) = 0$ ja $bx_3 = x_1^2$. Viimeisen yhtälön mukaan $x_3 \geqslant 0$, joten keskimmäisessä yhtälössä ei voi olla $r-1 = x_3$, koska oletimme $r < 1$. Siis keskimmäisen yhtälön nojalla $x_1 = 0$, joten ensimmäsien ja rtoisen yhtälön nojalla $x_2 = 0$ ja $x_3 = 0$, joten origo on ainoa tasapainopiste. Selvästi $V(0) = 0$ ja $V(x) > 0$, jos $x \neq 0$. Lisäksi neliöksi täydentämällä saamme rataderivaatan muotoon

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= 2((x_1, \sigma x_2, \sigma x_3) \mid (\sigma(x_2 - x_1), rx_1 - x_2 - x_1x_3, x_1x_2 - bx_3) \\
&= 2\sigma(x_1x_2 - x_1^2 + rx_1x_2 - x_2^2 - x_1x_2x_3 + x_1x_2x_3 - x_3^2) \\
&= -2\sigma\Big(\big(1 - (\frac{1+r}{2})^2\big)x_1^2 + \big(\frac{1+r}{2}x_1 - x_2\big)^2 + bx_3^2\Big)
\end{aligned}
$$

josta näkee, että $\dot{V}(x) < 0$ kaikille $x \neq 0$, sillä oletuksesta seuraa $1 - \frac{1+r}{2} > 0$.