Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi 1 2022

Harjoitus 2: ratkaisuja

1. Todista Lemma 2.13.

Ratkaisu. Tulon derivointisäännön nojalla

$$\frac{d}{dt}F_i(t) = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}g_k(t) = \sum_{k=1}^{n} \dot{a}_{ik}g_k(t) + a_{ik}\dot{g}_k(t) = (A(t)\dot{G}(t))_i + (\dot{A}(t)G(t))_i$$

ja

$$\frac{d}{dt}C_{ij}(t) = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}(t) = \sum_{k=1}^{n} \dot{a}_{ik}b_{kj}(t) + a_{ik}\dot{b}_{kj}(t) = (A(t)\dot{B}(t))_{ij} + (\dot{A}(t)B(t))_{ij}\,.$$

2. Todista Propositio 2.14.

Ratkaisu. Olkoon $F\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $F(t) = \exp(tA)\exp(-tA)$. Lemman 2.13 ja Proposition 2.12 nojalla

$$\begin{aligned}\dot{F}(t) &= \frac{d}{dt}\exp(tA)\ \exp(-tA) + \exp tA\,\frac{d}{dt}\exp(-tA)\\ &= A\exp tA\exp(-tA) + \exp tA\,(-A\exp(-ta)) = 0.\end{aligned}$$

Siis F on vakio, joten $\exp A\ \exp(-A) = F(1) = F(0) = I_n$. Tästä seuraa, että $\exp A$ on kääntyvä, koska neliömatriiseille riittää tarkastaa kääntyvyys toiselta puolelta.

3. Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$. Laske $\exp tA$, kun

(a) $A = \begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$

Ratkaisu. Matriisi λI_n kommutoi kaikkien $n \times n$- matriisien kanssa. Siis Esimerkin 2.9, Harjoitustehtävän 2.6 ja Lemman 2.16 nojalla saadaan

$$\exp\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} = \exp(\lambda t I_2)\exp\begin{pmatrix}0 & t\\ 0 & 0\end{pmatrix} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{\lambda t} & te^{\lambda t}\\ 0 & e^{\lambda t}\end{pmatrix}$$

ja

$$\exp t\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix}1 & t & \frac{t^2}{2}\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

4. Osoita, että kuvaus $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$x(t) = e^{\lambda t}\begin{pmatrix}a + tb\\ b\end{pmatrix}$$

on differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} x$$

ratkaisu alkuarvolla $x(0) = (a, b)$.

(1) Miten ratkaisu käyttäytyy, kun λ on positiivinen tai negatiivinen?

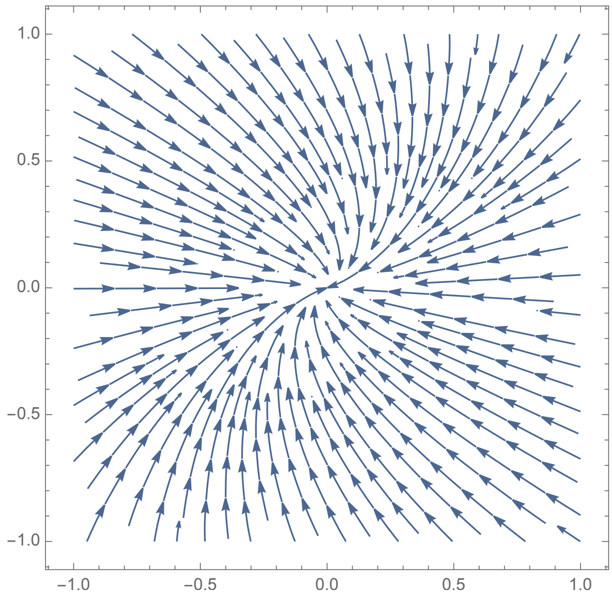
(2) Hahmottele ratkaisukäyriä muutamilla alkuarvon (a, b) eri arvoilla, kun $\lambda = -2$.

(3) Siinä tapauksessa, että $x(t) \to 0$, kun $t \to \infty$, osoita, että polun x tangenttivektori lähestyy vaakasuoraa suuntaa.

Ratkaisu. (1) OY-lauseen ja Tehtävän 2.7 nojalla ratkaisu on

$$\exp(t \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a + bt \\ b \end{pmatrix}.$$

(2)



(3) Oletetaan, että $\lambda < 0$. Jos lisäksi $b = 0$, niin $x(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ ja derivaattavektori on aina vaakasuora. Jos $b \neq 0$, niin

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a + bt \\ b \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \lambda(a + bt) + b \\ b \end{pmatrix}.$$

Siis komponenttien suhteelle pätee

$$\frac{e^{\lambda t}\big(\lambda(a + bt) + b\big)}{e^{\lambda t} b} = \lambda \frac{a}{b} + 1 + \lambda t \to -\infty$$

kun $t \to \infty$, joten tangentti lähestyy vaakasuoraa.

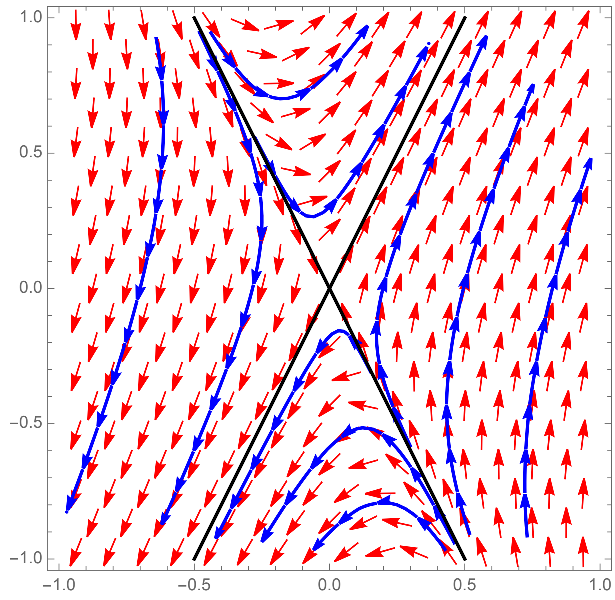
Tehtävät 5– 6: Miten differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Ax$. ratkaisut käyttäytyvät? Havainnollista kuvalla.

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Ratkaisu. Matriisin A ominaisarvot ovat karakteristisen polynomin

$$(1 - \lambda)(1 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

juuret $\lambda = 3$ ja $\lambda = -1$. Origo on satula, koska matriisilla A on positiivinen ja negatiivinen ominaisarvo.



6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ratkaisu. Matriisin A ominaisarvot ovat karakteristisen polynomin

$$(2-\lambda)(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

juuret $\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ja $\lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Origo on lähde, koska matriisilla A kaksi positiivista ominaisarvoa.