Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi 1 2022

Harjoitus 1: ratkaisuja

1. Ratkaise logistinen differentiaaliyhtälö parametrilla $K = 1$ ja tarkastele sen ratkaisujen käyttäytymistä eri alkuarvoilla, kun $t \to \infty$.

Ratkaisu. Logistinen differentiaaliyhtälö

$$\dot{x} = ax(1-x)$$

on separoituva. Pisteet 0 ja 1 ovat tasapainopisteitä, joten alkuarvoilla 0 ja 1 saadaan vakioratkaisut Lemman 1.6(1) nojalla. Olkoon $x_0 \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$. Tällöin olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen nojalla $x(t) \neq 0, 1$ kaikilla t, koska logistisen differentiaaliyhtälön vektorikenttä on sileä.

Käyttämällä osamurtokehitelmää $\frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$ saadaan alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = ax(1-x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ratkaisulle

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x(1-x)} = \frac{1}{a}\Big(\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x} + \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{1-x}\Big) \\ &= \frac{1}{a}\Big(\log\Big|\frac{x}{x_0}\Big| - \log\Big|\frac{1-x}{1-x_0}\Big|\Big) \\ &= \frac{1}{a}\Big(\log\Big(\frac{x}{x_0}\Big) - \log\Big(\frac{1-x}{1-x_0}\Big)\Big) = \frac{1}{a}\log\left(\frac{x(1-x_0)}{x_0(1-x)}\right). \end{aligned}$$

Itseisarvot voi poistaa, koska edellä totesimme, että $x(t)$ ja x_0 ovat samassa joukon $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ komponentissa. Tästä voimme ratkaista funktion x lausekkeen

$$x(t) = \frac{e^{a(t-t_0)}}{e^{a(t-t_0)} + 1 - x_0} = \frac{1}{1 + e^{-a(t-t_0)}(1 - x_0)}.$$

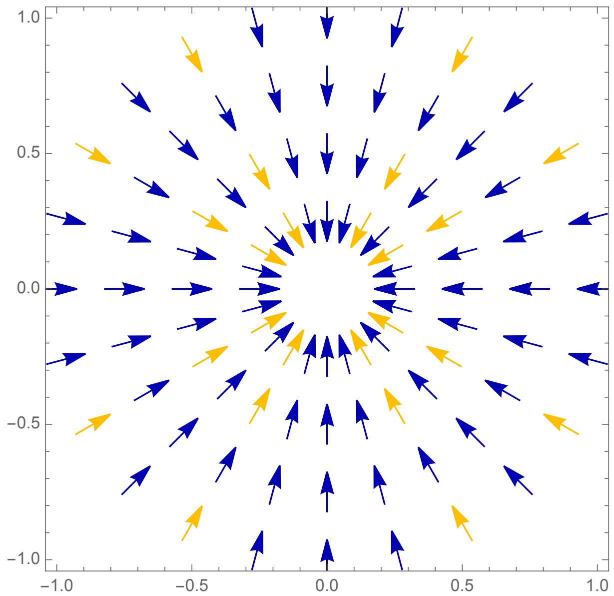
Viimeisestä lausekkeesta näkee helposti, että $x(t) \to 1$, kun $t \to \infty$ alkuarvosta x_0 riippumatta.

Tehtävissä 2 ja 3 tarkastellaan vektorikenttää $N\colon \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}^2$, $N(x) = -\frac{x}{\|x\|}$.

2. (1) Hahmottele kuva vektorikentästä N.

(2) Voiko vektorikentän N jatkaa tasossa $\mathbb{R}^2$ määritellyksi jatkuvaksi vektorikentäksi?

Ratkaisu. Pisteessä x on origoa kohti osoittava yksikkövektori.



Vektorikenttää ei voi laajentaa origoon jatkuvasti, sillä $\lim_{t\to 0} N(t\mathbf{e}) = \mathbf{e}$ kaikilla yksikkövektoreilla $\mathbf{e}$.

3. (1) Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $x_0 \neq 0$. Osoita, että lauseke

$$x(t) = x_0 - t\frac{x_0}{\|x_0\|}$$

antaa alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = N(x), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

ratkaisun.

(2) Piirrä kuva muutaman ratkaisun radoista alkuarvon x_0 eri arvoilla.

(3) Mikä on alkuarvotehtävän (1) ratkaisun maksimaalinen määrittelyväli?

Ratkaisu. Jos $t < \|x_0\|$, niin $x(t) \neq 0$, mutta $x(\|x_0\|) = x_0 - x_0 = 0$, joten arvo ei ole tarkasteltavassa alueessa. Jos osoitamme, että x on ratkaisu, niin sen maksimaalinen määrittelyväli on siis $]-\infty, x_0[$.

(1) $x(0) = x_0 - 0\frac{x_0}{\|x_0\|} = x_0$, joten alkuarvo toteutuu. Taylorin lauseen (Vektoricalculus/Vektorifunktioiden analyysi) nojalla näemme, että $\dot{x}(t) = \frac{x_0}{\|x_0\|}$. Derivaatan voi myös laskea komponenteittain: Jos $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$, niin $x(t) = (x_{01} - \frac{x_{01}}{\|x_0\|}t, \dots, x_{0n} - \frac{x_{0n}}{\|x_0\|}t)$, jonka derivoiminen antaa tuloksen:

$$\frac{d}{dt}(x_{01} - \frac{x_{01}}{\|x_0\|}t, \dots, x_{0n} - \frac{x_{0n}}{\|x_0\|}t) = -(\frac{x_{01}}{\|x_0\|}t, \frac{x_{0n}}{\|x_0\|}t) = -\frac{x_0}{\|x(0)\|} = N(x_0)\,.$$

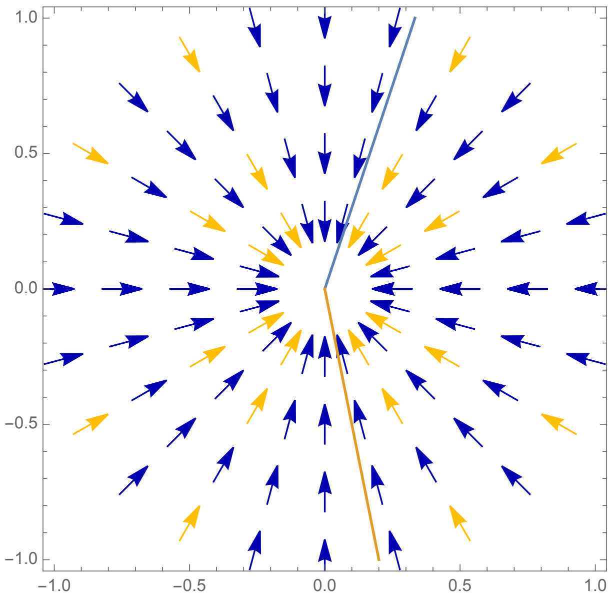
Lisäksi huomaamme, että $x_0 - t\frac{x_0}{\|x_0\|} = x_0(1 - \frac{t}{\|x_0\|})$ ja $(1 - \frac{t}{\|x_0\|}) > 0$, kun $t < \|x_0\|$. Siis $\|x_0(1 - \frac{t}{\|x_0\|})\| = \|x_0\|(1 - \frac{t}{\|x_0\|})$, joten

$$N(x(t)) = -\frac{x_0 - t\frac{x_0}{\|x_0\|}}{\|x_0 - t\frac{x_0}{\|x_0\|}\|} = \frac{x_0}{\|x_0\|}\,,$$

joten $\dot{x}(t) = -N(x(t))$ kaikille $t < \|x_0\|$ ja x on siis ratkaisu.

(2) Radat ovat avoimia säteitä

$$\{x(t) : t < \|x_0\|\} = \{t\,x_0 : t > 0\}\,.$$



(3) Koska x on ratkaisu välillä $]-\infty, x_0[$, niin tämä väli on maksimaalinen määrittelyväli kuten edellä todetttiin.

4. Laske $\exp A$, kun (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ratkaisu. (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, joten

$$e^A = I_2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ja

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

joten

$$e^A = I_3 + A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Olkoot $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Määritä $\exp A$, $\exp B$ ja $\exp(A + B)$.

Ratkaisu. $A^0 = I_2$ kuten aina. Lisäksi

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

joten $A^k = A$ kaikilla $k \geqslant 1$. Siis

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vastaavasti $B^k = B$ kaikilla $k \geqslant 1$, joten

$$\exp(B) = \begin{pmatrix} e & 1-e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lisäksi $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, joten $(A+B)^k = A + B$ kaikilla $k \geqslant 1$ ja siten

$$\exp(A+B) = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Huomaa, että

$$\exp A \exp B = \begin{pmatrix} e^2 & -(e-1)^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} e^2 & (e-1)^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp B \exp A\,,$$

joten Lemman 2.16 laskusääntö ei päde, jos tarkasteltavia matriiseja ei rajoiteta.

6. Olkoot $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ ja $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.
(a) Osoita, että $C^{-1}AC$ on diagonaalimatriisi.
(b) Määritä $\exp A$.

Ratkaisu. (a) Suoraviivaiset laskut osoittavat, että

$$\begin{aligned} C^{-1}AC &= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Lemman 2.11 nojalla

$$\exp A = C\exp(C^{-1}AC)C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^3+e^{-1}}{2} & \frac{e^3-e^{-1}}{4} \\ e^3 - e^{-1} & \frac{e^3+e^{-1}}{2} \end{pmatrix}.$$