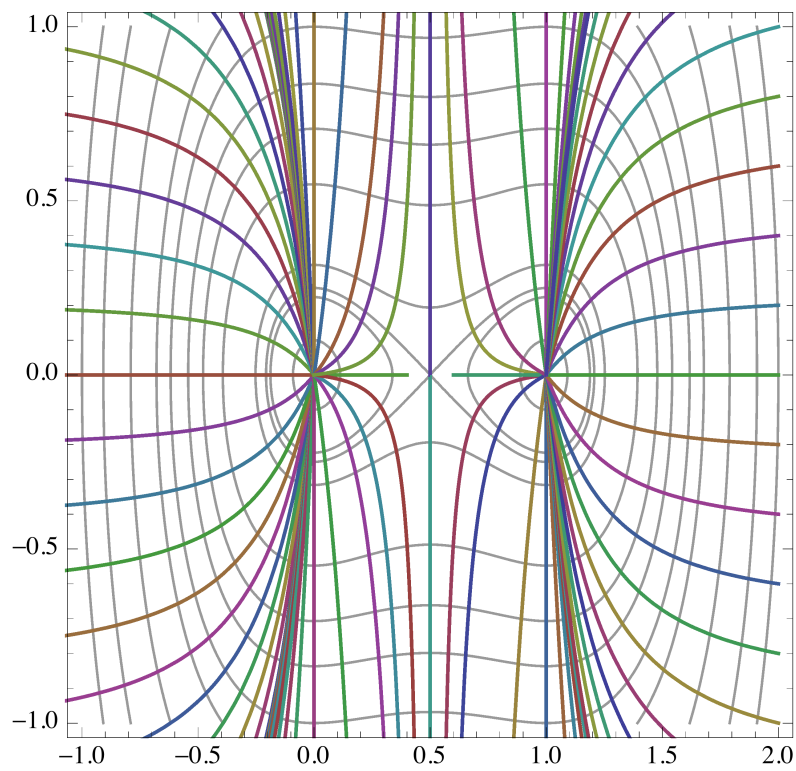

Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi



JOUNI PARKKONEN

LUENTOJA JYVÄSKYLÄN YLIOPISTOSSA

SYKSYLLÄ 2022

Sisällys

1	Differentiaaliyhtälöt	1
1.1	Ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälöt	1
1.2	Korkeamman asteen yhtälöistä	3
1.3	Vektorikentät ja autonomiset yhtälöt	4
1.4	Ratkaisujen olemassaolosta	6
1.5	Maksimaalinen määrittelyväli ja rata	8
	Harjoitustehtäviä	9
2	Lineaariset autonomiset yhtälöt ja matriisien eksponenttifunktio	11
2.1	Lineaariset autonomiset differentiaaliyhtälöt	11
2.2	Matriisien normiavaruus	12
2.3	Matriisien eksponenttifunktio	14
2.4	Lineaarisen autonomisen yhtälön ratkaisut	16
2.5	Ratkaisujen vektoriavaruus	18
2.6	Muuttujanvaihtolemma	19
	Harjoitustehtäviä	20
3	Tason lineaariset autonomiset alkuarvotehtävät	23
3.1	2×2 -matriisien luokittelu	23
3.2	Esimerkki muuttujanvaihtolemmän käytöstä	25
3.3	Tason lineaaristen autonomisten differentiaaliyhtälöiden tyypit	27
3.4	Parametrisoituja perheitä	30
	Harjoitustehtäviä	32
4	Lineaariset autonomiset alkuarvotehtävät korkeammassa ulottuvuudessa	35
4.1	Yleistetty ominaisavaruus	35
4.2	Blokkidiagonaalimatriisit	38
4.3	Reaalinen Jordanin kanoninen muoto	39
	Harjoitustehtäviä	43
5	Epälineaariset differentiaaliyhtälöt	45
5.1	Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause	45

5.2	Jatkuva riippuvuus alkuarvosta	47
5.3	Maksimaalinen määrittelyväli	49
5.4	Vakion variointi	51
	Harjoitustehtäviä	54
6	Linearisointi ja vakaus	55
6.1	Tasapainopisteen vakaus	55
6.2	Mukautettu normi	56
6.3	Linearisointi	57
6.4	Hyperbolisen tasapainopisteen vakaudesta	59
6.5	FitzHughin ja Nagumon yhtälö.	63
	Harjoitustehtäviä	65
7	Liapunovin menetelmä	69
7.1	Tason yhtälön ratkaisukäyrien etsiminen separoimalla	69
7.2	Liapunovin funktio	71
7.3	Hamiltonin systeemit	74
7.4	Aito Liapunovin funktio	77
	Harjoitustehtäviä	79
A	Lineaarialgebraa	81
A.1	Ominaisarvot ja ominaisvektorit	81
A.2	Konjugointi ja diagonalisoituvuus	82
A.3	Kompleksista lineaarialgebraa	83
	Harjoitustehtäviä	84
B	Napakoordinaatit	85
C	Metriset avaruudet	87
C.1	Metriikka	87
C.2	Täydellinen metrinen avaruus	88
	Harjoitustehtäviä	89
	Kirjallisuutta	91

Tästä tekstistä

Tämä teksti sisältää syksyn 2022 kurssin Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi 1 materiaalin.

Kurssin alussa tutustutaan differentiaaliyhtälöryhmien teoriaan erityisesti lineaaristen systeemien kautta. Puolivälissä käsitellään epälineaaristen yhtälöryhmien ratkaisujen olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause ja aloitellaan epälineaaristen yhtälöiden ratkaisujen tarkastelua. Lopuksi tutustumme linearisointiin ja Liapunovin menetelmän käyttöön differentiaaliyhtälöiden kvalitatiivisessa tarkastelussa.

Kurssilla käsitellään pääasiassa autonomisia yhtälöryhmiä. Ensimmäisessä luvussa osoitammekin, että kaikki differentiaaliyhtälöryhmät voidaan muuntaa yhtäpitäviksi autonomisiksi ryhmiksi.

Olen pyrkinyt havainnollistamaan käsiteltävää teoriaa runsailla esimerkeillä ja kuvituksella. Differentiaaliyhtälöitä käytetään esimerkiksi fysikaalisten ja biologisten ilmiöiden mallintamisessa. Käsittelemme joitain näiden sovellusalojen differentiaaliyhtälöitä esimerkkeinä matemaattisesti mielenkiintoisista ilmiöistä. Itse mallintaminen jätetään muille kursseille.

Kurssilla edellytetään differentiaali- ja integraalilaskennan ja lineaarialgebran osaamista tasolla, joka saavutetaan näiden alojen peruskursseilla. On myös hyvä osata tavallisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmiä yksiulotteisessa tapauksessa.

Tekstin lopussa olevassa lähdeluettelossa on monia kurssin materiaalia tukevia ja laajentavia lähteitä. Erityisesti näistä nousevat esille [Har], [HSD], [Per] ja [Tes].

Merkintöjä ja sopimuksia

Merkintä $\dot{x}(t) = x'(t)$ tarkoittaa vektoriarvoisen differentioituvan kuvauksen $x: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Delta \subset \mathbb{R}$, derivaattaa.

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ luonnolliset luvut.
- $\#(A) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ joukon A alkioiden lukumäärä.
- $A - B = \{a \in A : a \notin B\}$ joukkojen A ja B erotus.
- $f|_A$ kuvauksen $f: X \rightarrow Y$ rajoittuma osajoukkoon $A \subset X$, $f|_A(a) = f(a)$ kaikilla $a \in A$.
- $C^0(X, Y)$ jatkuvien kuvausten $f: X \rightarrow Y$ avaruus.
- $f(t) = o(g(t))$, kun $t \rightarrow t_0$, jos ja vain jos $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$.
- $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \{u : \exists \alpha \in A, \text{ jolle } u \in U_\alpha\}$.
- $\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha = \{u : u \in U_\alpha \text{ kaikilla } \alpha \in A\}$.
- $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ on reaalisten $n \times n$ -matriisien vektoriavaruus.
- $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.
- $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_n$.

Uusien käsitteiden *määritelmät* on laatikoitu näin. Niitä ei ole numeroitu.

Tällaisessa laatikossa tehdään jokin tärkeä sopimus, nimetään jokin käsite siten, että kyseessä ei ole varsinainen matemaattinen määritelmä, tai tehdään muu huomio, jota halutaan korostaa.

Luku 1

Differentiaaliyhtälöt

Tässä luvussa tutustumme muutamiin esimerkkeihin erilaisista differentiaaliyhtälöistä ja niiden sovelluksista. Tutustumme terminologiaan ja autonomisten yhtälöiden geometriseen tulkintaan ja aloitamme myös hieman teoreettista tarkastelua.

1.1 Ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälöt

Olkoon $\Delta \subset \mathbb{R}$ avoin joukko. Tällä kurssilla merkintä $\dot{x}(t) = x'(t)$ tarkoittaa vektoriarvoisen differentioituvan kuvauksen $x: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Delta \subset \mathbb{R}$, derivaattaa.

Olkoot $U \subset \mathbb{R}^n$ ja $I \subset \mathbb{R}$ avoimia joukkoja ja olkoon $f: U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ (jatkuva) kuvaus. *Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö^a* on yhtälö

$$\dot{x}(t) = f(x, t). \quad (1.1)$$

Siihen liittyvä *alkuarvotehtävä* on

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

joillain $x_0 \in U$ ja $t_0 \in I$.

^atai differentiaaliyhtälöryhmä

Jos funktio $f: U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ kirjoitetaan komponenttifunktioiden avulla muodossa

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)),$$

niin differentiaaliyhtälöryhmä (1.1) kirjoitettuna komponenteittain on

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1((x_1, \dots, x_n), t), \\ \dot{x}_2 = f_2((x_1, \dots, x_n), t), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n((x_1, \dots, x_n), t). \end{cases} \quad (1.2)$$

Differensiaaliyhtälön muotoilussa kuvauksen f määrittelyjoukko jätetään usein hieman epämääräiseksi.

Olkoot $U \subset \mathbb{R}^n$ ja $I \subset \mathbb{R}$ avoimia joukkoja, olkoot $x_0 \in U$ ja $t_0 \in I$ ja olkoon $f: U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ (jatkuva) kuvaus. Differentiaaliyhtälön (1.1) *ratkaisu* alkuarvolla $x(t_0) = x_0$ eli *alkuarvottehtävän*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

ratkaisu on differentioituva kuvaus $x: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ joltain avoimelta väliltä $\Delta \subset \mathbb{R}$, jolle pätee $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ kaikilla $t \in \Delta$ ja $x(t_0) = x_0$.

Väli Δ on ratkaisun x *määrittelyväli*.

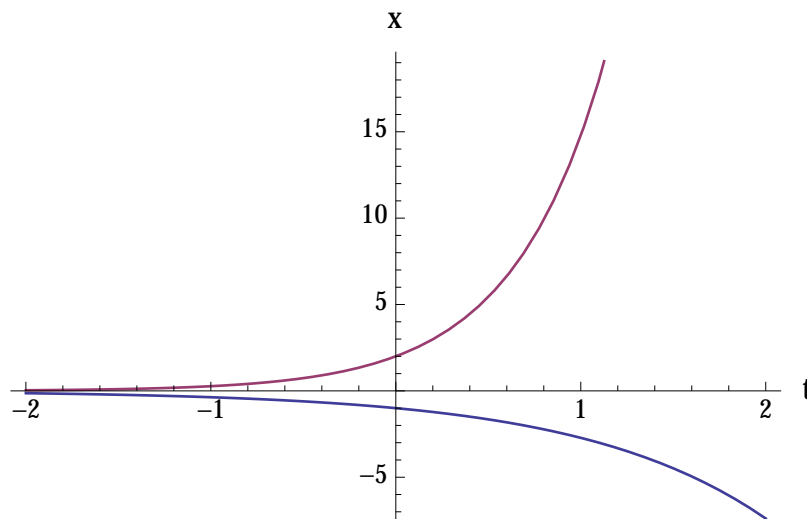
Parametriä t kutsutaan usein ajaksi ja differentiaaliyhtälön ajatellaan kuvaavan jonkin systeemin tilan x kehittymistä ajan kuluessa. Monissa esimerkiksi fysiikasta tai biologiasta tulevista differentiaaliyhtälöissä tilanne on juuri tämä.

Joissakin tapauksissa differentiaaliyhtälö voidaan ratkaista täydellisesti niin, että ratkaisulle voidaan antaa täsmällinen lauseke. Tärkeimpänä esimerkkinä tällaisista systeemeistä tarkastelemme ensimmäisen kurssin alkupuolella lineaarisia autonomisia yhtälöitä.

Esimerkki 1.1 (Populaatiomalleja). Olkoot $\lambda, a \in \mathbb{R}$. Lineaarisen alkuarvottehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ x(0) = a \end{cases} \quad (1.4)$$

ratkaisu on $x(t) = ae^{\lambda t}$. Kuva näyttää ratkaisujen kuvaajat parametrien arvoilla $\lambda = a = 2$ ja $\lambda = 1, a = -1$.



Alkuarvotehtävän (1.4) ratkaisu voidaan määritellä koko reaaliakselilla. Tämä alkuarvotehtävä liittyy populaatioiden kehityksen varhaiseen mallintamiseen, tällöin t on aika ja x kuvaa populaation kokoa.

Malthusin lain mukaan populaation kasvuvauhti on suoraan verrannollinen populaation kokoon.

Verhulst korjasi Malthusin mallia ottamalla huomioon sen, että tarkasteltava ympäristö ei voi elättää rajattoman suurta populaatiota.

Verhulstin populaatiomallia kuvaa *logistinen differentiaaliyhtälö*

$$\dot{x} = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad (1.5)$$

joillain parametreillä $a, K > 0$.

Propositio 1.2. Olkoot $U \subset \mathbb{R}^n$ ja $I \subset \mathbb{R}$ avoimia joukkoja, olkoot $x_0 \in U$ ja $t_0 \in I$ ja olkoon $f: U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuva kuvaus. Kuvaus $x: \Delta \rightarrow U$ on alkuarvotehtävän (1.3) ratkaisu, jos ja vain jos se on integraaliyhtälön

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds .$$

ratkaisu.

Todistus. Seuraa Analyysin peruslauseesta.¹ □

1.2 Korkeamman asteen yhtälöistä

Esimerkki 1.3 (Harmoninen värähtelijä). Kiinnitetään ideaalinen jousi seinään toisesta päästään. Kiinnitetään jousen toiseen päähän pistemäinen paino, jonka massa on $m > 0$. Ajatellaan, että jousen liike on rajoitettu parametrillä x parametrisoidulle viivalle, jota pitkin sitä voi vetää tai painaa kokoon. Olkoon jousen pää pisteessä $x = 0$. Kun josta venytetään tai painetaan kasaan, se vastustaa siirtymää voimalla $-kx$, missä $k > 0$ on *jousivakio*. Jousi aiheuttaa siis tarkasteltavalle painolle kiihtyvyyden yhtälöllä $m\ddot{x} = -kx$.

Differentiaaliyhtälö

$$m\ddot{x} = -kx$$

on *harmonista värähtelijää* kuvaava toisen asteen lineaarinen differentiaaliyhtälö.

Harmonisen värähtelijän yhtälön erikoistapauksen $m = k = 1$

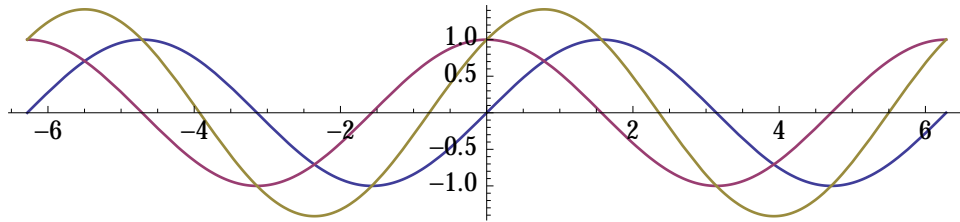
$$y''(t) + y(t) = 0 \quad (1.6)$$

kaikki ratkaisut saadaan funktioiden \sin ja \cos lineaarikombinaatioina. On helppo tarkastaa, että alkuarvotehtävällä

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 0, \\ y(0) = a, \\ y'(0) = b, \end{cases} \quad (1.7)$$

¹Katso JMA.

on koko avaruudessa \mathbb{R} määritelty ratkaisu $y(t) = a \cos t + b \sin t$ jokaisella $a, b \in \mathbb{R}$.



Toisen kertaluvun differensiaaliyhtälö (1.6) voidaan muuntaa tason ensimmäisen kertaluvun differensiaaliyhtälöksi: Asetetaan $x_1 = y$ ja $x_2 = y'$. Tällöin siis yhtälö (1.6) on

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases}$$

Matriisimuodossa alkuarvotettava (1.7) on siis $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = (a, b) \end{cases}$, missä $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Yhtälön (1.7) ratkaisu on luettavissa edeltä:

$$x(t) = \begin{pmatrix} a \cos t + b \sin t \\ -a \sin t + b \cos t \end{pmatrix}.$$

Esimerkin 1.3 menettely yleistyy korkeamman kertaluvun differensiaaliyhtälöille: Olkoon $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$ avoin ja olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Kertaluvun m differensiaaliyhtälö

$$y^{(m)} = f(y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}, t) \quad (1.8)$$

muunnetaan ensimmäisen kertaluvun differensiaaliyhtälöryhmäksi asettamalla $y_i = y^{(i)}$ jokaiselle $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Tällöin differensiaaliyhtälön (1.8) sijaan voidaan tutkia m yhtälön ryhmää

$$\begin{cases} \dot{y}_i = y_{i+1} \text{ kaikilla } 0 \leq i \leq m-2 \\ \dot{y}_{m-1} = f(y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, t). \end{cases} \quad (1.9)$$

Asettamalla $z = (z_1, z_2, \dots, z_m) = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1})$ ja $F(z, t) = (z_2, z_3, \dots, z_m, f(z, t))$, saadaan yhtälö (1.9) muotoon

$$\dot{z} = F(z, t).$$

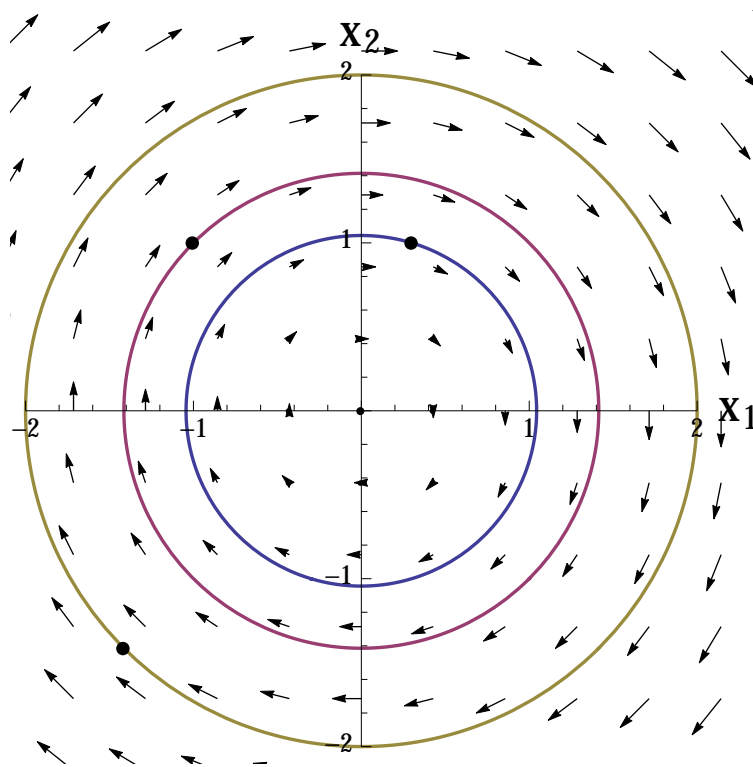
Propositio 1.4. *Olkoot f ja F kuten yllä. Funktio y on differensiaaliyhtälön (1.8) ratkaisu, jos ja vain jos kuvaus z on differensiaaliyhtälöryhmän (1.9) ratkaisu. \square*

1.3 Vektorikentät ja autonomiset yhtälöt

Jos differensiaaliyhtälön oikean puolen kuvauksen arvo ei riipu muuttujan t arvosta, tämä riippuvuus jätetään pois merkinnöistä.

Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Kuvaus $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ on *vektorikenttä* joukossa U . Vektorikentän $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ määräämä *autonominen differensiaaliyhtälö* on

$$\dot{x} = f(x). \quad (1.10)$$



Kuva 1.1: Differentiaaliyhtälön (1.3) vektorikenttä $f(x) = Ax$ ja ratkaisut alkuarvoilla $x_0 = (0.3, 1)$, $x_0 = (-1, 1)$ ja $x_0 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorikenttä. Alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ratkaisu on differentioituva polku joukossa U , jonka tangenttivektori $\dot{x}(t)$ pisteessä $x(t)$ on vektorikentän f arvo pisteessä $x(t)$. Lisäksi polku kulkee pisteen x_0 kautta ja toteuttaa $x(t_0) = x_0$.

Seuraava tulos osoittaa, että voimme itse asiassa aina olettaa, että differentiaaliyhtälö on autonominen.

Propositio 1.5. *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkoon $I \subset \mathbb{R}$ avoin. Olkoon $f: U \times I \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva. Määritellään $x_{n+1} = t$. Kuvaus $t \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ on differentiaaliyhtälön*

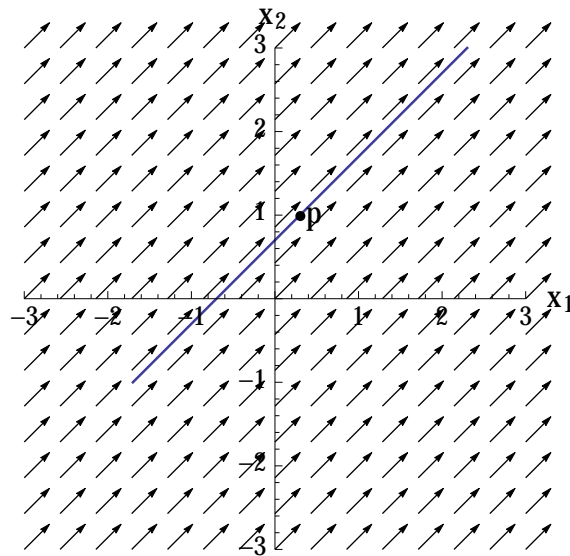
$$\dot{x} = f(x, t) \tag{1.11}$$

ratkaisu, jos ja vain jos $t \mapsto (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ on autonomisen differentiaaliyhtälön

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \text{ kaikilla } 1 \leq i \leq n \\ \dot{x}_{n+1} = 1. \end{cases} \tag{1.12}$$

ratkaisu.

Todistus. Harjoitustehtävä 1.1. □



Kuva 1.2: Vakiovektorikenttä $f(x) = (1, 1)$ tasossa ja alkuarvotehtävän $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = p = (0.3, 1)$ ratkaisu aikavälillä $t \in]-2, 2]$.

Tällä kurssilla tarkastelemme autonomisia ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä.

Vektorikentän f nollakohdat ovat differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ tasapainopisteitä.^a

^aequilibrium point

Lemma 1.6. (1) Jos x_0 on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ tasapainopiste, niin vakiokuvaus $t \mapsto x_0$ on alkuarvotehtävän $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t) = x_0 \end{cases}$ ratkaisu.

(2) Jos x on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisu, niin kuvaus $t \mapsto x(-t)$ on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = -f(x)$ ratkaisu.

Todistus. Kohta (1) on selviö. Kohta (2) seuraa ketjusäännöstä: Jos $\dot{x}(t) = f(x(t))$ kaikilla t , niin

$$\frac{d}{dt}x(-t) = -\dot{x}(-t) = -f(x(-t))$$

kaikilla t . □

1.4 Ratkaisujen olemassaolosta

Todistamme kurssilla myöhemmin tuloksen, joka kertoo, milloin alkuarvotehtävällä on täsmälleen yksi ratkaisu.

Lause 1.7 (Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause). *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkoon $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Olkoon $x_0 \in U$ ja olkoon $t_0 \in \mathbb{R}$. Tällöin alkuarvotetävällä*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu, joka on määritelty jollain avoimella välillä $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$.

Todistus. Seuraa Lauseesta 5.2. □

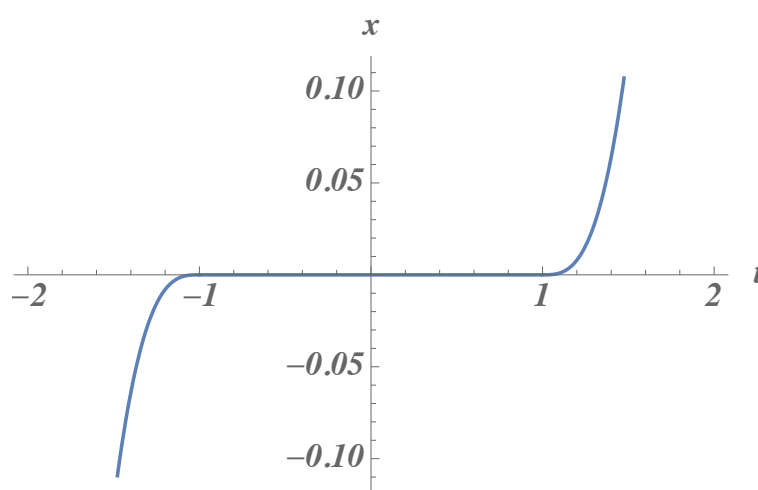
Jos Lauseen 1.7 oletukset eivät ole voimassa, niin alkuarvotetävällä voi olla useita eri ratkaisuja kuten seuraava esimerkki osoittaa.

Esimerkki 1.8. Vakiofunktio $0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $0(t) = 0$, on alkuarvotetävän

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x^{2/3}, \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (1.13)$$

ratkaisu. Toisaalta funktio $p_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p_3(t) = t^3$ on alkuarvotetävän (1.13) ratkaisu, joten tehtävän ratkaisu ei ole yksikäsitteinen. Itse asiassa alkuarvotetävällä (1.13) on äärettömän monta ratkaisua $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: Olkoot $a \leq 0 \leq c$ ja olkoon

$$x_{a,b}(t) = \begin{cases} (t-a)^3, & \text{kun } t \leq a \\ 0, & \text{kun } a \leq t \leq b \\ (t-b)^3, & \text{kun } t \geq b \end{cases} .$$



Kuva 1.3: Yksi Esimerkin 1.8 alkuarvotetävän ratkaisu.

On helppo tarkastaa, että kaikki funktiot $x_{a,b}$ ovat derivoituvia ja että myös ne alkuarvotetävän (1.13) ratkaisuja. Tässä esimerkissä vektorikenttä $f_{2/3}(x) = 3x^{2/3}$ on jatkuva, mutta se ei ole differentioituva pisteessä $x = 0$.

1.5 Maksimaalinen määrittelyväli ja rata

Lemma 1.9. *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Olkoon $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ ja olkoon $t_0 \in \mathbb{R}$. Olkoot $x_1: I_1 \rightarrow U$ ja $x_2: I_2 \rightarrow U$ alkuarvotehtävän
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$
 ratkaisuja avoimilla väleillä I_1 ja I_2 . Tällöin alkuarvotehtävällä on yksikäsitteinen ratkaisu välillä $I_1 \cup I_2$.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että $x_1(t) = x_2(t)$ kaikilla $t \in I_1 \cap I_2$. Jos tämä ei päde, niin on maksimaalinen osaväli $[t_0, t^*] \subset I_1 \cap I_2$, jossa ratkaisut yhtyvät. Olkoon $x^* = x_1(t^*) = x_2(t^*)$. Alkuarvotehtävällä

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t^*) = x^* \end{cases} \quad (1.14)$$

on Lauseen (1.7) nojalla yksikäsitteinen ratkaisu jollain välillä $]x^* - \delta, x^* + \delta[$. Funktiot x_1 ja x_2 ovat alkuarvotehtävän (1.14) ratkaisuja välillä $]t^* - \delta, t^* + \delta[\cap I_1 \cap I_2$, joten ne yhtyvät tällä välillä. Tämä on ristiriita ajan t^* määritelmän kanssa.

Funktio $x: I_1 \cup I_2 \rightarrow U$, joka määritellään asettamalla $x(t) = x_k(t)$, kun $t \in I_k$, $k \in \{1, 2\}$, on hyvin määritelty ja se on alkuarvotehtävän ratkaisu välillä $I_1 \cup I_2$. Yksikäsitteisyys seuraa todistuksen alkuosasta. \square

Propositio 1.10. *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja olkoon $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Olkoot $x_0 \in U$ ja $t_0 \in \mathbb{R}$. Olkoon $J =]\alpha, \beta[$ yhdiste kaikista alkuarvotehtävän*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.15)$$

määrittelyväleistä. Tällöin alkuarvotehtävällä (1.15) on yksikäsitteinen ratkaisu välillä J .

Todistus. Määritellään kuvaus $x:]\alpha, \beta[\rightarrow U$ näin: Jokaisella $t \in J$ on alkuarvotehtävän (1.15) ratkaisu u , joka on määritelty jollain ajan t sisältämällä välillä. Asetetaan $x(t) = u(t)$. Lemman 1.9 nojalla x on nyt hyvin määritelty. Lisäksi se on alkuarvotehtävän (1.15) ratkaisu. Välillä J määritellyn ratkaisun yksikäsitteisyys seuraa Lemmasta 1.9. \square

Alkuarvotehtävän (1.15) kaikkien ratkaisuvälien yhdiste $I(b, f)$ on sen *maksimaalinen määrittelyväli*.

Maksimaalisella määrittelyvälillä määritelty ratkaisu on *maksimaalinen ratkaisu*.

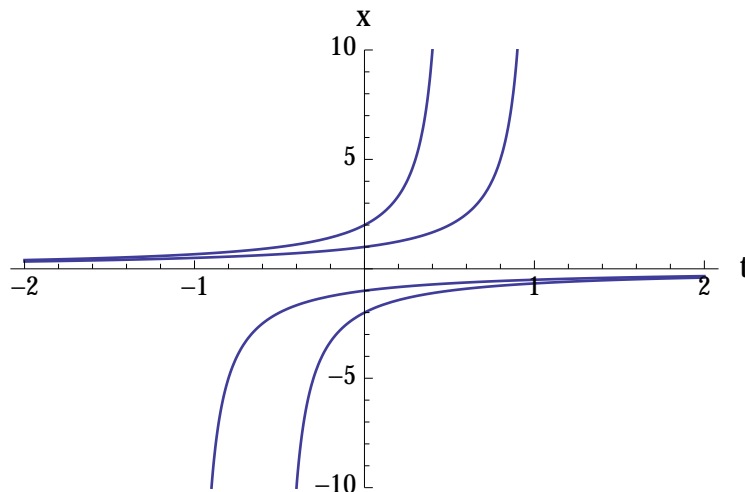
Maksimaalisen ratkaisun kuvajoukko on vektorikentän f määräämä pisteen x_0 *rata*.

Esimerkki 1.11. Olkoon $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = a \end{cases} ,$$

ratkaisu $x(t) = \frac{a}{1-at}$ on määritelty ainoastaan avoimen joukon $\mathbb{R} - \{\frac{1}{a}\}$ toisessa komponentissa vaikka yhtälön oikean puolen funktio $x \mapsto x^2$ on määritelty koko reaalilukujen joukossa.

Seuraava autonomisten differentiaaliyhtälöiden ominaisuus on tärkeä geometrisen hahmottamisen apukeino:



Kuva 1.4: Esimerkin 1.11 alkuarvotettävän ratkaisuja parametrin a eri arvoilla.

Seuraus 1.12. *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja olkoon $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Jos kahden pisteen vektorikentän f määräämät radat leikkaavat, niiden radat ovat joukkoina samat.*

Todistus. Olkoot x ja y vektorikentän f määräämän differentiaaliyhtälön ratkaisuja maksimaalisilla määrittelyväleillään I_x ja I_y . Oletetaan, että $x(t_x) = y(t_y)$. Olkoon $s: I_x \rightarrow I_x - t_x + t_y$ kuvaus $s(t) = t - t_x + t_y$. Nyt x ja $y \circ s$ ovat alkuarvotettävän

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z) \\ z(t_x) = x(t_x) \end{cases}$$

ratkaisuja, joten ne yhtyvät välillä I_x . Kuvausten y ja $y \circ s$ kuvajoukko on sama, joten väite seuraa. \square

Harjoitustehtäviä

1.1. Todista Propositio 1.5.

1.2. Ratkaise logistinen differentiaaliyhtälö (1.5) parametrilla $K = 1$ ja tarkastele sen ratkaisujen käyttäytymistä eri alkuarvoilla, kun $t \rightarrow \infty$.

Tehtävissä 1.3 ja 1.4 tarkastellaan vektorikenttää $N: \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $N(x) = -\frac{x}{\|x\|}$.

1.3. (1) Hahmottele kuva vektorikentästä N .

(2) Voiko vektorikentän N jatkaa tasossa \mathbb{R}^2 määritellyksi jatkuvaksi vektorikentäksi?

1.4. (1) Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $x_0 \neq 0$. Osoita, että lauseke

$$x(t) = x_0 - t \frac{x_0}{\|x_0\|}$$

antaa alkuarvot tehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = N(x), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.16)$$

ratkaisun.

(2) Piirrä kuva muutaman ratkaisun radoista alkuarvon x_0 eri arvoilla.

(3) Mikä on alkuarvot tehtävän (1.16) ratkaisun maksimaalinen määrittelyväli?

1.5. Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Tarkastele alkuarvot tehtävää

$$\begin{cases} \dot{x} = x\|x\|, \\ x(0) = x_0 \end{cases} .$$

(1) Hahmottele kuva vektorikentästä.

(2) Ratkaise alkuarvot tehtävä.

(3) Kuvaile ratkaisujen käyttäytymistä.

Tehtävissä 1.6 ja 1.7 ratkaise alkuarvot tehtävä, määritä ratkaisun maksimaalinen määrittelyväli ja kuvaile ratkaisun käyttäytymistä.

$$\mathbf{1.6.} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 \\ \dot{x}_2 = x_2 + \frac{1}{x_1} \\ x(0) = (1, 1) \end{cases} .$$

$$\mathbf{1.7.} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{2x_1} \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ x(0) = (1, 1) \end{cases} .$$

1.8. Olkoon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (-x_1, x_2 + x_1^2)$. Ratkaise alkuarvot tehtävä

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

kaikilla $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Miten ratkaisut käyttäytyvät alkuarvoilla x_0 , jotka ovat lähellä vektorikentän f tasapainopistettä?

Luku 2

Lineaariset autonomiset yhtälöt ja matriisien eksponenttifunktio

Tässä luvussa tutustumme matriisien eksponenttifunktioon ja ratkaisemme sen avulla kaikki lineaariset autonomiset alkuarvot tehtävät.

2.1 Lineaariset autonomiset differentiaaliyhtälöt

Olkoon A reaalinen $n \times n$ -matriisi. Differentiaaliyhtälö $\dot{x} = Ax$ on *lineaarinen autonominen differentiaaliyhtälö* ja A on sen *kerroinmatriisi*.

Esimerkki 2.1. (1) Olkoot $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Diagonaalimatriisin $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ määräämä tason differentiaaliyhtälö on komponenteittain kirjoitettuna

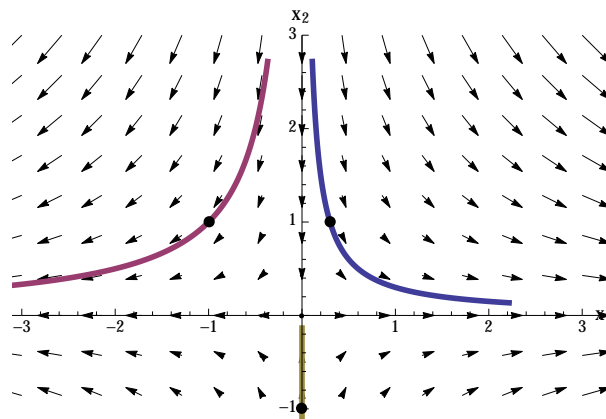
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2, \end{cases} \quad (2.1)$$

Olkoon $a \in \mathbb{R}^2$. Tason alkuarvot tehtävän $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = a \end{cases}$ ratkaisu on Esimerkin 1.1 mukaan

$$x(t) = \begin{pmatrix} a_1 e^{\lambda_1 t} \\ a_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

Jos alkuarvo (a, b) on x_i -akselilla, $i \in \{1, 2\}$, niin koko rata sisältyy x_i -akseliin. Eriyisesti vakiokuvaus 0 on ratkaisu alkuarvolla $x(0) = 0$. Muilla alkuarvoilla ratkaisut lähestyvät x_1 -akselia, kun $t \rightarrow \infty$ ja x_2 -akselia, kun $t \rightarrow -\infty$.

(2) Harmonisen värähtelijän yhtälöryhmä (1.3) on lineaarinen autonominen yhtälö, jonka kerroinmatriisi on $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Esimerkissä 1.3 näimme, että tämän yhtälön kaikki radat ovat rajoitettuja.



Kuva 2.1: Alkuarvotehtävän (2.1) ratkaisuja, kun $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$.

Lineaarisia autonomisia differentiaaliyhtälöitä voi käsitellä lineaarialgebran keinoilla ja eksakti ratkaiseminen on periaatteessa mahdollista kaikissa tapauksissa. Tässä luvussa tarkastelemme lineaarisen autonomisen yhtälön ratkaisemista matriisien eksponenttifunktion avulla.

Luvuissa 3 ja 4 luokittelemme lineaariset autonomiset differentiaaliyhtälöt ja osoitamme, että esimerkiksi tason tapauksessa ratkaisujen luonne voidaan päätellä kerroinmatriisin ominaisarvojen ja niiden kertalukujen avulla. Tätä varten kertaamme ja laajennamme lineaarialgebran kurssien antamia tietoja liitteessä A. Kurssimateriaalien lisäksi tässä ja seuraavassa luvussa käsiteltäviin asioihin voi perehtyä esimerkiksi lähteiden [Gre], [Gro], [Pet] tai [HJ] avulla.

2.2 Matriisien normiavaruus

Tarkastelemme Luvussa 2.4 periaatteessa suoraviivaista menetelmää autonomisen lineaarisen vakiokertoimisen differentiaaliyhtälön ratkaisemiseksi. Aloitamme sopimalla, milloin kaksi $n \times n$ -matriisia on lähellä toisiaan.

Olkkoon V reaalinen vektoriavaruus. Kuvaus $\|\cdot\|: V \rightarrow [0, \infty[, v \mapsto \|v\|$, on *normi*, jos

- (1) $\|v\| = 0$, jos ja vain jos $v = 0$,
- (2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ kaikille $\lambda \in \mathbb{R}$ ja kaikille $v \in V$ ja
- (3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ kaikille $v, w \in V$.

Pari $(V, \|\cdot\|)$ on *normiavaruus*.

Esimerkki 2.2. (1) Lineaarialgebran kursseilla osoitetaan, että euklidinen normi $\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$ on normi.

(2) Lauseke

$$\|A\|_\infty = \|(a_{ij})\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|.$$

määrittelee normin vektoriavaruudessa $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$.

(3) Lauseke

$$\|A\|_1 = \|(a_{ij})\|_1 = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|.$$

määrittelee normin vektoriavaruudessa $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$.

(4) Lauseke

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

määrittelee normin vektoriavaruudessa $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Lemma 2.3. *Olkoot $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Tällöin $\|AB\|_1 \leq \|A\|_1 \|B\|_1$.*

Todistus. Matriisien tulon määritelmän, kolmioepäyhtälön ja karkean arvion

$$\sum_{j=1}^n |b_{kj}| \leq \|B\|_1$$

nojalla

$$\begin{aligned} \|AB\|_1 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \sum_{j=1}^n |b_{kj}| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \|B\|_1 = \|A\|_1 \|B\|_1. \quad \square \end{aligned}$$

Vektoriavaruuden V normit $\|\cdot\|$ ja $\|\cdot\|'$ ovat *ekvivalentit*, jos on $c > 0$, jolle pätee

$$\frac{1}{c} \|v\|' \leq \|v\| \leq c \|v\|$$

kaikille $v \in V$.

Lause 2.4. *Äärellisulotteisessa vektoriavaruudessa kaikki normit ovat ekvivalentteja.*

Todistus. Katso esimerkiksi [Par, Lause 4.9]. □

Matriisien muodostama jono $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ suppenee kohti matriisia A normiavaruudessa $(\text{Mat}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$, jos $\|A_i - A\| \rightarrow 0$, kun $i \rightarrow \infty$.

Propositio 2.5. *Olkoot $\|\cdot\|$ ja $\|\cdot\|'$ normeja avaruudessa $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Jono $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ suppenee avaruudessa $(\text{Mat}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$, jos ja vain jos jono $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ suppenee avaruudessa $(\text{Mat}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|')$.*

Todistus. Harjoitustehtävä 2.1. □

Propositio 2.6. *Olkoon $\|\cdot\|$ normi avaruudessa $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Jono $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ suppenee avaruudessa $(\text{Mat}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$, jos ja vain jos kaikki sen kertoimien muodostamat jonot $(a_{kl})_{l=1}^{\infty}$ suppenevat reaalilukujen joukossa.*

Todistus. Harjoitustehtävä 2.2. □

Propositio 2.7. *Neliömatriisien normiavaruus $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ on homeomorfinen n^2 -ulotteisen euklidisen avaruuden kanssa.* □

2.3 Matriisien eksponenttifunktio

Määritellään matriisien potenssit tavanomaiseen tapaan asettamalla $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$ ja induktiivisesti $A^{k+1} = AA^k$ kaikille $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ ja kaikille $k \geq 2$.

Olkoon $(B_k)_{k=0}^\infty$ jono avaruudessa $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Sarja $\sum_{k=0}^\infty B_k$ on jono $(\sum_{k=0}^n B_k)_{n=0}^\infty$.
Olkoon $(c_k)_{k=0}^\infty$ jono reaalilukuja. Sarja $\sum_{j=0}^\infty c_j A^j$ on *potenssisarja*.

Propositio 2.8. *Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Sarja*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \quad (2.2)$$

suppenee.

Todistus. Olkoon $a_{ij}^{(k)}$ matriisin A^k ij -kerroin. Tällöin

$$|a_{ij}^{(2)}| = \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj} \right| \leq n \|A\|_\infty^2,$$

ja induktiolla

$$|a_{ij}^{(N)}| = \left| \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(N-1)} a_{kj} \right| \leq n^{N-1} \|A\|_\infty^N.$$

Siispä

$$\frac{|a_{ij}^{(N)}|}{N!} \leq \frac{n^{N-1} \|A\|_\infty^N}{N!} \leq \frac{n^N \|A\|_\infty^N}{N!} \quad (2.3)$$

kaikille $1 \leq i, j \leq n$ ja kaikille $N \in \mathbb{N}$. Koska reaalisen eksponenttifunktion sarja $\sum_{N=0}^{\infty} \frac{(n \|A\|_\infty)^N}{N!}$ on positiiviterminen suppeneva sarja, niin sarja $\sum_{N=0}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(N)}}{N!}$ suppenee itseisesti epäyhtälön (2.3) ja positiivitermistien sarjojen vertailutestin nojalla.¹ Koska lisäksi

$$\left(\sum_{N=0}^M \frac{A^N}{N!} \right)_{ij} = \sum_{N=0}^M \frac{a_{ij}^{(N)}}{N!},$$

niin Proposition 2.6 nojalla sarja (2.2) suppenee. □

Sarja (2.2) määrittelee *matriisien eksponenttifunktion* $\exp: \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$,

$$\exp A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}.$$

Esimerkki 2.9. (1) $\exp \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n})$.

(2) Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

¹Katso JMA4 tai [Apo, Thm. 8.20].

Tällöin

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta^2 & 0 \\ 0 & -\beta^2 \end{pmatrix} = -\beta^2 I_2, \\ A^3 &= -\beta^2 I_2 \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = -\beta^2 A, \\ A^4 &= \beta^4 I_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

ja induktiolla saadaan siis

$$\begin{aligned} \exp(A) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A^j}{j!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{(2k)}}{(2k)!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{(2k+1)}}{(2k+1)!} \\ -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{(2k+1)}}{(2k+1)!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{(2k)}}{(2k)!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lemma 2.10. *Olkoot $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ siten, että $AB = BA$. Tällöin $\exp(tA)B = B \exp(tA)$. Erityisesti $\exp(tA)A = A \exp(tA)$.*

Todistus. Induktiolla on helppo todistaa, että kaikille $K \in \mathbb{N}$ pätee $A^k B = B A^k$: Oletuksen mukaan väite pätee, kun $k = 1$. Jos $A^{k-1} B = B A^{k-1}$, niin

$$A^k B = B A^k = A^{k-1} A B = A^{k-1} B A = B A^{k-1} A = B A^k.$$

Siis kaikille $N \in \mathbb{N}$ pätee

$$B \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} B,$$

mistä väite seuraa. □

Jos $A, B, C \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, C on kääntyvä ja $B = CAC^{-1}$, niin A ja B ovat toistensa konjugaatteja ja C on konjugoiva matriisi.

Lineaaristen differentiaaliyhtälöiden yhteydessä konjugointi on usein kätevä väline seuraavan ominaisuuden vuoksi:

Lemma 2.11. *Jos $B, C \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, C on kääntyvä, niin*

$$\exp(CBC^{-1}) = C \exp(B) C^{-1}.$$

Todistus. Matriisituloille pätee $(CBC^{-1})^k = CB^k C^{-1}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Siis osasummille pätee

$$\sum_{k=0}^n \frac{(CBC^{-1})^k}{k!} = C \sum_{k=0}^n \frac{B^k}{k!} C^{-1},$$

joten Lemman 2.3 nojalla pätee

$$\left\| \sum_{k=0}^n \frac{(CBC^{-1})^k}{k!} - C \exp(B) C^{-1} \right\|_1 = \left\| C \left(\sum_{k=0}^n \frac{B^k}{k!} - \exp(B) \right) C^{-1} \right\|_1 \rightarrow 0,$$

kun $n \rightarrow \infty$. □

2.4 Lineaarisen autonomisen yhtälön ratkaisut

Matriisien eksponenttifunktio antaa menetelmän kaikkien lineaaristen homogeenisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisen.

Aloitamme hyödyllisellä abstraktilla havainnolla. Tässä tuloksessa määritämme kuvauksen $t \mapsto \exp(tA)$ derivaatan. Proposition 2.7 nojalla matriisien avaruus $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ on n^2 -ulotteinen reaalinen vektoriavaruus, joka on siis isomorfinen avaruuden \mathbb{R}^{n^2} kanssa.

Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ avoin. Kuvaus $F: I \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ on *jatkuva (differentioituva)*, jos se on jatkuva (differentioituva) kuvauksena avaruuteen \mathbb{R}^{n^2} .

Vektorianalyysin tai -calculuksen kursseilta muistamme: Jos $I \subset \mathbb{R}$ on avoin väli ja $A: I \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ on matriisifunktio

$$A(t) = (A_{ij}(t))_{i,j=1}^n,$$

niin A on differentioituva, jos ja vain jos kaikki funktiot A_{ij} ovat differentioituvia/derivoituvia. Tällöin

$$\dot{A}(t) = (\dot{A}_{ij}(t))_{i,j=1}^n.$$

Propositio 2.12. *Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ ja olkoon $E_A: \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$,*

$$E_A(t) = \exp(tA).$$

Tällöin

$$\dot{E}_A(t) = AE_A(t).$$

Todistus. Olkoon $A^k = (a_{ij}^{(k)})_{i,j=1}^n$. Derivoimalla suppenevaa potenssisarjaa termeittäin saamme

$$\dot{E}_A(t)_{ij} = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(k)} t^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k a_{ij}^{(k)} t^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(k+1)} t^k}{k!}.$$

Siis

$$\dot{E}_A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{k+1} t^k}{k!} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = AE_A(t).$$

Keskimmäinen näistä yhtälöistä on selvä, koska vastaava pätee kaikille äärellisille osasummille. □

Lemma 2.13. *Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ avoin joukko. Olkoot $A: I \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, $B: I \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ ja $G: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ differentioituvia kuvauksia.*

(1) *Olkoon $F: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(t) = A(t)G(t)$. Tällöin $\dot{F} = A\dot{G} + \dot{A}G$.*

(2) *Olkoon $C: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $C(t) = A(t)B(t)$. Tällöin $\dot{C} = A\dot{B} + \dot{A}B$.*

Todistus. Harjoitustehtävä 2.4. □

Propositio 2.14. *Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Tällöin $\exp A$ on kääntyvä ja*

$$\exp(-A) = (\exp A)^{-1}.$$

Todistus. Harjoitustehtävä 2.5. □

Lause 2.15 (Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause). *Olkoon* $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$. *Alkuarvotettävän* $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ *ainoa ratkaisu on* $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x(t) = \exp(tA)x_0$.

Todistus. Proposition 2.12 nojalla

$$\frac{d}{dt}(\exp(tA)x_0) = A \exp(tA)x_0,$$

kaikilla $t \in \mathbb{R}$, joten x on alkuarvotettävän ratkaisu. Osoitamme, että se on ainoa ratkaisu: Olkoon $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ alkuarvotettävän ratkaisu. Olkoon $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $z(t) = e^{-tA}y(t)$. Lemman 2.13 nojalla

$$\dot{z}(t) = -A \exp(-tA)y(t) + \exp(-tA)Ay(t) = \exp(-tA)(A - A)y(t) = 0,$$

joten z on vakiokuvaus $z(t) \equiv z(0) = y(0) = x_0$. Siispä kuvauksen z määritelmä antaa Proposition 2.14 avulla $y(t) = \exp(tA)x_0$. \square

Ratkaisun yksikäsitteisyys seuraa myös olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseesta 1.7.

Lemma 2.16. *Jos* $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ $AB = BA$, *niin* $\exp(A + B) = \exp A \exp B$.

Todistus. Olkoon

$$F(t) = \exp(t(A + B)) - \exp(tA) \exp(tB).$$

Huomataan, että $F(0) = \exp(0) - \exp(0) \exp(0) = 0$.

Lemman 2.10 nojalla $\exp(tA)B = B \exp(tA)$, joten Lemman 2.13 nojalla

$$\dot{F}(t) = (A + B) \exp(t(A + B)) - (A \exp(tA) \exp(tB) + \exp(tA)B \exp(tB)) = (A + B)F(t).$$

Lauseen 2.15 nojalla $F(t) = \exp(t(A + B))F(0) = 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Väite seuraa tästä. \square

Esimerkki 2.17. Olkoon

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Lemman 2.16 ja Esimerkin 2.9 nojalla

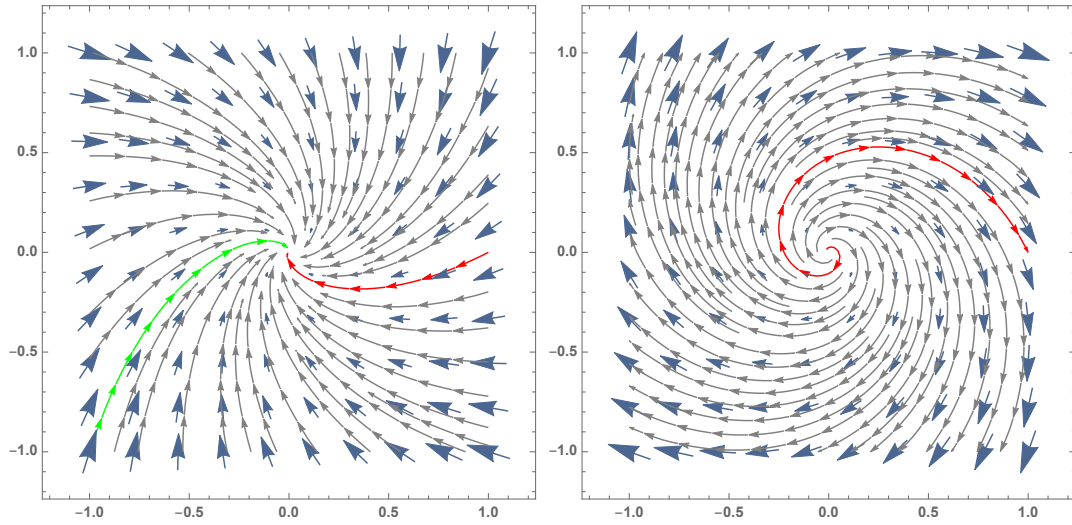
$$\exp(\Lambda) = \exp(\alpha I_n) \exp \left(\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \right) = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Lauseen 2.15 nojalla alkuarvotettävän

$$\begin{cases} \dot{x} = \Lambda x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ainoa ratkaisu on

$$\exp(t\Lambda)x_0 = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} x_0 = \begin{pmatrix} e^{t\alpha}(\cos(\beta t)x_{01} + \sin(\beta t)x_{02}) \\ e^{t\alpha}(-\sin(\beta t)x_{01} + \cos(\beta t)x_{02}) \end{pmatrix}.$$



Kuva 2.2: Esimerkin 2.17 alkuarvot tehtävien ratkaisuja, kun $\beta = \pi/3$ ja vasemmalla $\alpha = -2$ ja oikealla $\alpha = 1/2$.

2.5 Ratkaisujen vektoriavaruus

Millä tahansa joukolla $x \neq \emptyset$ määriteltyjen reaaliarvoisten funktioiden joukko

$$\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R}\}$$

muodostaa reaalisen vektoriavaruuden, kun funktioiden yhteenlasku määritellään pisteittäin asettamalla kaikille $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

kaikille $x \in X$ ja reaaliluvulla kertominen määritellään asettamalla kaikille $\lambda \in \mathbb{R}$ ja kaikille $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

kaikille $x \in X$.

Seuraus 2.18. Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Lineaarisen differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Ax$ ratkaisut muodostavat n -ulotteisen reaalisen vektoriavaruuden.

Todistus. Osoitetaan, että ratkaisut muodostavat funktioiden avaruuden lineaarisen aliavaruuden. Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen nojalla ratkaisujen joukko ei ole tyhjä. Olkoot x ja y ratkaisuja ja $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tällöin derivoinnin lineaarisuuden, ratkaisun määritelmän ja matriisilla kertomisen lineaarisuuden nojalla

$$\frac{d}{dt}(\lambda x + \mu y) = \lambda \dot{x} + \mu \dot{y} = \lambda Ax + \mu Ay = A(\lambda x + \mu y),$$

joten $\lambda x + \mu y$ on ratkaisu. Siis ratkaisut muodostavat vektoriavaruuden.

Olkoot $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ vektoriavaruuden \mathbb{R}^n standardikantavektorit. Lauseen 2.15 mukaan kuvaukset $x_1 = e^{tA}\mathbf{e}_1, \dots, x_n = e^{tA}\mathbf{e}_n$ ovat tarkasteltavan lineaarisen homogeenisen

yhtälön ratkaisuja. Ne ovat lineaarisesti riippumattomia sillä

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right)(0) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i = 0$$

vain, jos $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. Siis ratkaisujen avaruuden dimensio on vähintään n .

Olkoon x jokin ratkaisu. Tällöin

$$x(0) = \sum_{i=1}^n x(0)_i \mathbf{e}_i = \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right)(0).$$

Kuvaukset x ja $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ ovat alkuarvotehtävän $\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(0) = x(0) \end{cases}$ ratkaisuja, joten Lauseen

2.15 yksikäsitteisyystuloksen nojalla $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$. Siis differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Ax$ ratkaisujen avaruus on n -ulotteinen. \square

2.6 Muuttujanvaihtolemma

Lemman 2.11 avulla voimme ratkaista lineaarisen differentiaaliyhtälön, jos tunnemme ratkaisun sen kerroinmatriisin jotain konjugaattia vastaavalle differentiaaliyhtälölle ja tunnemme konjugoivan matriisin.

Esimerkki 2.19. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Lauseen 2.15 nojalla alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

ratkaisu on $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $y(t) = \exp(tA)y_0$. Matriisin $\exp(tA)$ määrittäminen suoraan määritelmästä vaikuttaa hankalalta.

Huomaamalla, että $tA = K \operatorname{diag}(2t, t)K^{-1}$ matriisilla $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, Lemma 2.11 antaa helposti

$$\exp(tA) = K \exp(\operatorname{diag}(2t, t)) K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 0 & e^t \end{pmatrix},$$

joten

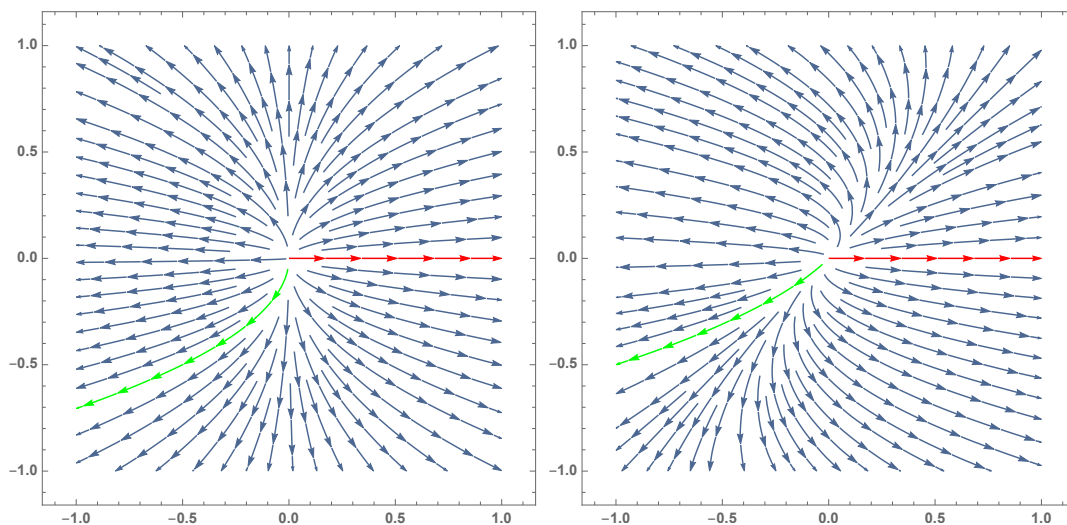
$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y_0 = \begin{pmatrix} e^{2t}y_{01} + (e^t - e^{2t})y_{02} \\ e^t y_{02} \end{pmatrix}.$$

Alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{diag}(2t, t)x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

ratkaisut ovat Esimerkin 2.9(1) nojalla

$$x(t) = \exp(t \operatorname{diag}(2, 1))x_0 = \operatorname{diag}(e^{2t}, e^t)x_0 = \begin{pmatrix} e^{2t}x_{01} \\ e^t x_{01} \end{pmatrix}.$$



Kuva 2.3: Yhtälöiden (2.5) (vasemmalla) ja (2.4) (oikealla) ratkaisuja. Jälkimmäisen yhtälön punainen ja vihreä ratkaisu saadaan matriisin K avulla vastaavista ensimmäisen yhtälön ratkaisuista.

Seuraava tulos yleistää Esimerkin 2.19 ratkaisumenetelmän:

Propositio 2.20 (Muuttujanvaihtolemma). *Olkoot $A, B, C \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ siten, että C on kääntyvä ja $A = CBC^{-1}$. Tällöin x on alkuarvotehtävän $\begin{cases} \dot{x} = Bx \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ ratkaisu, jos ja vain jos $y = Cx$ on alkuarvotehtävän $\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(0) = y_0 = Cx_0 \end{cases}$ ratkaisu.*

Todistus. Lauseen 2.15 nojalla alkuarvotehtävän $\begin{cases} \dot{x} = Bx \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ ratkaisu on $x(t) = \exp(tB)x_0$.

Vastaavasti alkuarvotehtävän $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ ratkaisu on Lauseen 2.15 ja Lemman 2.11 nojalla

$$y(t) = \exp(tA)y_0 = C \exp(tB)C^{-1}Cx_0 = C \exp(tB)x_0 = Cx(t).$$

Lausekkeesta näkee suoran, että alkuarvo $y(0) = Cx(0)$ toteutuu. \square

Toinen todistus. Olkoot x ja y kuten väitteessä. Ketjusäännön nojalla pätee

$$\dot{y} = C\dot{x} = CBx = CBC^{-1}y = Ay.$$

Lisäksi $y(0) = Cx(0)$, joten alkuarvo toteutuu. \square

Harjoitustehtäviä

2.1. Todista Propositio 2.5.

2.2. Todista Propositio 2.6.

2.3. Todista Propositio 2.8 käyttämällä normia $\|\cdot\|_1$ normin $\|\cdot\|_\infty$ sijaan.

2.4. Todista Lemma 2.13.²

2.5. Todista Propositio 2.14.³

2.6. Laske $\exp A$, kun (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.7. Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$. Laske $\exp tA$, kun⁴

(a) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

2.8. Olkoot $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Määritä $\exp A$, $\exp B$ ja $\exp(A + B)$.

2.9. Olkoot $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ ja $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Osoita, että $C^{-1}AC$ on diagonaalimatriisi.

(b) Määritä $\exp A$.

2.10. Olkoot $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ja $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Osoita, että $C^{-1}AC$ on diagonaalimatriisi.

(b) Ratkaise alkuarvotehtävä $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = (2, 3) \end{cases}$.

²Kirjoita tulo auki komponenteittain.

³Osoita, että kuvaus $F: \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, $F(t) = \exp(tA) \exp(-tA)$, on vakio.

⁴Lemma 2.16 auttaa.

Luku 3

Tason lineaariset autonomiset alkuarvotekävät

Tässä luvussa osoitamme, että kaikki reaaliset 2×2 -matriisit voidaan konjugoida reaalilla kääntyvällä matriisilla yhteen kolmesta perusmuodosta. Tarkastelemme tason lineaaristen autonomisten alkuarvotekävien ratkaisuja näiden perusmuotojen ja muuttujanvaihtolemmän avulla.

3.1 2×2 -matriisien luokittelu

Jos A on 2×2 -matriisi, niin

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A, \quad (3.1)$$

missä $\operatorname{tr} A$ on matriisin A diagonaalialkioiden summa eli matriisin A jälki. Toisen asteen polynomien juurten kaava antaa nopean tavan selvittää 2×2 -matriisin ominaisarvot ja niiden laadut:

Propositio 3.1. *Olkoon A reaalinen 2×2 -matriisi.*

- (1) *Jos $\det A < 0$, niin matriisilla A on positiivinen ja negatiivinen ominaisarvo.*
- (2) *Jos $\det A > 0$ ja $\operatorname{tr}^2 A \geq 4 \det A$, niin matriisilla A on joko kaksi positiivista tai kaksi negatiivista ominaisarvoa.*
- (3) *Jos $\det A > 0$ ja $\operatorname{tr}^2 A < 4 \det A$, niin matriisilla A on kaksi kompleksista ominaisarvoa, jotka ovat toistensa liittolukuja.*
- (4) *Jos $\det A = 0$, niin ainakin toinen ominaisarvo on 0. Tällöin mahdollinen nollasta poikkeava ominaisarvo on reaalinen.*

Todistus. Lemman A.3 nojalla ominaisarvojen tulo on $\det A \in \mathbb{R}$. Jos ominaisarvot eivät ole reaalisia, niin ne ovat Lemman A.1 nojalla toistensa kompleksikonjugaatteja ja niiden tulo on siis positiivinen. Muut väitteet seuraavat helposti lausekkeen (3.1) ja toisen asteen polynomien ratkaisukaavan avulla. \square

Seuraava tulos antaa jokaiselle reaaliselle 2×2 -matriisille perusmuodon, joka on kyseisen matriisin konjugaatti.

Lause 3.2 (2-ulotteinen konjugointilause). *Olkoon A reaalinen 2×2 -matriisi. Tällöin on kääntyvä reaalinen 2×2 -matriisi C , jolle matriisi CAC^{-1} on*

- (1) *diagonaalimatriisi, jos matriisilla A on kaksi eri reaalista ominaisarvoa tai yksi geometrisesti kaksinkertainen reaalinen ominaisarvo,*
- (2) *muotoa $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, jos matriisilla A on yksi geometrisesti yksinkertainen reaalinen ominaisarvo λ ja*
- (3) *vinosymmetrinen muotoa $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, jos matriisilla A ei ole reaalisia ominaisarvoja. Tällöin matriisin A kompleksiset ominaisarvot ovat $\lambda = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.*

Todistus. (1) Jos matriisilla A on kaksi eri reaalista ominaisarvoa, diagonalisoituvuus on todistettu kurssilla LAG2. Tapaus, jossa matriisilla A on geometrisesti kaksinkertainen ominaisarvo on selvä: Kaikille vektoreille $v \in \mathbb{R}^2$ pätee $Av = \lambda v$ samalla $\lambda \in \mathbb{R}$. Siis matriisi A on diagonaalinen.

(2) Oletetaan, että matriisilla A on algebrallisesti kaksinkertainen ominaisarvo $\lambda \in \mathbb{R}$, jonka geometrinen kertaluku on 1. Olkoon u jokin ominaisvektori, jolle siis pätee $Au = \lambda u$. Olkoon $v \in \mathbb{R}^2$ mikä tahansa vektori siten, että u ja v virittävät koko tason \mathbb{R}^2 . Tällöin $Av = \mu u + \nu v$ joillekin $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$. Jos olisi $\nu \neq \lambda$, niin käyttämällä lineaarisuutta ja sitä, että u on ominaisvektori, saamme

$$A(\mu u + (\nu - \lambda)v) = \lambda\mu u + (\nu - \lambda)(\mu u + \nu v) = \nu(\mu u + (\nu - \lambda)v),$$

joten $\nu \neq \lambda$ olisi ominaisarvo vastoin oletusta. Siispä $Av = \mu u + \lambda v$. Valitaan kannaksi u ja $w = v/\mu$. Tällöin $Au = \lambda u$ ja

$$Aw = \mu u/\mu + \lambda v/\mu = u + \lambda w,$$

joten matriisi on tässä kannassa haluttua muotoa.

(3) Oletetaan, että matriisilla A ei ole reaalisia ominaisarvoja. Tällöin sillä on kaksi kompleksista ominaisarvoa $\alpha \pm i\beta$, missä $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja $\beta \neq 0$. Ajatellaan A kompleksisena matriisina. Tällöin ominaisarvoa $\alpha + i\beta$ vastaa jokin ominaisvektori

$$u = \operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u \in \mathbb{C}^2 - \{0\}.$$

Havaitaan ensin, että $\operatorname{Re} u$ ja $\operatorname{Im} u$ ovat lineaarisesti riippumattomia reaalisisessa vektoriarvuudessa \mathbb{R}^2 : Koska $u \neq 0$, täytyy olla $\operatorname{Re} u \neq 0$ tai $\operatorname{Im} u \neq 0$. Oletetaan, että $\operatorname{Im} u \neq 0$. Jos vektorit $\operatorname{Re} u$ ja $\operatorname{Im} u$ olisivat lineaarisesti riippuvia, niin $\operatorname{Re} u = c \operatorname{Im} u$ jollain $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$(c + i)A \operatorname{Im} u = A((c + i) \operatorname{Im} u) = A(u) = (\alpha + i\beta)u = (\alpha + i\beta)(c + i) \operatorname{Im} u,$$

joten

$$A \operatorname{Im} u = (\alpha + i\beta) \operatorname{Im} u.$$

Tämä on mahdotonta, sillä $A \operatorname{Im} u$ on reaalinen vektori, kun taas $(\alpha + i\beta) \operatorname{Im} u$ ei ole. Tapaus $\operatorname{Re} u \neq 0$ käsitellään vastaavalla tavalla.

Kirjoitetaan vektori Au kahdella tavalla reaali- ja imaginaariosien summaksi: Lineaarisuuden nojalla saamme

$$Au = A(\operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u) = A(\operatorname{Re} u) + iA(\operatorname{Im} u),$$

missä $A(\operatorname{Re} u)$ ja $A(\operatorname{Im} u)$ ovat reaalisia vektoreita. Toisaalta, koska u on ominaisvektori, pätee

$$Au = (\alpha + i\beta)(\operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u) = \alpha \operatorname{Re} u - \beta \operatorname{Im} u + i(\beta \operatorname{Re} u + \alpha \operatorname{Im} u).$$

Vertaamalla reaali- ja imaginaariosia saadaan

$$A \operatorname{Re} u = \alpha \operatorname{Re} u - \beta \operatorname{Im} u$$

ja

$$A \operatorname{Im} u = \beta \operatorname{Re} u + \alpha \operatorname{Im} u.$$

Tämä osoittaa, että avaruuden \mathbb{R}^2 kannassa, jonka muodostavat vektorit $v_1 = \operatorname{Re} u$ ja $v_2 = \operatorname{Im} u$, matriisia A vastaava lineaarikuvaus käyttäytyy halutulla tavalla.

Valitaan kannanvaihtomatriisiksi

$$C = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} u_1 & \operatorname{Im} u_1 \\ \operatorname{Re} u_2 & \operatorname{Im} u_2 \end{pmatrix},$$

jonka sarakkeet ovat vektorien v_1 ja v_2 komponentit. Tällöin C on reaalinen ja se on kääntökykyinen koska edellä totesimme, että sen sarakevektorit ovat lineaarisesti riippumattomat. Lisäksi pätee

$$C^{-1}AC \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C^{-1}Av_1 = C^{-1}(\alpha v_1 - \beta v_2) = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$$

ja

$$C^{-1}AC \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C^{-1}Av_2 = C^{-1}(\beta v_1 + \alpha v_2) = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Lause 3.2 on nyt todistettu. □

3.2 Esimerkki muuttujanvaihtolemmän käytöstä

Muuttujanvaihtolemmän avulla voimme ratkaista lineaarisen differentiaaliyhtälön, jos tunnemme ratkaisun sen kerroinmatriisin jotain konjugaattia vastaavalle differentiaaliyhtälölle.

Esimerkki 3.3. Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat 2 ja -2 . Sen ominaisavaruuksia saadaan ratkaisemalla yhtälöparit $Av = 2v$ ja $Av = -2v$, jotka antavat vastaaville ominaisvaruuksille yhtälöt $v_1 = 3v_2$ ja $v_1 = -v_2$. Matriisi A voidaan diagonalisoida esimerkiksi matriisilla

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

jonka sarakkeet $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ovat ominaisvektoreita. Matriisille $B = C^{-1}AC$ pätee

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C^{-1}AC \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C^{-1}Aw_1 = C^{-1}2w_1 = 2C^{-1}w_1 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ja vastaavasti

$$B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Siis $B = \text{diag}(2, -2)$.

Alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = Bx, \\ x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.3)$$

ratkaisu on Esimerkin 2.1 (1) nojalla $x_{(a,b)}(t) = \begin{pmatrix} ae^{2t} \\ be^{-2t} \end{pmatrix}$. Ratkaisun luonne on melko helppo selvittää: Matriisin B ominaisarvot $\mathbb{R} \times \{0\}$ ja $\{0\} \times \mathbb{R}$ ovat erityisasemassa:

(1) Kaikille $(a, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ pätee $x_{(a,b)}(t) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$,

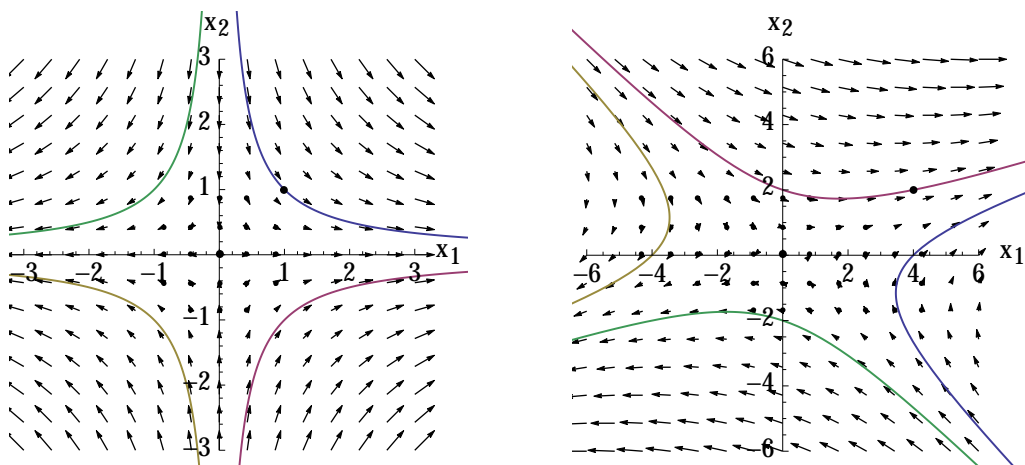
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_{(a,0)}(t)\| = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x_{(a,0)}(t) = 0.$$

(2) Kaikille $(0, b) \in \{0\} \times \mathbb{R}$ pätee $x_{(a,b)}(t) \in \{0\} \times \mathbb{R}$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|x_{(0,b)}(t)\| = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_{(0,b)}(t) = 0.$$

(3) Kaikille $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - ((\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}))$ pätee

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|x_{(a,b)}(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_{(a,b)}(t)\| = \infty.$$



Kuva 3.1: Kaksi satulaa

Proposition 2.20 mukaan, jos $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, niin

$$y_{(a',b')}(t) = Cx_{(a,b)}(t) = \begin{pmatrix} 3ae^{2t} + be^{-2t} \\ ae^{2t} - be^{-2t} \end{pmatrix}$$

on alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{y} = Ax, \\ y(0) = C \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.4)$$

ratkaisu.

Muuttujanvaihtomatriisi C kuvaa suoran $\mathbb{R} \times \{0\}$ matriisiin A ominaisavaruudeksi, joka on vektorin w_1 virittämä aliavaruus $\langle w_1 \rangle$ ja suoran $\{0\} \times \mathbb{R}$ matriisiin A ominaisavaruudeksi $\langle w_2 \rangle$. Alkuarvotehtävän (3.3) ratkaisujen ominaisuuksista seuraa, että kaikille $v \in \langle w_1 \rangle$ pätee $y_v(t) \in \langle w_1 \rangle$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_v(t)\| = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y_v(t) = 0,$$

koska $y_v(t) = Cx_{C^{-1}v}(t)$ ja $C^{-1}v \in \mathbb{R} \times \{0\}$. Samalla päättelyllä nähdään, että kaikille $v \in \langle w_2 \rangle$ pätee $y_v(t) \in \langle w_2 \rangle$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|y_v(t)\| = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_v(t) = 0$$

ja että kaikille $v \in \mathbb{R}^2 - (\langle w_1 \rangle \cup \langle w_2 \rangle)$ pätee $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_v(t)\| = \lim_{t \rightarrow -\infty} \|y_v(t)\| = \infty$.

3.3 Tason lineaaristen autonomisten differentiaaliyhtälöiden tyypit

Ratkaisemme nyt tason lineaariset differentiaaliyhtälöt $\dot{x} = Ax$ kaikissa konjugointilauseen 3.2 antamissa perustilanteissa. Näiden ratkaisujen ja Proposition 2.20 avulla voidaan ratkaista kaikki 2-ulotteiset lineaariset autonomiset differentiaaliyhtälöt. Seuraavassa A on siis reaalinen 2×2 -matriisi:

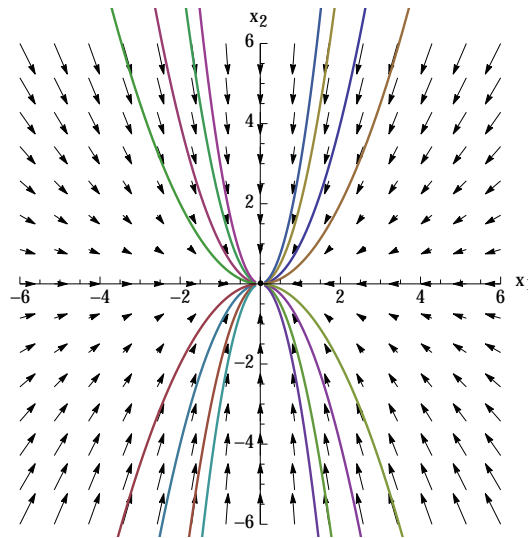
Matriisi A on diagonalisoituva.

(1) Jos matriisilla A on positiivinen ja negatiivinen ominaisarvo, ratkaisut käyttäytyvät kuten esimerkissä 3.3.

Tässä tapauksessa origoa kutsutaan *satulaksi*.

(2) Jos matriisilla A on kaksi negatiivista ominaisarvoa λ_1 ja λ_2 , ratkaisut saadaan samalla tavalla kuin esimerkissä 3.3. Ratkaisujen käyttäytyminen on kuitenkin erilaista: A on konjugaatti diagonaalimatriisiin $B = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ kanssa. Differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Bx$ ratkaisut alkuarvoilla, jotka ovat koordinaattiakseleilla, lähestyvät origoa eksponentiaalisesti akselia pitkin, kun $t \rightarrow \infty$. Muilla alkuarvoilla ratkaisut lähestyvät myös origoa, mutta kuvan mukaisia käyriä pitkin.

Tässä tapauksessa origoa kutsutaan *nieluksi*.



Kuva 3.2: Nielu

(3) Jos matriisilla A on kaksi positiivista ominaisarvoa λ_1 ja λ_2 , ratkaisukäyrät ovat kuten nielulla, mutta ratkaisut liikkuvat vastakkaiseen suuntaan.

Tässä tapauksessa origoa kutsutaan *lähteeksi*.

Kuva on samanlainen kuin nielun tapauksessa mutta vektorikenttä osoittaa jokaisessa pisteessä vastakkaiseen suuntaan ja ratkaisut liikkuvat käyrillä päinvastaiseen suuntaan kuin nielun tapauksessa.

(4) Jos 0 on geometrisesti kaksinkertainen ominaisarvo, niin kaikki ratkaisut ovat vakio-kuvauksia. Jos 0 geometrisesti ja algebrallisesti yksinkertainen, on helppo tarkastaa, että kaikki ratkaisut ovat pysty- tai vaakasuorien parametrisointeja.

Jos matriisi A on diagonaalinen, on helppo tarkastaa, että jokaisella koordinaattiakselien ulkopuolisella alkuarvolla $x_0 = (x_{01}, x_{02})$ saavat differentiaaliyhtälön radat ovat yhtälön

$$\left(\frac{x_1(t)}{x_{01}(t)} \right)^{\lambda_2} = \left(\frac{x_2(t)}{x_{02}(t)} \right)^{\lambda_1} \quad (3.5)$$

ratkaisukäyrän komponentteja joukossa $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Huomaa, että ratkaisukäyrät ovat säteitä, kun matriisilla A on yksi geometrisesti kaksinkertainen ominaisarvo $\lambda_1 = \lambda_2$. Yleisessä tapauksessa radat saadaan kuvaamalla yhtälön (3.5) antama käyrä Proposition 2.20 antamalla lineaarisella muuttujanvaihdoilla.

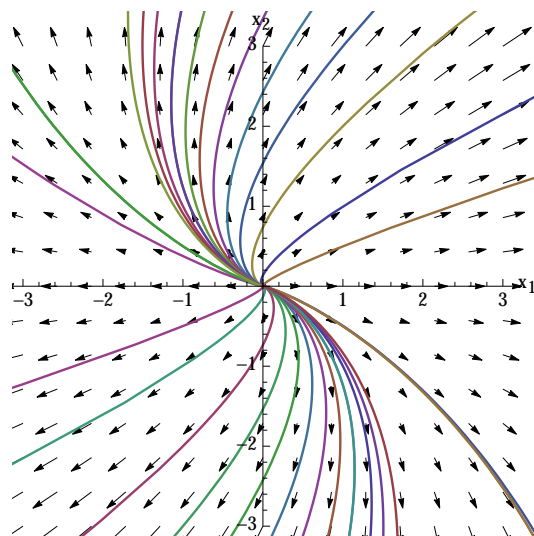
Matriisi A on konjugaatti matriisin $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ kanssa. Harjoitustehtävässä 3.1 tarkastimme, että kuvaus $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$x(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a + tb \\ b \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

on differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} x$$

ratkaisu alkuarvolla $x(0) = (a, b)$.



Kuva 3.3: Surkastunut lähde

Jos matriisilla A on yksi ominaisarvo $\lambda \in \mathbb{R}$, jonka algebrallinen kertaluku on yksi ja geometrinen kertaluku on kaksi, niin Lauseen 3.2 nojalla A on matriisin $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ konjugaatti ja differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Ax$ ratkaisut saadaan Proposition 2.20 ja ratkaisun (3.6) avulla.

Tässä tapauksessa origoa kutsutaan *surkastuneeksi nieluksi*, jos $\lambda < 0$ ja *surkastuneeksi lähteeksi*, jos $\lambda > 0$.

Matriisi A on konjugaatti vinosymmetrisen matriisin $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ kanssa. Lauseen 3.2 mukaan kaikki reaaliset 2×2 -matriisit, jotka eivät ole diagonalisoituvia tai matriisin $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ konjugaatteja jollain $\lambda \in \mathbb{R}$, ovat vinosymmetrisen matriisin $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ konjugaatteja joillain $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Matriisin A ja kaikkien sen kanssa konjugaattien matriisien ominaisarvot ovat $\alpha \pm i\beta$. Esimerkin 2.17 nojalla kuvaus $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$x(t) = e^{\alpha t} \left(a \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix} \right)$$

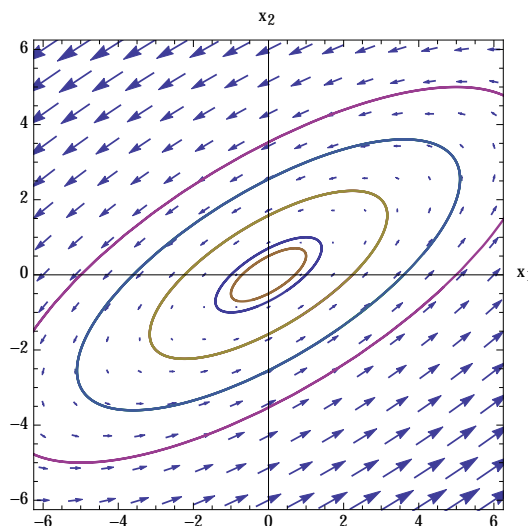
on alkuarvotehtävän $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = (a, b) \end{cases}$, ratkaisu. Ratkaisun käyttäytyminen riippuu ominaisarvon reaali- ja imaginaariosan merkeistä:

(1) Jos $\alpha = 0$, niin ratkaisu on muotoa

$$x(t) = a \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix}$$

Tämä kuvaus parametrisoi origokeskisen ympyrän, jonka säde on $\sqrt{a^2 + b^2}$. Ratkaisun kiertosuunta ympyrällä määräytyy parametrin β merkistä. Yleisessä tilanteessa ratkaisut parametrisoivat ellipsin, joka saadaan kuvaamalla tämä ympyrä kannanvaihtokuvauksella. Kiertosuunta riippuu parametrin β merkistä ja kannanvaihtokuvauksen determinantista.

Tässä tapauksessa origo on *keskus*.



Kuva 3.4: Keskus

(2) Jos $\alpha < 0$, niin kerroin $0 < e^{\alpha t} < 1$ aiheuttaa sen, että ratkaisu lähestyy origoa, kun $t \rightarrow \infty$. Ratkaisukäyrä on spiraali, joka kiertää origoa lineaarisella nopeudella ja lähestyy sitä eksponentiaalisella nopeudella, kun $t \rightarrow \infty$. Vastaavasti $\|x(t)\| \rightarrow \infty$, kun $t \rightarrow -\infty$.

Tässä tapauksessa origo on *spiraalinielu*.

(3) Jos $\alpha > 0$, niin kerroin $e^{\alpha t} > 1$ aiheuttaa sen, että ratkaisun normi kasvaa rajatta, kun $t \rightarrow \infty$. Ratkaisukäyrä on spiraali, joka kiertää origoa lineaarisella nopeudella ja etääntyy siitä eksponentiaalisella nopeudella, kun $t \rightarrow \infty$ ja suppenee origoon, kun $t \rightarrow -\infty$.

Tässä tapauksessa origo on *spiraalilähde*.

Kuvassa 2.2 on esimerkki spiraalinielusta ja spiraalilähteestä.

3.4 Parametrisoituja perheitä

Usein differentiaaliyhtälö on osa *parametrisoitua perhettä* $\dot{x} = f_\alpha(x)$, missä $\alpha \in A$ ja $A \neq \emptyset$ on perheen *parametriavaruus*. Tällöin joukkoa U_α , jossa vektorikenttä f_α on määritelty, kutsutaan usein esimerkiksi *faasiavaruudeksi*. Differentiaaliyhtälön ratkaisut voivat käyttäytyä eri tavalla eri parametrien arvoilla kuten seuraava esimerkki osoittaa.

Esimerkki 3.4 (Vaimeneva värähtelijä). Esimerkissä 1.3 tarkastelimme harmonista värähtelijää, joka kuvaa ideaalisen jousen liikettä 1-ulotteisessa avaruudessa. Oletetaan nyt, että tarkasteltava paino liikkuu pinnalla, jossa siihen vaikuttaa nopeuteen verrannollinen kitka $-b\dot{x}$, missä $b > 0$.

Saadaan systeemi, jota kutsutaan *vaimenevaksi värähtelijäksi*.

Jos $b = 0$, kyseessä on harmoninen värähtelijä. Systeemin aikakehitystä kuvaa toisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0.$$

Valitsemalla $y_1 = x$ ja $y_2 = \dot{x}$ saadaan ekvivalentti lineaarinen yhtälöpari

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -\frac{k}{m}y_1 - \frac{b}{m}y_2, \end{cases} \quad (3.7)$$

jonka kerroinmatriisi on

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix},$$

matriisimerkinnällä siis

$$\dot{y} = Ay = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} y.$$

Tämän yhtälön ratkaisun tyyppi riippuu parametreista m , k ja b . Matriisin A determinantti k/m on aina positiivinen ja sen ominaisarvot ovat

$$\lambda_{\pm} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{\operatorname{tr}^2 A - 4 \det A}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4km}}{2m}.$$

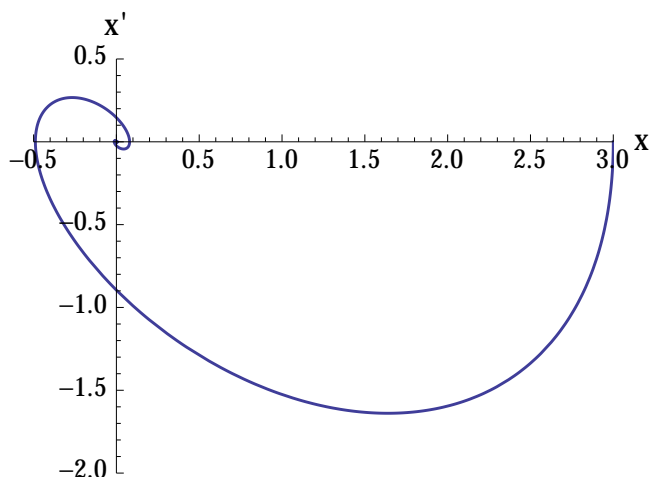
- Jos $b^2 < 4km$, niin matriisilla A on kaksi kompleksista ominaisarvoa, joiden reaaliosa on negatiivinen, joten ratkaisu on spiraalinielu. Jos jousi päästetään liikkeelle alkuarvolla $x(0) \neq 0$, $\dot{x}(0) = 0$, niin se värähtelee tasapainopisteen ympärillä äärettömän monta kertaa.

Tilannetta, jossa $b^2 < 4km$ kutsutaan *alivaimennetuksi värähtelijäksi*.

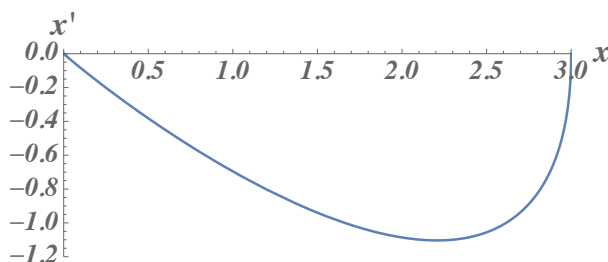
- jos $b^2 = 4km$, niin matriisilla A on yksi algebrallisesti kaksinkertainen negatiivinen ominaisarvo, joka on geometrisesti yksinkertainen. Siis ratkaisu on surkastunut nielu. Jos jousi päästetään liikkeelle alkuarvolla $x(0) \neq 0$, $\dot{x}(0) = 0$, niin se palautuu kohti tasapainopistettä ylittämättä pistettä $x = 0$ kertaakaan. Ratkaisujen tangentit lähestyvät 1-ulotteisen ominaisavaruuden

$$E_{-\frac{b}{2m}} = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : y_2 = -\frac{b}{2m}y_1 \right\}$$

suuntaa kun $t \rightarrow +\infty$.



Kuva 3.5: Alivaimennettu värähtelijä parametreilla $m = k = b = 1$.



Kuva 3.6: Kriittisesti vaimennettu värähtelijä parametreilla $m = k = 1$, $b = 2$. Näillä parametreilla origo on surkastunut nielu.

Tilannetta, jossa $b^2 = 4km$ kutsutaan *kriittisesti vaimennetuksi* värähtelijäksi.

Tällainen tilanne on epävakaata parametrien suhteen: pienikin muutos parametreissa voi muuttaa värähtelijän luonnetta, kun yhtälö muuttuu epäyhtälöksi.

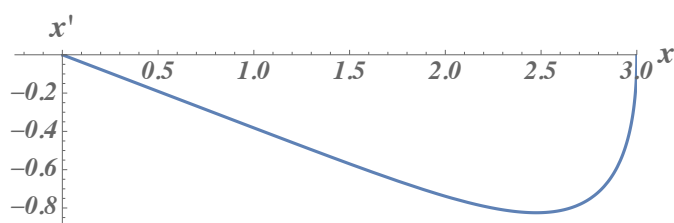
- jos $b^2 > 4km$, niin matriisilla A on kaksi eri negatiivista ominaisarvoa, joten ratkaisu on nielu. Jos jousi päästetään liikkeelle alkuarvolla $x(0) \neq 0$, $\dot{x}(0) = 0$, niin se palautuu kohti tasapainopistettä ylittämättä pistettä $x = 0$ kertaakaan.

Tilannetta, jossa $b^2 > 4km$ kutsutaan *ylivaimennetuksi* värähtelijäksi.

Harjoitustehtäviä

3.1. Osoita, että kuvaus $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$x(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a + tb \\ b \end{pmatrix}$$



Kuva 3.7: Ylivaimennettu värähtelijä parametreilla $m = k = 1$, $b = 3$. Näillä parametreilla origo on nielu.

on differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} x$$

ratkaisu alkuarvolla $x(0) = (a, b)$.

- (1) Miten ratkaisu käyttäytyy, kun λ on positiivinen tai negatiivinen?
- (2) Hahmottele ratkaisukäyriä muutamilla alkuarvon (a, b) eri arvoilla, kun $\lambda = -2$.
- (3) Siinä tapauksessa, että $x(t) \rightarrow 0$, kun $t \rightarrow \infty$, osoita, että polun x tangenttivektori lähestyy vaakasuoraa suuntaa.¹

Tehtävät 3.2– 3.6: Miten differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Ax$ ratkaisut käyttäytyvät? Havainnollista kuvalla.

3.2. $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

3.4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.5. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$.

3.6. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$.

3.7. Olkoon

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Määritä differentiaaliyhtälön $\dot{y} = Ay$ tyyppi kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$. Kuvaile, mitä tapahtuu niissä parametriavaruuden \mathbb{R} pisteissä, joissa tyyppi vaihtuu. Havainnollista kuvilla.

3.8. Miten alkuarvotehtävän (3.7) ratkaisut käyttäytyvät, jos $b < 0$ ja $m, k > 0$?

¹Tangenttivektorin raja-arvo on 0, mutta mistä suunnasta se lähestyy nollaa?

Luku 4

Lineaariset autonomiset alkuarvotekävät korkeammassa ulottuvuudessa

Tässä luvussa yleistämme luvun 3 tarkastelun korkeampiin ulottuvuuksiin. Tutustumme Jordanin kanoniseen muotoon, jollaiseen jokainen neliömatriisi voidaan konjugoida. Jordanin kanonisen muoto ja muuttujanvaihtolemma auttavat lineaarisen autonomisen differentiaaliyhtälön ratkaisujen luonteen selvittämisessä.

4.1 Yleistetty ominaisavaruus

Olkoon $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$. Jos lineaarisesti riippumattomat vektorit $v_1, \dots, v_K \in \mathbb{K}^n$ toteuttavat

- (1) $(A - \lambda I_n)v_1 = 0$,
- (2) $(A - \lambda I_n)v_j = v_{j-1}$ kaikilla $j = 2, \dots, n$ ja
- (3) yhtälöllä $(A - \lambda I_n)x = v_n$ ei ole ratkaisua,

niin ne muodostavat *Jordanin^a ketjun*.

^aCamille Jordan oli ranskalainen matemaatikko. Gaussin ja Jordanin menetelmää kehittänyt Wilhelm Jordan oli saksalainen geodesian professori.

Jordanin ketjun määritelmän ehto (1) on, että v_1 on matriisin A ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori ja ehto (3) on, että v_n ei ole matriisia $A - \lambda$ vastaavan lineaarikuvauksen kuvassa.

Propositio 4.1. *Olkoon $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ ja olkoon λ matriisin A ominaisarvo. Oletetaan, että vektorit v_1, \dots, v_n muodostavat Jordanin ketjun matriisille $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ ja ominaisarvolle λ .*

(1) Joukko $\{v_1, \dots, v_n\}$ on lineaarisesti riippumaton.

(2) Olkoon $K = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$. Tällöin

$$K^{-1}AK = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Todistus. (1) Olkoot $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ siten, että $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$. Jordanin ketjun määritelmän nojalla

$$0 = (A - \lambda I_n) \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i (A - \lambda I_n) v_i = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i$$

Toistamalla tätä operatiota saadaan yhtälöketju

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \dots = \alpha_2 v_2 + \alpha_1 v_1 = \alpha_1 v_1 = 0,$$

josta saadaan oikealta päin purkamalla $0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$. Siis vektorijoukko $\{v_1, \dots, v_n\}$ on lineaarisesti riippumaton.

(2) Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 4.2. Kolmiomatriisin determinantti on sen diagonaalialkioiden tulo, joten karakteristisen polynomin avulla näemme heti, että yläkolmiomatriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ainoa ominaisarvo on 1. Ominaisvektorit määrittävä yhtälöryhmä koostuu kahdesta yhtälöstä

$$\begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

joten esimerkiksi vektorit $v_1 = (1, 0, 0, 0)$ ja $w_1 = (0, 1, 1, 0)$ virittävät 2-ulotteisen ominaisavaruuden E_1 . Ominaisarvon 1 algebrallinen kertaluku on 4 ja sen geometrinen kertaluku on 2.

Selvitetään ainoaa ominaisarvoa 1 vastaavan yleistetyn ominaisavaruuden rakenne tarkemmin: Yhtälö $(A - I_4)x = v_1$ on yhtäpitävä yhtälöparin

$$\begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

Sillä on 2-ulotteinen ratkaisuvävy, josta voimme valita vektorin $v_2 = (0, 1, 0, 0)$, joka on lineaarisesti riippumaton vektorin v_1 kanssa. Sen sijaan yhtälö $(A - I_4)x = v_2$ on

yhtäpitävä yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_4 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

kanssa ja ilmeisesti sillä ei ole ratkaisua.

Vastaavasti yhtälöllä $(A - I_4)x = w_1$ on 2-ulotteinen ratkaisuavaruus, josta voimme valita vektorin $w_2 = (0, 0, 0, 1)$, joka on lineaarisesti riippumaton vektorin w_1 kanssa. Yhtälöllä $(A - I_4)x = w_2$ ei ole ratkaisua. Vektorit v_1, v_2 ja w_1, w_2 muodostavat kaksi Jordanin ketjua ominaisarvolle 1: $(A - I_4)v_2 = v_1$, $Av_1 = v_1$ ja $(A - I_4)w_2 = w_1$, $Aw_1 = w_1$.

Olkoon $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Jos $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$, λ on sen ominaisarvo ja $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, niin vektorialiavaruus

$$E_\lambda^k(A) = \ker(A - \lambda)^k$$

on ominaisarvoa λ vastaava *kertaluvun k yleistetty ominaisavaruus*. Aliavaruus

$$\widehat{E}_\lambda(A) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_\lambda^k(A)$$

on ominaisarvoa λ vastaava *yleistetty ominaisavaruus*.

Jos $F: X \rightarrow X$ on kuvaus, niin osajoukko $Y \subset X$ on *F-invariantti*, jos $F(Y) \subset Y$.

Propositio 4.3. *Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ ja olkoon λ on sen ominaisarvo. Yleistetty ominaisavaruus $\widehat{E}_\lambda(A)$ on A-invariantti¹ aliavaruus.*

Todistus. Koska $A0 = 0$, niin $E_\lambda^k(A) \subset E_\lambda^{k+1}(A)$ kaikilla $k \in \mathbb{N} - 0$. Siis $E_\lambda^k(A) \subset E_\lambda^\ell(A)$ kaikilla $k \leq \ell$. Siis aliavaruudet $E_\lambda^k(A) \subset \mathbb{R}^n$ ovat sisäkkäisiä ja jollain $1 \leq \ell \leq n$ pätee $\widehat{E}_\lambda(A) = E_\lambda^\ell(A)$.

Loppuosa väitteestä seuraa Harjoitustehtävästä 4.2. □

Lemma 4.4. *Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ ja olkoon $\lambda \in \mathbb{K}$ on sen ominaisarvo. Jos vektorit v_1, \dots, v_k muodostavat Jordanin ketjun matriisille $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ ja sen ominaisarvolle λ , niin $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ on yleistetyn ominaisavaruuden $\widehat{E}_\lambda(A)$ aliavaruus.*

Todistus. Määritelmän nojalla

$$(A - \lambda I)^\ell v_\ell = (A - \lambda I)(A - \lambda I)^{\ell-1} v_\ell = (A - \lambda I)v_1 = 0,$$

joten $v_\ell \in \widehat{E}_\lambda(A)$ kaikilla $1 \leq \ell \leq k$. Koska $\widehat{E}_\lambda(A)$ on Proposition 4.3 nojalla aliavaruus, saadaan $\langle v_1, \dots, v_k \rangle \subset \widehat{E}_\lambda(A)$. □

¹Siis invariantti lineaarikuvauksella $x \mapsto Ax$.

4.2 Blokkidiagonaalimatriisit

Jos matriisi A on kirjoitettu alimatriisien B_{ij} avulla muodossa

$$A = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nm} \end{pmatrix},$$

niin A on *blokkimatriisi*.

Jos B_1, \dots, B_N ovat $n_1 \times n_1, \dots, n_N \times n_N$ -neliomatriiseja ja $\sum_{i=1}^N n_i = n$, niin matriiseista B_1, \dots, B_N muodostettu $n \times n$ -matriisi

$$\text{diag}(B_1, \dots, B_N) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & B_N \end{pmatrix},$$

jossa loput $n^2 - \sum_{i=1}^N n_i^2$ kerrointa ovat nollia, on *blokkidiagonaalimatriisi*, jonka blokkeja ovat matriisit B_i . Blokin B_i koko on n_i .

Esimerkki 4.5. Esimerkin 4.2 matriisia A vastaavalla lineaarikuvauksella on kaksi invarianttia 2-ulotteista aliavaruutta $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ ja $W = \langle w_1, w_2 \rangle$. Lineaarikuvauksen $L|_V$ matriisi kannan v_1, v_2 ja lineaarikuvauksen $L|_W$ matriisi kannan w_1, w_2 suhteen on sama matriisi $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Asetetaan

$$C = (v_1 \ v_2 \ w_1 \ w_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Tällöin

$$B = CAC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Lemma 4.6. $\exp \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_N) = \text{diag}(\exp B_1, \exp B_2, \dots, \exp B_N)$.

Todistus. On helppo tarkastaa, että $\text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_N)^k = \text{diag}(B_1^k, B_2^k, \dots, B_N^k)$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, mistä väite seuraa. \square

Esimerkki 4.7. Olkoot A ja B ja C kuten Esimerkeissä 4.2 ja 4.5. Alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = Bx \\ x(0) = (a, b) \end{cases}$$

ratkaisu on Lauseen 2.15 ja Lemman 4.6 nojalla

$$x(t) = e^t \begin{pmatrix} a + bt \\ b \\ c + dt \\ d \end{pmatrix}.$$

Differentiaaliyhtälön $\dot{y} = Ay$ ratkaisut ovat Proposition 2.20 nojalla funktiot $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$,

$$y(t) = Cx(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + bt \\ b \\ c + dt \\ d \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} a + bt \\ b + c + dt \\ c + dt \\ d \end{pmatrix}.$$

Ratkaisu toteuttaa ehdon $y(0) = (a, b + c, c, d)$, mikä pitää ottaa huomioon alkuarvotettä ratkaistaessa.

4.3 Reaalinen Jordanin kanoninen muoto

Blokkidiagonaalimatriisi on (reaalinen) Jordanin kanoninen muoto, jos jokainen blokki on joko muotoa

$$(\lambda_i) \quad \text{tai} \quad \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

jollain $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tai muotoa

$$C_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix} \quad \text{tai} \quad \begin{pmatrix} C_{\lambda_i} & I_2 & & & \\ & C_{\lambda_i} & I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & I_2 \\ & & & & C_{\lambda_i} \end{pmatrix}$$

jollain $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

Kompleksisessa lineaarialgebrassa tilanne on hieman yksinkertaisempi, sillä kompleksisillekin ominaisarvoille voidaan määritellä yleistetyt ominaisavaruudet eikä matriiseja C_λ tarvita. Koska sovellamme kanonista muotoa reaalisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen, käytämme reaalista Jordanin kanonista muotoa, joka on reaalinen matriisi.

Lause 4.8 (Jordanin hajotelma). *Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Olkoot $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ matriisin A reaaliset ja $\lambda_{r+1}, \bar{\lambda}_{r+1}, \dots, \lambda_M, \bar{\lambda}_M$ sen kompleksiset ominaisarvot. Tällöin*

(1) *Vektoriavaruudella \mathbb{C}^n on yleistetyistä ominaisvektoreista koostuva kanta*

$$v_1, \dots, v_k, w_1, \bar{w}_1, \dots, w_m, \bar{w}_m \in \mathbb{C}^n$$

jossa vektorit v_1, \dots, v_k ovat reaalisia ja vektorit w_1, \dots, w_m eivät ole reaalisia.

(2) Olkoon

$$K = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_k & \operatorname{Re} w_1 & \operatorname{Im} w_1 & \cdots & \operatorname{Re} w_m & \operatorname{Im} w_m \end{pmatrix}.$$

Tällöin $K^{-1}AK$ on reaallinen Jordanin kanonisen muoto.

(2) Olkoot a_i ja g_i ominaisarvon λ_i algebrallinen ja geometrinen kertaluku. Reaalista ominaisarvoa λ_i vastaa g_i blokkia, joiden kokojen summa on a_i . Kompleksista ominaisarvoparia $\lambda_i, \bar{\lambda}_i$ vastaa g_i blokkia, joiden kokojen summa on $2a_i$.

Todistus. Katso [HJ, Thm. 3.4.5]. □

Reaalisen Jordanin kanonisen muodon ja Proposition 2.20 avulla moniulotteiset lineaariset vakiokertoimiset autonomiset differentiaaliyhtälöt voidaan palauttaa helpommin käsiteltävään muotoon.

Esimerkki 4.9. Olkoon A reaallinen 3×3 -matriisi, jolla on yksi kompleksinen ominaisarvopari $\lambda, \bar{\lambda} = \pm i$ ja yksi reaallinen ominaisarvo -1 . Tällöin A on Lauseen 4.8 mukaan matriisiin

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

konjugaatti. Matriisi B on blokkidiagonaalimuodossa, joten sitä vastaava differentiaaliyhtälö $\dot{x} = Bx$ on helppo ratkaista Lemman 4.6 ja Luvun 3.3 tulosten avulla. Ensimmäiset kaksi koordinaattia muodostavat oman 2-ulotteisen systeeminsä: Kuvaus

$$x(t) = \begin{pmatrix} a \cos t + b \sin t \\ -a \sin t + b \cos t \\ ce^{-t} \end{pmatrix}$$

on ratkaisu alkuarvolla $x(0) = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Jos $c = 0$, niin ratkaisu pysyy x_1x_2 -tasossa ja on $\sqrt{a^2 + b^2}$ -säteisen ympyrän parametrisointi kuten esimerkissä 1.3. Jos taas $a = b = 0$, niin ratkaisu pysyy x_3 -akselilla ja lähestyy origoa eksponentiaalisella vauhdilla. Yleisen tilanteen ratkaisukäyrä kulkee sylinterillä

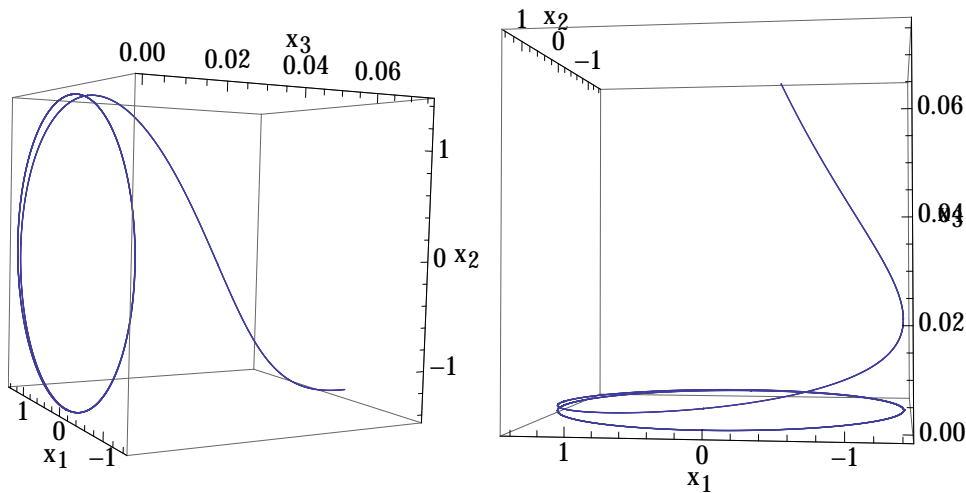
$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = a^2 + b^2\}$$

ja kasautuu kohti x_1x_2 -tason ympyrää

$$\{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = a^2 + b^2\}.$$

Alkuperäisen differentiaaliyhtälön ratkaisut saadaan Proposition 2.20 avulla. Jos $A = CBC^{-1}$ ja x on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Bx$ ratkaisu, niin $y = Cx$ on differentiaaliyhtälön $\dot{y} = Ay$ ratkaisu. Jos alkuarvo on tasossa $T = C(\mathbb{R}^2 \times \{0\})$, jonka virittävät kompleksisia ominaisarvoja vastaavien ominaisvektorien reaali- ja imaginaariosista muodostetut vektorit, niin rata on tasoon T sisältyvä ellipsi, muussa tapauksessa radat kasautuvat kohti tällaisia ellipsejä tason T komplementista.

Kun lineaarinen autonominen differentiaaliyhtälö $\dot{y} = Ay$ konjugoidaan muotoon $\dot{x} = Bx$, missä $B = C^{-1}AC$ on Jordanin kanonisessa muodossa, niin alkuperäinen differentiaaliyhtälö korvataan ekvivalentilla yhtälöllä, jonka ratkaiseminen on helppoa:



Kuva 4.1: Kaksi eri näkymää differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Bx$ ratkaisusta alkuarvolla $x(0) = (1, 1, 1)$, kun B on kaavan (4.1) matriisi.

Jos $B = \text{diag}(B_1, \dots, B_M)$, niin differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Bx$ ratkaisu saadaan yhdistämällä kutakin blokkia vastaavien differentiaaliyhtälöiden $\dot{x}^{(j)} = B_j x^{(j)}$ ratkaisut $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(M)})$. Jos B_j on reaalista ominaisarvoa vastaava 1×1 -blokki tai kompleksista ominaisarvoa vastaava 2×2 -blokki, niin ratkaisu $x^{(j)}$ tiedetään aiemman perusteella.

Propositio 4.10. (1) Reaalista ominaisarvoa λ vastaavalle $n \times n$ -blokille pätee

$$\exp t \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & t^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & 1 & t & \dots & t^{n-2}/(n-2)! \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Kompleksista ominaisarvoa $\lambda = \alpha + i\beta$ vastaavalle $2n \times 2n$ -blokille pätee

$$\exp t \begin{pmatrix} \Lambda_\lambda & I_2 & & & \\ & \Lambda_\lambda & I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & I_2 \\ & & & & \Lambda_\lambda \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} R_\lambda & R_\lambda t & R_\lambda t^2/2 & \dots & R_\lambda t^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & R_\lambda & R_\lambda t & \dots & R_\lambda t^{n-2}/(n-2)! \\ 0 & 0 & R_\lambda & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & R_\lambda t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R_\lambda \end{pmatrix},$$

kun

$$\Lambda_\lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad R_\lambda = \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

Todistus. (1)²Olkoon $E^{ab} = (\delta_{ai}\delta_{bj})_{i,j=1}^n$ on matriisi, jonka ainoa nollasta poikkeava ker-

²Tapaukset $n \in \{2, 3\}$ käsiteltiin harjoitustehtävässä 2.6.

roin on kohdassa ab . Näemme, että

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_n + N,$$

missä $N = \sum_{k=1}^{n-1} E^{k,k+1}$. Väite seuraa induktiolla tämän esityksen ja Lemman 2.16 nojalla kuten Harjoitustehtävässä 2.7. Yksityiskohdat jäävät Harjoitustehtäväksi 4.9.

(2) Harjoitustehtävä 4.10. □

Esimerkki 4.11 (Kytkeyt harmoniset värähtelijät). Olkoot $k, K > 0$. Olkoot kaksi yksikkömassaista kappaletta kitkattomalla tasolla kytketty kuten kuvassa vastakkaisiin seiniin ja toisiinsa jousilla siten, että kappaleen seinään kytkävän jousen jousivakio on $k > 0$ ja kappaleet toisiinsa kytkävän jousen jousivakio on $K > 0$. Olkoon x_1 vasemman kappaleen poikkeama systeemin tasapainotilasta oikealle ja olkoon x_2 oikean kappaleen poikkeama systeemin tasapainotilasta oikealle. Olkoon $x_3 = \dot{x}_1$ ja $x_4 = \dot{x}_2$. Tämän systeemin liikettä kuvaa lineaarinen differentiaaliyhtälö $\dot{x} = Ax$, missä

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(k+K) & K & 0 & 0 \\ K & -(k+K) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matriisin A karakteristinen polynomi on

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^4 + 2(k+K)\lambda^2 + k(k+2K)$$

ja sen ominaisarvot ovat $\pm i\sqrt{k}$ ja $\pm i\sqrt{k+2K}$. Vastaavat kompleksiset ominaisvektorit ovat

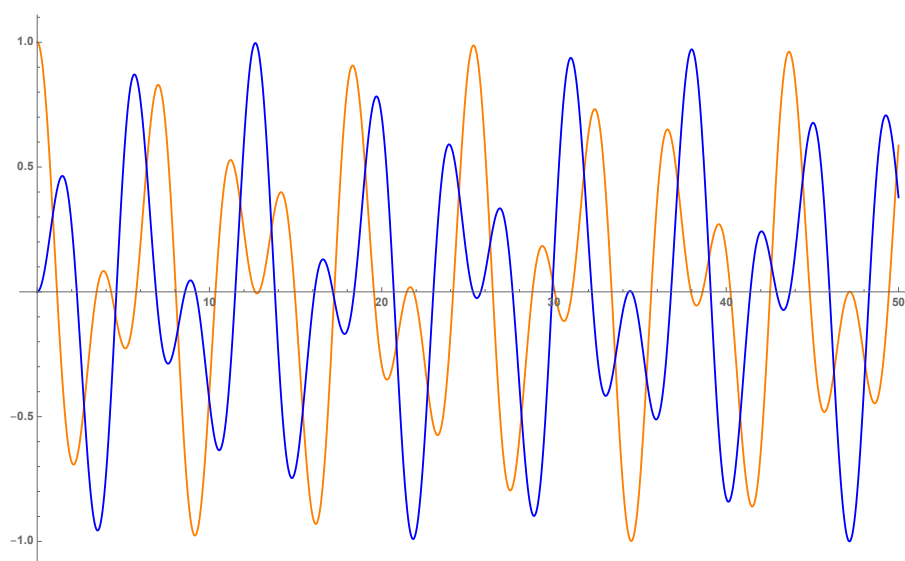
$$w_1, \bar{w}_1 = \left(\mp \frac{i}{\sqrt{k}}, \mp \frac{i}{\sqrt{k}}, 1, 1 \right) \quad \text{ja} \quad w_2, \bar{w}_2 = \left(\mp \frac{i}{\sqrt{k+2K}}, \pm \frac{i}{\sqrt{k+2K}}, 1, -1 \right).$$

Lauseen 4.8 nojalla kannanvaihto matriisilla

$$C = \left(\operatorname{Re} w_1, \operatorname{Im} w_1, \operatorname{Re} w_2, \operatorname{Im} w_2 \right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{k}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{k+2K}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{k}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{k+2K}} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

antaa blokkidiagonaalimatriisin

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{k} & 0 & 0 \\ -\sqrt{k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{k+2K} \\ 0 & 0 & -\sqrt{k+2K} & 0 \end{pmatrix}.$$



Kuva 4.2: Kytkeyn värähtelijöiden kappaleiden paikat ajan funktiona alkuarvolla $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (1, 0, 0, 0)$, kun $k = K = 1$.

Proposition 4.10 nojalla Alkuarvotettävän

$$\begin{cases} \dot{y} = By \\ y(0) = b \end{cases} \quad (4.2)$$

ratkaisu on

$$y_b(t) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{k}t & \sin \sqrt{k}t & 0 & 0 \\ -\sin \sqrt{k}t & \cos \sqrt{k}t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \sqrt{k+2K}t & \sin \sqrt{k+2K}t \\ 0 & 0 & -\sin \sqrt{k+2K}t & \cos \sqrt{k+2K}t \end{pmatrix} b. \quad (4.3)$$

Proposition 2.20 nojalla alkuarvotettävän $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = a \end{cases}$ ratkaisu on $x_a(t) = Cy_{C^{-1}a}(t)$.

Harjoitustehtäviä

4.1. Todista Propositio 4.1(2).

4.2. Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ ja olkoon λ on sen ominaisarvo. Olkoon $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Osoita, että $E_\lambda^k(A)$ on A -invariantti aliavaruus.³

4.3. Määritä matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

³Miten matriisit A ja $(A - \lambda I_n)$ suhtautuvat toisiinsa?

reaalinen Jordanin kanoninen muoto.

4.4. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ratkaise alkuarvotehtävä $\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(0) = (2, 0, 1) \end{cases}$.

4.5. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Määritä alkuarvotehtävän $\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(0) = (1, 0, 1) \end{cases}$ ratkaisu.

4.6. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kuvaile differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Ax$ ratkaisujen käyttäytymistä.

4.7. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$ ja olkoon

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ -1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kuvaile differentiaaliyhtälön $\dot{x} = Ax$ ratkaisujen käyttäytyminen kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$. Piirrä kuvia.

4.8. Laske

$$\exp \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

4.9. Todista Propositio 4.10 (1).

4.10. Todista Propositio 4.10 (2).

4.11. Ratkaise Esimerkissä 4.11 käsitelty kytkettyjen harmonisten värähtelijöiden alkuarvotehtävä $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = a \end{cases}$ alkuarvoilla $a = (r, r, 0, 0)$ ja $a = (r, -r, 0, 0)$, kun $r \in \mathbb{R}$. Miten kytketyt massat liikkuvat näissä tilanteissa?

Luku 5

Epälineaariset differentiaaliyhtälöt

Tässä luvussa tarkastelemme epälineaaristen differentiaaliyhtälöiden teoriaa. Todistamme olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen ja tarkastelemme ratkaisujen riippuvuutta alkuarvosta. Todistuksissa käytetään metrinen avaruuksien kieltä ja eräitä tärkeitä metrinen avaruuksien teorian tuloksia kuten Banachin kiintopistelausetta. Täydellisyyden vuoksi näiden tulosten metrinen avaruuksien teoriaa ja tarvittavien tulosten todistukset on esitetty liitteessä C.

Monissa sovelluksissa päädytään tarkastelemaan epälineaarisia differentiaaliyhtälöitä:

Esimerkki 5.1 (Epälineaarinen heiluri). Jäykällä varrella akseliin kiinnitetyn heilurin liikettä kuvaa differentiaaliyhtälö

$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \sin \theta = 0,$$

missä $b \geq 0$ on kitkakerroin. Muutetaan tämä toisen asteen differentiaaliyhtälö yhtälöpariksi valitsemalla toiseksi muuttujaksi $v = \dot{\theta}$, jolloin saadaan epälineaarinen differentiaaliyhtälö

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\sin \theta - bv \end{cases} \quad (5.1)$$

5.1 Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause

Todistamme nyt Picardin ja Lindelöfin klassisen lauseen alkuarvot tehtävien ratkaisujen olemassaolosta ja yksikäsitteisyydestä. Klassinen todistus saa miellyttävän rakenteen, kun käytämme Liitteessä C käsiteltyjä metrinen avaruuksien käsitteitä ja tuloksia.

Lause 5.2 (OY-lause). *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-jatkuva vektorikenttä. Jokaisella $a \in \mathbb{R}$ ja $b \in U$ on $\delta > 0$ siten, että alkuarvot tehtävällä*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(a) = b \end{cases} \quad (5.2)$$

on välillä $]a - \delta, a + \delta[$ määritelty yksikäsitteinen ratkaisu.

Todistus. Olkoon $R > 0$ siten, että $\overline{B}(b, R) \subset U$. Olkoon $L > 0$ siten, että f on L -Lipschitz-jatkuva. Olkoon

$$M = \max_{x \in \overline{B}(b, R)} \|f(x)\|.$$

Olkoon $0 < \delta < \min(\frac{1}{L}, \frac{R}{M})$.¹

Picardin operaattori on kuvaus $\mathcal{P}_{a,b}: C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{P}_{a,b}(\phi)(t) = b + \int_a^t f(\phi(s))ds.$$

Täydellisen normiavaruuden² $(C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\max})$ suljettu pallo

$$\mathcal{C} = \{\phi \in C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n) : \|\phi - b\|_{\max} \leq M\delta\}$$

on täydellinen metrinen avaruus. Tekemillämme valinnoilla pätee kaikille $\phi \in \mathcal{C}$

$$\|\mathcal{P}_{a,b}(\phi) - b\|_{\max} = \max_{|t-a| \leq \delta} \left\| \int_a^t f(\phi(s))ds \right\| \leq \int_a^t \max_{|u-a| \leq \delta} \|f(\phi(u))\| ds \leq M\delta < R,$$

joten $\mathcal{P}_{a,b}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$. Voimme siis iteroida kuvausta $\mathcal{P}_{a,b}|_{\mathcal{C}}$. Teemme kaksi oleellista havaintoa Picardin operaattorista:

Lemma 5.3. *Kuvaus $\phi: [a - \delta, a + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on alkuarvottehtävän (5.2) ratkaisu välillä $]a - \delta, a + \delta[$, jos ja vain jos se on Picardin operaattorin $\mathcal{P}_{a,b}$ kiintopiste.*

Todistus. Kuvaus ϕ on Picardin operaattorin kiintopiste, jos ja vain jos

$$\phi(t) = b + \int_a^t f(\phi(s))ds. \quad (5.3)$$

Jos ϕ on kiintopiste, se toteuttaa siis selvästi alkuehdon $\phi(a) = b$. Lisäksi kuvaus ϕ on differentioituva ja toteuttaa ehdon $\dot{\phi}(t) = f(\phi(t))$ Proposition 1.2 nojalla.

Toisaalta, jos ϕ on alkuarvottehtävän (5.2) ratkaisu välillä $]a - \delta, a + \delta[$, niin kaikilla $t \in]a - \delta, a + \delta[$ pätee

$$\mathcal{P}_{a,b}(\phi)(t) = b + \int_a^t f(\phi(s))ds = b + \int_a^t \dot{\phi}(s)ds = \phi(t),$$

joten ϕ on kiintopiste. □

Lemma 5.4. *Picardin kuvaus on kutistava.*

Todistus. Olkoot $\phi, \psi \in \mathcal{C}$. Tällöin käyttämällä sitä, että f on L -Lipschitz saamme arvon

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_{a,b}(\phi) - \mathcal{P}_{a,b}(\psi)\|_{\max} &= \max_{|t-a| \leq \delta} \left\| \int_a^t (f(\phi(s)) - f(\psi(s)))ds \right\| \\ &\leq \delta \max_{|s-a| \leq \delta} \|f(\phi(s)) - f(\psi(s))\| \leq \delta L \|\phi - \psi\|_{\max} < \|\phi - \psi\|_{\max} \end{aligned}$$

kuten väitettiin. □

¹Ehtoa $\delta < \frac{R}{M}$ tarvitaan ratkaisujen hallitsemiseen. Alla näemme, että ratkaisut pysyvät joukossa U . Tätä ehtoa ei tarvita, jos $U = \mathbb{R}^n$. Ehtoa $\delta < \frac{1}{L}$ käytetään Lemmassa 5.4.

²Katso Esimerkki C.2.

Lemman 5.4 ja Lauseen C.3 nojalla Picardin operaattorilla on täsmälleen yksi kiintopiste. Lemman 5.3 mukaan tämä kiintopiste on tarkasteltavan alkuarvotehtävän (5.2) ainoa ratkaisu välillä $]a - \delta, a + \delta[$. \square

Seuraus 5.5 (Autonominen OY-lause). *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -kuvaus. Jokaisella $a \in \mathbb{R}$ ja $x_0 \in U$ on $\delta > 0$ siten, että alkuarvotehtävällä*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(a) = b \end{cases} \quad (5.4)$$

on välillä $]a - \delta, a + \delta[$ määritelty yksikäsitteinen ratkaisu.

Todistus. Kun f on jatkuvasti differentioituva ja $\bar{B}(b, R) \subset U$, niin $f|_{\bar{B}(b, R)}$ on L -Lipschitz-jatkuva jollain $L > 0$. Väite seuraa siis Lauseesta 5.2. \square

Esimerkki 5.6. Vaikka tarkastelemmekin lähinnä korkeampiulotteisia tilanteita, on hyvä muistaa, miten Picardin iteraatio antaa alkuarvotehtävän $\dot{y} = y$, $y(0) = 1$ ratkaisun, joka on tunnetusti eksponenttifunktio. Valitaan ensimmäiseksi arvaukseksi vakiofunktio $y_0(t) = 1$, jolla on oikea alkuarvo. Tällöin

$$y_1(t) = \mathcal{P}(y_0)(t) = 1 + \int_0^t ds = 1 + t,$$

$$y_2(t) = \mathcal{P}(y_1)(t) = 1 + \int_0^t (1 + s)ds = 1 + t + \frac{t^2}{2},$$

ja induktiolla

$$y_k(t) = \mathcal{P}(y_{k-1})(t) = \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!}.$$

Kuvausten y_k , $k \in \mathbb{N}$, muodostama jono suppenee kohti eksponenttifunktiota tasaisesti kompakteilla väleillä.

5.2 Jatkuva riippuvuus alkuarvosta

Osoitamme seuraavaksi, että toisiaan riittävän lähellä olevia alkuarvoja vastaavat ratkaisut pysyvät jonkin aikaa lähellä toisiaan. Merkitään jatkossa alkuarvotehtävän $\dot{x} = f(x)$, $f(a) = b$ ratkaisua $x_{a,b}$. Tällöin siis ajattelemme, että vektorikenttä $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ on kiinnitetty ja tarkastelemme ratkaisujen riippuvuutta parametreista $a \in \mathbb{R}$ ja $b \in U$.

Propositio 5.7. *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ K -Lipschitz-jatkuva. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on $\delta > 0$ ja $\eta > 0$, joille*

$$\|x_{a,b} - x_{a,b'}\| = \max_{|t-a| \leq \delta} \|x_{a,b}(t) - x_{a,b'}(t)\| < \varepsilon,$$

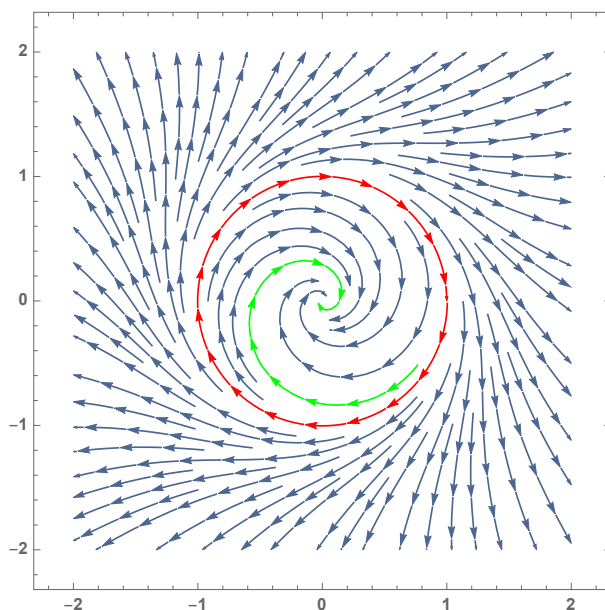
jos $\|b - b'\| < \eta$.

Todistus. Valitaan $R > 0$ ja $\delta > 0$ kuten Lauseen 5.2 todistuksessa. Valitaan $\eta > 0$ siten, että $\bar{B}(b', R) \subset U$ kaikilla $b' \in \bar{B}(b, \eta)$. Tällöin differentiaaliyhtälön ratkaisu alkuarvolla b' on määritelty koko välillä $[a - \delta, a + \delta]$. Väite seuraa Propositioista C.4 valitsemalla $X = C^0([a - \delta, a + \delta], \mathbb{R}^n)$, $Y = \mathbb{R}^n$ ja $F: X \times Y \rightarrow X$, $F(\phi, c) = \mathcal{P}_{a,c}(\phi)$. \square

Esimerkki 5.8. Differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{x_1}{2} + x_2 + \frac{x_1^3 + x_2^2 x_1}{2} \\ -x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{x_2^3 + x_1^2 x_2}{2} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

ratkaisut alkuarvoilla $x_0 = (0.9, 0)$ ja $x_1 = (0.8, 0)$ käyttäytyvät samaan tapaan (itse asiassa kaikilla $t \in \mathbb{R}$), kun taas alkuarvolla $x_2 = (1.1, 0)$ käyttäytyminen on erilaista kuin alkuarvoilla x_0 ja x_1 , kun t kasvaa.



Kuva 5.1: Esimerkin 5.8 ratoja.

Epälineaarinen differentiaaliyhtälö (5.5) voidaan ratkaista vaihtamalla napakoordinaatteihin: Yhtälöiden (B.1) avulla saadaan

$$\begin{aligned} \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} &= -\frac{x_1}{2} + x_2 + \frac{x_1^3 + x_2^2 x_1}{2} = -\frac{1}{2}(r - r^3) \cos \theta + r \sin \theta \\ \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta} &= -x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{x_2^3 + x_1^2 x_2}{2} = -\frac{1}{2}(r - r^3) \sin \theta - r \cos \theta, \end{aligned}$$

Vertaamalla sinin ja kosinin kertoimia saadaan alkuperäisen kanssa ekvivalentti differentiaaliyhtälö napakoordinaateissa:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(r^2 - 1)/2 \\ \dot{\theta} = -1. \end{cases} \quad (5.6)$$

Sama tulos saadaan tietenkin myös käyttämällä yhtälöitä (B.2).

Kulmakomponentin ja radiaalisen komponentin yhtälöt siis eriytyvät. Ratkaisusta $\theta(t) = -t + \theta_0$ nähdään, että ratkaisut kiertävät origoa tasaisella kulmanopeudella.

Säteen differentiaaliyhtälöstä nähdään suoraan, että alkuarvoilla $r = 1$ ratkaisukäyrä on yksikköympyrän parametrisointi vakionopeudella. OY-lauseen nojalla ratkaisukäyrät

eivät leikkaa toisiaan, joten yksikköympyrästä lähtevät ratkaisut pysyvät rajoitettuina yksikköympyrään.

Napakoordinaattimuodossa oleva yhtälö (5.6) voidaan ratkaista eksplisiittisesti:

$$\begin{cases} r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + e^t(1 - r_0^2)}} \\ \theta(t) = \theta_0 - t \end{cases}$$

on ratkaisu alkuarvolla $(r(0), \theta(0)) = (r_0, \theta_0)$.

5.3 Maksimaalinen määrittelyväli

Propositio 5.9. *Olkoon $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-jatkuva. Tällöin alkuarvot tehtävän*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (5.7)$$

maksimaalinen määrittelyväli on \mathbb{R} .

Todistus. Lauseen 5.2 nojalla on $\delta > 0$ siten, että alkuarvot tehtävällä (5.7) on ratkaisu $x_1:]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\rightarrow \mathbb{R}^n$. Tässä tapauksessa voidaan käyttää samaa lukua δ kaikille alkuarvoille $x(s_0) = y_0$. Alkuarvot tehtävällä $\dot{x} = f(x)$, $x(\frac{\delta}{2}) = x_1(\frac{\delta}{2})$ on siis ratkaisu avoimella välillä $]t_0 - \frac{\delta}{2}, t_0 + \frac{3\delta}{2}[$. Lemman 1.9 nojalla alkuarvot tehtävällä (5.7) on ratkaisu $x_2:]t_0 - \delta, t_0 + \frac{3\delta}{2}[\rightarrow \mathbb{R}^n$. Tällä prosessilla voimme jatkaa määrittelyväliä molemmista päistä ja väite seuraa induktiolla. \square

Silloinkin, kun differentiaaliyhtälö on määritelty koko avaruudessa \mathbb{R}^n , niin maksimaalinen määrittelyväli voi olla pienempi kuin koko \mathbb{R} , jos f ei ole Lipschitz-jatkuva, kuten Esimerkeissä 1.1 ja 5.8 käsiteltyjen differentiaaliyhtälöiden ratkaisujen käyttäytyminen osoittaa.

Esimerkki 5.10. Alkuarvot tehtävää

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_2/x_3^2 \\ x_1/x_3^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(1/\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1/\pi \end{pmatrix}$$

on luonnollista tarkastella joukossa $U = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$, koska vektorikenttä on määritelty hypertason $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$ komplementissa. Tämän alkuarvot tehtävän ratkaisu voidaan itse asiassa antaa helposti:

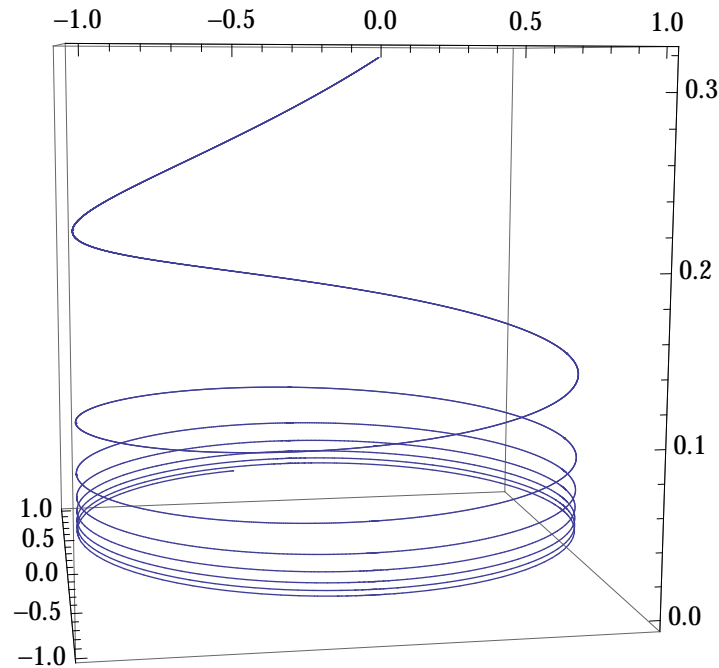
$$x(t) = \begin{pmatrix} \sin(1/t) \\ \cos(1/t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Ratkaisun maksimaalinen määrittelyväli on $]0, \infty[$. Ratkaisukäyrä on sylinterillä

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

ja kun $t \rightarrow 0$, niin ratkaisukäyrä kasautuu kohti ympyrää

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}.$$



Olkoon seuraavissa tuloksissa $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä. Olkoon $] \sigma, \tau [$ alkuarvot tehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (5.8)$$

maksimaalinen määrittelyväli ja olkoon x maksimaalinen ratkaisu. Tässä $\sigma < 0 < \tau$, $\sigma \in [-\infty, \infty[$ ja $\tau \in]-\infty, \infty]$

Propositio 5.11. *Olkoon $K \subset U$ kompakti.³ Jos $\tau < \infty$, niin on $t \in]0, \tau[$, jolle $x(t) \notin K$. Jos $\sigma > -\infty$, niin on $t \in]\sigma, 0[$, jolle $x(t) \notin K$.*

Todistus. Tarkastellaan vain ylhäältä rajoitetun maksimaalisen määrittelyvälin tapaus, alhaalta rajoitettu tilanne todistetaan samalla tavalla. Koska K on kompakti ja f on jatkuva, niin on $M > 0$, jolle

$$\max_{x \in K} \|f(x)\| \leq M.$$

Oletetaan, että $x(t) \in K$ kaikilla $t \in [0, \tau[$. Tällöin kaikille $0 < t_1 < t_2 < \tau$ pätee

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(s) ds \right\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(x(s)) ds \right\| \leq M |t_1 - t_2|,$$

joten ratkaisu on M -Lipschitz-jatkuva välillä $[0, \tau[$. Harjoitustehtävän 5.4 nojalla sillä on vasen raja-arvo

$$x_\tau = \lim_{t \rightarrow \tau^-} x(t) \in K.$$

³Joukko K on siis euklidisen avaruuden suljettu ja rajoitettu osajoukko.

Koska f on määritelty ja jatkuva joukossa K , joka sisältää myös raja-arvon x_τ , huomaamme, että

$$\begin{aligned} x_\tau &= \lim_{t \rightarrow \tau^-} x(t) = x(0) + \lim_{t \rightarrow \tau^-} \int_0^t \dot{x}(s) ds \\ &= x(0) + \lim_{t \rightarrow \tau^-} \int_0^t f(x(s)) ds = x(0) + \int_0^\tau f(x(s)) ds. \end{aligned}$$

Ratkaisu x voidaan jatkaa differentioituvaksi kuvaukseksi päättepisteeseen τ saakka lausekkeella

$$x(t) = x_0 + \int_0^\tau f(x(s)) ds,$$

erityisesti $\dot{x}(\tau) = f(x(\tau)) = f(x_\tau)$. Alkuarvotehtävällä

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(\tau) = x_\tau \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu jollain välillä $]\tau - a, \tau + a[$, joten Lemman 1.9 nojalla alkuarvotehtävällä (5.8) on ratkaisu välillä $]\sigma, \tau + a[$. Tämä on ristiriita välin $]\sigma, \tau[$ maksimaalisuuden kanssa. \square

Seuraus 5.12. *Olkoon $K \subset U$ kompakti ja olkoon $x(t)$ alkuarvotehtävän (5.8) ratkaisu, jonka maksimaalinen määrittelyväli on $]\sigma, \tau[$. Jos $x(t) \in K$ kaikilla $t \geq 0$, niin $\tau = \infty$.*

Todistus. Väite on yhtäpitävä Proposition 5.11 kanssa siirtymällä negaatioihin. \square

Seuraus 5.13. *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja olkoon $x(t)$ alkuarvotehtävän (5.8) ratkaisu, jonka maksimaalinen määrittelyväli $]\sigma, \tau[$ on ylhäältä rajoitettu. Jos $x(t)$ suppenee, kun $t \rightarrow \tau^-$, niin $\lim x(t)_{t \rightarrow \tau^-} \in \partial U$.*

Todistus. Harjoitustehtävä 5.5. \square

5.4 Vakion variointi

Jos epäautonominen differentiaaliyhtälö $\dot{x} = f(x, t)$ muunnetaan autonomiseksi, tuloksena ei ole koskaan ole lineaarinen autonominen yhtälö. Jo aikaparametrin $x_{n+1} = t$ differentiaaliyhtälö $\dot{x}_{n+1} = 1$ tekee yhtälöstä

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}). \\ \dot{x}_{n+1} = 1 \end{cases}.$$

epälineaarisen. Tämän vuoksi seuraava tulos laajentaa aidosti niiden differentiaaliyhtälöiden joukkoa, joille tunnemme ratkaisun ainakin periaatteessa eksplisiittisesti.

Propositio 5.14 (Vakion variointi). *Olkoon A $n \times n$ -matriisi ja olkoon $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuva kuvaus. Kuvaus*

$$x(t) = \exp(tA) \left(x_0 + \int_0^t \exp(-sA) G(s) ds \right)$$

on alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + G(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ratkaisu, kun $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Todistus. Väitteen funktio x toteuttaa selvästi alkuehdon. Lemman 2.13 ja analyysin peruslauseen nojalla saamme

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \exp(tA) \left(x_0 + \int_0^t \exp(-sA) G(s) ds \right) + G(t) \\ &= \exp(tA) \exp(-tA) G(t) = Ax(t) + G(t). \end{aligned} \quad \square$$

Esimerkki 5.15 (Pakotettu vaimeneva värähtelijä). Esimerkissä 3.4 kuvatun vaimenevan värähtelijän jousen päässä liikkuvaan painoon vaikuttaa nyt jokin ulkoinen voima $g(t)$, joka aiheuttaa ajasta mutta ei paikasta riippuvan kiihtyvyyden. Epäautonomisen alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -\frac{k}{m}y_1 - \frac{b}{m}y_2 + g(t) \end{cases} \quad (5.9)$$

ratkaisu saadaan Lauseen 5.14 avulla. Nyt siis

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix}$$

ja

$$G(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

ja alkuarvotehtävän (5.9) ratkaisu on

$$y(t) = \exp(tA)y_0 + \exp(tA) \int_0^t \exp(-sA)G(s)ds. \quad (5.10)$$

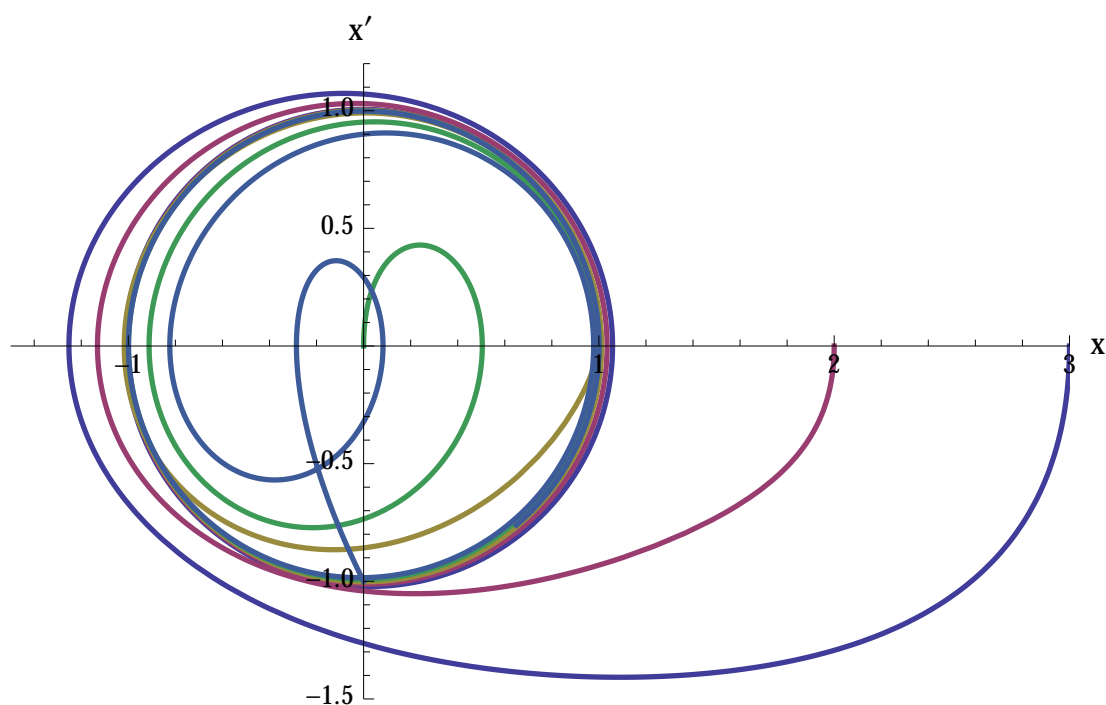
Tarkastellaan erityisesti tilannetta, jossa pakottava voima on jaksollinen $g(t) = \cos(t)$. Tällaisella differentiaaliyhtälöllä kuvataan esimerkiksi vaihtovirralla ajettuja RLC-piirejä.

Numeerisesti laskettuja esimerkkejä tarkastelemalla näyttäisi siltä, että alkuarvosta riippumatta ratkaisut lähestyvät samaa ympyrää, jonka koko riippuu vaimenevan värähtelijän parametreista.

Kuvasta 5.2 huomaamme myös, että epäautonomisen differentiaaliyhtälön ratkaisukäyrät voivat leikata itseään "epät triviaalilla tavalla". Jos korvaamme differentiaaliyhtälön (5.9) autonomisella yhtälöllä ottamalla ajan kolmanneksi muuttujaksi ja lisäämällä yhtälöön ehdon $\dot{t} = 1$, niin kuva 5.2 esittää tämän uuden yhtälön ratkaisun projektiota mihin tahansa aika-akselia vastaan kohtisuoraan tasoon. OY-lauseen mukaan uuden yhtälön ratkaisukäyrät eivät leikkaa itseään vaikka niiden projektiot näin tekevätkin.

Tarkasteltavassa alkuarvotehtävässä (5.9) pakottava termi on 2π -jaksollinen. Siis, jos tämän alkuarvotehtävän ratkaisulle pätee $y(2\pi) = y_0 = y(0)$, niin ratkaisu y on 2π -jaksollinen. Osoitetaan, että tehtävällä on täsmälleen yksi 2π -jaksollinen ratkaisu: Jos $y(2\pi) = y_0$, niin

$$y_0 = \exp(2\pi A)y_0 + \exp(2\pi A) \int_0^{2\pi} \exp(-sA)G(s)ds = \exp(2\pi A)y_0 + w,$$



Kuva 5.2: Pakotettu vaimeneva värähtelijä parametreillä $m = k = b = 1$ alkuarvoilla $y(0) = (3, 0)$, $y(0) = (2, 0)$, $y(0) = (0, 0)$, $y(0) = (1, 0)$, $y(0) = (0, -1)$. Kuvassa $t \in [0, 15]$.

joten alkuarvo y_0 vastaa 2π -jaksollista rataa, jos ja vain jos se on yhtälön

$$(I_2 - \exp(2\pi A))y_0 = w \quad (5.11)$$

ratkaisu. Matriisin A ominaisarvojen $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4km}}{2m}$ reaali-osat ovat negatiivisia, joten matriisin $\exp A$ ominaisarvot ovat itseisarvoltaan pienempiä kuin 1, erityisesti siis kumpikaan niistä ei ole 1. Siis matriisi $\exp(2\pi A) - I$ on kääntövä ja yhtälöllä (5.11) on täsmälleen yksi ratkaisu $y_0 = (I_2 - \exp(2\pi A))^{-1}w \in \mathbb{R}^2$.

Esimerkiksi, jos $m = k = b = 1$, niin $y(t) = (\sin t, \cos t)$ on alkuarvottehtävän (5.9) 2π -jaksollinen ratkaisu alkuarvolla $(0, 1)$.

Osoitetaan lopuksi, että muut ratkaisut käyttäytyvät havaitulla tavalla: Jos $z_0 \in \mathbb{R}^2$, niin alkuarvottehtävän (5.9) ratkaisu alkuarvolla z_0 on

$$\begin{aligned} z(t) &= \exp(tA)z_0 + \exp(tA) \int_0^t \exp(-sA)G(s)ds \\ &= \exp(tA)(z_0 - y_0) + \exp(tA)y_0 + \exp(tA) \int_0^t \exp(-sA)G(s)ds \\ &= \exp(tA)(z_0 - y_0) + y(t), \end{aligned}$$

missä $y(t)$ on edellä löydetty 2π -jaksollinen ratkaisu. Termi $\exp(tA)(z_0 - y_0)$ lähestyy nollaa, kun $t \rightarrow \infty$ koska se on vaimenevan värähtelijän differentiaaliyhtälön alkuarvottehtävän (3.7) ratkaisu alkuarvolla $z_0 - x_0$, kun $b > 0$.

Harjoitustehtäviä

5.1. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_2(x_1^2 + x_2^2) \\ x_1(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}, \quad x(0) = p$$

kaikille $p \in \mathbb{R}^2$.⁴

5.2. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \\ x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}, \quad x(0) = p$$

kaikille $p \in \mathbb{R}^2$.⁵

5.3. Iteroi Picardin operaattoria kolme kertaa alkuarvotehtävälle

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.4. Olkoon $0 < \tau < \infty$ ja olkoon $g: [0, \tau[\rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-jatkuva kuvaus. Osoita, että sillä on vasen raja-arvo $\lim_{t \rightarrow \tau^-} g(t)$.

5.5. Todista Seuraus 5.13.

5.6. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + t \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + 1 \\ x(0) = (1, 0). \end{cases}$$

5.7. Olkoon⁶

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ja olkoon

$$G(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ te^{2t} \end{pmatrix}.$$

Ratkaise alkuarvotehtävä $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + G(t), \\ x(0) = 0 \end{cases}$.

⁴Katso Esimerkkiä 5.8.

⁵Katso Esimerkkiä 5.8.

⁶Muista Harjoitustehtävä 4.5

Luku 6

Linearisointi ja vakaus

Tässä luvussa tutustumme joihinkin menetelmiin, joiden avulla differentiaaliyhtälön ratkaisujen käyttäytymistä voi ymmärtää ratkaisematta yhtälöä. Erityisesti tarkastelemme differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ tasapainopisteen ympäristöä epälineaarisen vektorikentän f tapauksessa.

6.1 Tasapainopisteen vakaus

Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorikenttä. Vektorikentän f tasapainopiste b on *vakaa*,^a jos jokaiselle pisteen b avoimelle ympäristölle $V \subset U$ on pisteen b avoin ympäristö $W \subset V$ siten, että jokaisen alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = p \in W \end{cases}$$

ratkaisun x_p maksimaalinen määrittelyväli on ylhäältä rajoittamaton ja $x_p(t) \in W$ kaikilla $t \geq 0$.

Jos tasapainopiste b ei ole vakaa, se on *epävakaa*.

Tasapainopiste b on *asymptoottisesti vakaa*, jos b on vakaa ja on pisteen b avoin ympäristö W , jolle $x_p(t) \rightarrow b$ kaikille $p \in W$, kun $t \rightarrow \infty$.

^a*stabiili*

Esimerkki 6.1. (1) Tason lineaarisen differentiaaliyhtälön tasapainopiste 0 on vakaa, jos se on nielu, spiraalinielu, surkastunut nielu tai keskus. Jos origo on nielu, spiraalinielu tai surkastunut nielu, niin se on asymptoottisesti vakaa. Se on epävakaa, jos se on lähde, surkastunut lähde, spiraalilähde tai satula.

(3) Origo on Esimerkin 5.8 differentiaaliyhtälön ainoa tasapainopiste. Napakoordinaateis-

sa kirjoitetusta ratkaisusta

$$\begin{cases} r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + e^t(1 - r_0^2)}} \\ \theta(t) = \theta_0 - t \end{cases}$$

näkee helposti, että $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$, kun alkuarvo on avoimessa yksikkökiekossa. Siis 0 on asymptoottisesti vakaa tasapainopiste.

6.2 Mukautettu normi

Seuraavaa tulosta käytetään epälineaarisen differentiaaliyhtälön tasapainopisteen tarkasteluun luvussa 6.3.

Propositio 6.2. *Olkoon $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Jos $\text{Re Sp}(A) \subset]m, M[$, niin avaruudessa \mathbb{R}^n on sisätulo $(\cdot | \cdot)$ ja sen määräämä normi¹ $\|\cdot\|$, joille pätee*

$$m\|x\|^2 \leq (Ax | x) \leq M\|x\|^2$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

Todistus. Konjugoimalla voidaan olettaa, että A on Jordanin kanonisessa muodossa. Osoitetaan, että väite pätee jokaista blokkia vastaavassa aliavaruudessa. Väite seuraa tästä asettamalla nämä aliavaruudet keskenään ortogonaalisiksi.

Jos $A = (\lambda)$, niin kaikille $x \in \mathbb{R}$ pätee standardisisätulolla $(Ax | x) = \lambda\|x\|^2$.

Jos $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, niin matriisin A ominaisarvot ovat $\alpha \pm i\beta$. Nyt standardisisätulolle pätee

$$(Ax | x) = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha\|x\|^2$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^2$.

Jos $\lambda \in \mathbb{R}$ ja

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}),$$

niin tehdään tehdään kannanvaihto matriisilla $K = \text{diag}(1, \delta, \delta^2, \dots, \delta^{n-1})$:

$$K^{-1}AK = \begin{pmatrix} \lambda & \delta & & & \\ & \lambda & \delta & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & \delta \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

¹Muista normin määritelmä Luvusta 2.2. Matriisin A spektri $\text{Sp}(A)$ on sen ominaisarvojen joukko.

Standardisätulolle uudessa kannassa pätee

$$(Ax \mid x) = (\lambda x + \delta(x_2, x_3, \dots, x_n, 0) \mid x) = \lambda \|x\|^2 + \delta((x_2, x_3, \dots, x_n, 0) \mid x).$$

Cauchyn epäyhtälön nojalla

$$\left| \left((x_2, x_3, \dots, x_n, 0) \mid x \right) \right| \leq \|x\|^2,$$

joten

$$(\lambda - \delta)\|x\|^2 \leq (Ax \mid x) \leq (\lambda + \delta)\|x\|^2.$$

Valitsemalla $\delta > 0$ riittävän pieneksi saadaan haluttu arvio. Neljättä blokkityyppiä vastaava kompleksisen ominaisarvon tapaus todistetaan samaan tapaan. \square

6.3 Linearisointi

Tässä luvussa tarkastelemme menetelmää, jolla useissa tilanteissa voidaan päätellä, että tasapainopiste on asympotoottisesti vakaa tai epävakaa.

Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuvasti differentioituva vektorikenttä. Olkoon $b \in U$ differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = f(x)$$

tasapainopiste (siis $f(b) = 0$). Lineaarinen differentiaaliyhtälö

$$\dot{x} = Df(b)(x - x_0)$$

on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ *linearisointi* pisteessä b .

Lause 6.3. *Olkoon b C^1 -vektorikentän $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tasapainopiste. Jos $Df(b)$ on diagonalisoituva ja kaikkien ominaisarvojen reaaliosat ovat pienempiä kuin $-c$ jollain $c > 0$, niin b on asympotoottisesti vakaa ja on $\delta > 0$ siten, että kaikilla $p \in \overline{B}(b, \delta)$ alkuarvotettävän*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = p \end{cases}$$

maksimaalinen määrittelyväli on ylhäältä rajoittamaton ja sen ratkaisu x_p toteuttaa

$$\|x_p(t) - b\| \leq e^{-ct} \|p - b\|$$

kaikilla $t \geq 0$.

Todistus. Oletetaan yksinkertaistamiseksi, että $b = 0$. Lauseen 4.8 ja Proposition 6.2 nojalla voimme valita koordinaatit siten, että $A = Df(0)$ on Jordanin kanonisessa muodossa ja että standardisätulolle ja sen määräämälle normille pätee

$$(Ax \mid x) \leq -M\|x\|^2 \tag{6.1}$$

jollain $M > c > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

Koska f on differentioituva, sille pätee $\|f(x) - Df(0)x\| = o(x)$, kun $x \rightarrow 0$. Cauchyn epäyhtälön nojalla

$$|(f(x) | x) - (Ax | x)| = |(f(x) - Ax | x)| \leq o(x)\|x\| = o(\|x\|^2), \quad (6.2)$$

kun $x \rightarrow 0$. Epäyhtälöiden (6.1) ja (6.2) nojalla on $\delta > 0$ siten, että

$$(f(x) | x) \leq -c\|x\|^2, \quad \text{kun } \|x\| \leq \delta. \quad (6.3)$$

Olkoon $\phi: [0, t_0] \rightarrow U$ differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisu, jonka kuvajoukko sisältyy joukkoon $\bar{B}(0, \delta) - \{0\}$. Aiemmilta kursseilta muistamme, että

$$\frac{d}{dt} \|\phi(t)\| = \frac{(\dot{\phi}(t) | \phi(t))}{\|\phi(t)\|}.$$

Koska ϕ on ratkaisu, saamme epäyhtälön (6.3) nojalla

$$\frac{d}{dt} \|\phi(t)\| = \frac{(f(\phi(t)) | \phi(t))}{\|\phi(t)\|} \leq \frac{-c\|\phi(t)\|^2}{\|\phi(t)\|} = -c\|\phi(t)\|. \quad (6.4)$$

Siis kuvaus $t \mapsto \|\phi(t)\|$ on vähenevä, joten koko ratkaisu sisältyy kompaktiin joukkoon $\bar{B}(0, \delta)$. Proposition 5.12 nojalla määrittelyväli on ylhäältä rajoittamaton.

Epäyhtälön (6.4) nojalla

$$\frac{d}{dt} \log \|\phi(t)\| = \frac{\frac{d}{dt} \|\phi(t)\|}{\|\phi(t)\|} \leq -c,$$

mistä viimeinen väite seuraa integroimalla. □

Jos lineaarikuvauksen $Df(b)$ kaikkien ominaisarvojen reaaliosat ovat negatiivisia tasapainopisteessä b , niin b on (epälineaarinen) nielu.

Seuraus 6.4. *Olkoon $b \in C^1$ -vektorikentän $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tasapainopiste. Jos lineaarikuvauksen $Df(b)$ kaikkien ominaisarvojen reaaliosat ovat suurempia kuin c jollain $c > 0$, niin b on epävakaata ja on $\delta > 0$ siten, että kaikilla $p \in \bar{B}(b, \delta)$ alkuarvottehtävän*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = p \end{cases}$$

maksimaalinen määrittelyväli on alhaalta rajoittamaton ja sen ratkaisu x_p toteuttaa

$$\|x_p(t) - b\| \leq e^{ct} \|p - b\|$$

kaikilla $t \leq 0$.

Todistus. Väite seuraa Lauseesta 6.3 tarkastelemalla vektorikenttää $-f$. □

Jos lineaarikuvauksen $Df(b)$ kaikkien ominaisarvojen reaaliosat ovat positiivisia tasapainopisteessä b , niin b on (epälineaarinen) lähde.

Esimerkki 6.5. Esimerkissä 5.8 tarkastellun differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{x_1}{2} + x_2 + \frac{x_1^3 + x_2^2 x_1}{2} \\ -x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{x_2^3 + x_1^2 x_2}{2} \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

ainoa tasapainopiste on 0. Linearisoitu yhtälö on

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{x_1}{2} + x_2 \\ -x_1 - \frac{x_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x = Ax$$

Matriisin A ominaisarvot ovat $-\frac{1}{2} \pm i$, joten origo on hyperbolinen tasapainopiste, lineaarisatio on spiraalinielu. Lausetta 6.3 voi soveltaa ratkaisujen tutkimiseen ja sen mukaan 0 on asymptoottisesti vakaa tasapainopiste.

6.4 Hyperbolisen tasapainopisteen vakaudesta

Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuvasti differentioituva vektorikenttä. Olkoon $b \in U$ differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = f(x)$$

tasapainopiste. Jos lineaarikuvauksella $Df(b)$ ei ole ominaisarvoja, joiden reaaliosa on nolla, niin tasapainopiste b on *hyperbolinen*.

Seuraavaksi osoitamme, että hyperbolisen kiintopisteen epävakaas voidaan päätellä siitä, että vektorikentän linearisoinnilla on ainakin yksi ominaisarvo, jonka reaaliosa on positiivinen. Tämä tulos antaa Lauseen 6.3 ja Seurauksen 6.4 kanssa helpon tavan selvittää hyperbolisen tasapainopisteen vakaus tai epävakaas.

Lause 6.6. *Olkoon $b \in C^1$ -vektorikentän f hyperbolinen tasapainopiste. Jos lineaarikuvauksen $Df(b)$ jonkin ominaisarvon reaaliosa on positiivinen, niin b on epävakaas.*

Esimerkki 6.7 (Hyperbolinen tasapainopiste). Differentiaaliyhtälöllä

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_1 - x_2^2 \\ x_2 \end{pmatrix} = f(x) \quad (6.6)$$

on yksi tasapainopiste $x = 0$. Tässä pisteessä sen linearisointi on

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \text{diag}(-1, 1) x$$

Linearisoitu yhtälö on hyperbolinen ja sen ratkaisut tunnemme jo hyvin: Origo on satulapiste. Lauseen 6.6 nojalla 0 on epävakaas.

Epälineaarisen differentiaaliyhtälön (6.6) ratkaiseminen ei ole vaikeaa:

$$x(t) = \begin{pmatrix} (a + \frac{b^2}{3})e^{-t} - \frac{b^2}{3}e^{2t} \\ be^t \end{pmatrix}$$

on ratkaisu alkuarvolla $x(0) = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Ratkaisusta näkee helposti, että ensimmäiselle koordinaattiakselille $\mathbb{R} \times \{0\}$ kuuluvalla alkuarvolla $(a, b) = (a, 0)$ ratkaisu $x(t) = \begin{pmatrix} ae^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$ akselilla $\mathbb{R} \times \{0\}$ ja $x(t) \rightarrow 0$, kun $t \rightarrow \infty$. Jos alkuarvo (a, b) on paraabelilla

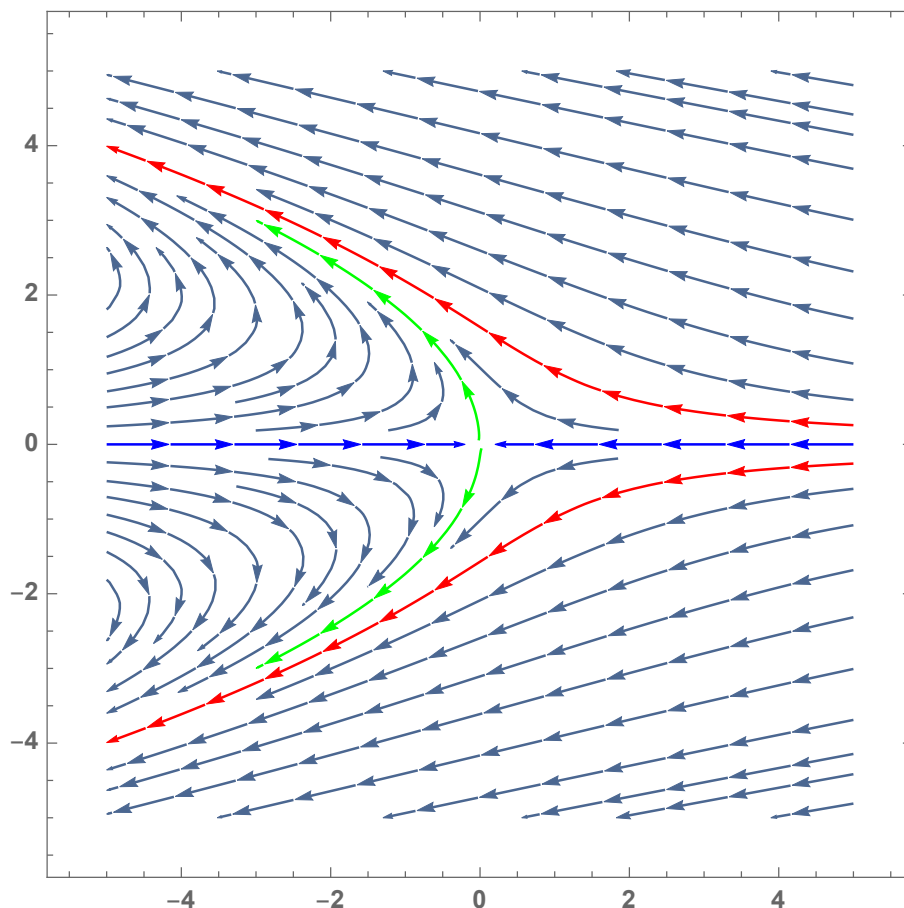
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = -\frac{1}{3}x_2^2 \right\},$$

niin ratkaisu

$$x(t) = \begin{pmatrix} -\frac{b^2}{3}e^{2t} \\ be^t \end{pmatrix}$$

pysyy paraabelilla S . Tälle ratkaisulle $\|x(t)\| \rightarrow 0$, kun $t \rightarrow \infty$ ja $x(t) \rightarrow 0$, kun $t \rightarrow -\infty$. Differentiaaliyhtälön (6.6) tasapainopiste 0 on siis epävakaata vaikka jotkut ratkaisut lähestyvät origoa, kun $t \rightarrow \infty$.

Jos alkuarvo (a, b) on joukossa $\mathbb{R}^2 - ((\mathbb{R} \times \{0\}) \cup S)$, niin ratkaisun normi käyttäytyy kuten a^2e^{2t} , kun $t \rightarrow \infty$ ja kuten be^{-t} , kun $t \rightarrow -\infty$, siis $\|x(t)\| \rightarrow \infty$, kun $t \rightarrow \pm\infty$.



Kuva 6.1: Differentiaaliyhtälön (6.6) epälineaarisen differentiaaliyhtälön ratkaisukäyriä.

Hyperbolinen tasapainopiste, joka ei ole (epälineaarinen) nielu eikä lähde, on (epälineaarinen) satulapiste.

Esimerkki 6.8 (Tasapainopiste, joka ei ole hyperbolinen). Jos tasapainopiste ei ole hyperbolinen, sen luonnetta ei voi päätellä Lauseen 6.3, Seurauksen 6.4 ja Lauseen 6.6 avulla. Tämä esimerkki osoittaa, että luonnetta ei voi päätellä pelkkää linearisoinnin avulla, jos tasapainopiste ei ole hyperbolinen.

Differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_2 + \varepsilon x_1 \|x\|^2 \\ x_1 + \varepsilon x_2 \|x\|^2 \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

ainoa tasapainopiste on 0. Sen linearisaatio on kaikilla $\varepsilon \in \mathbb{R}$ sama yhtälö

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Linearisaation kerroinmatriisin ominaisarvot ovat $\pm i$, joten Lausetta 6.3 ei voi soveltaa.

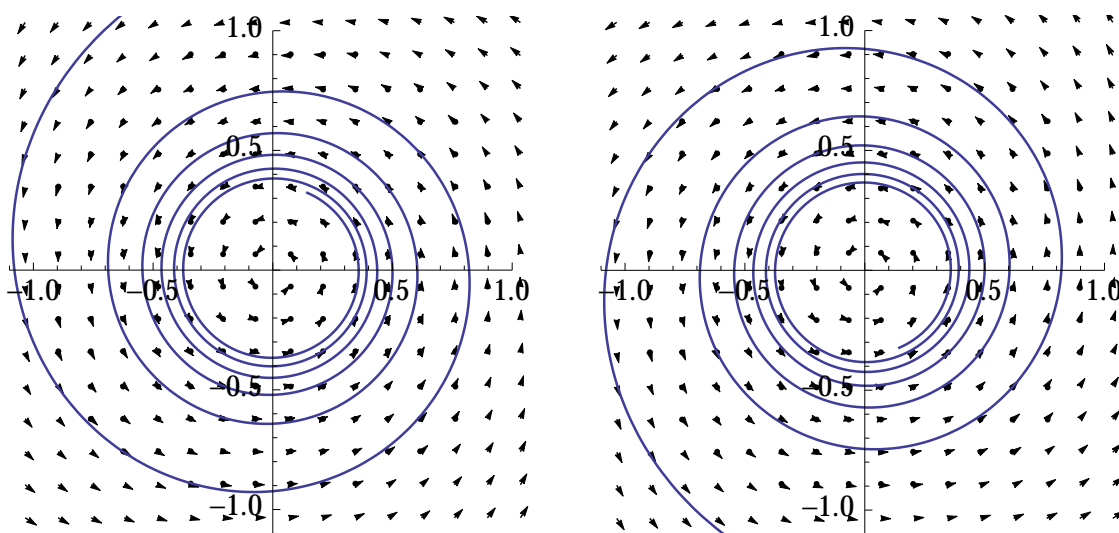
Differentiaaliyhtälö (6.7) on napakoordinaattimuodossa

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r^3 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}.$$

Tämä yhtälö on helppo ratkaista: Alkuarvolla $r(0) = r_0$ ja $\theta(0) = \theta_0$ saadaan

$$\begin{cases} r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{1-2\varepsilon r_0^2 t}} \\ \theta(t) = \theta_0 + t \end{cases}$$

Ratkaisun maksimaalinen määrittelyväli on $]-\infty, \frac{1}{2\varepsilon r_0^2}[$, kun $\varepsilon > 0$ ja $]\frac{1}{2\varepsilon r_0^2}, \infty[$, kun $\varepsilon < 0$. Siis 0 on asymptoottisesti vakaa, kun $\varepsilon < 0$ ja epävakaa, kun $\varepsilon > 0$. Kun $\varepsilon = 0$, yhtälö on lineaarinen ja sen radat ovat ympyröitä kuten näimme luvussa 3.3.



Kuva 6.2: Pisteen $(\frac{1}{2}, 0)$ radan osia, kun $\varepsilon = -0.1, 0.1$.

Tässä esimerkissä tarkasteltavat differentiaaliyhtälö voidaan ratkaista eksplisiittisesti ja ratojen käyttäytyminen voitiin selvittää. Tämä on kuitenkin poikkeuksellista, yleensä joudutaan tyytymään ratkaisun tarkastelemiseen muilla keinoilla.

Lauseen 6.6 todistusta varten määrittelemme linearisoinnin kerroinmatriisiin liittyviä aliavaruuksia.

Kompleksista ominaisarvoparia $\lambda, \bar{\lambda}$ vastaava *reaalinen juuriavaruus* on

$$\widehat{E}_{\lambda, \bar{\lambda}} = \widehat{E}_{\lambda, \bar{\lambda}}(A) = (\widehat{E}_{\lambda} \oplus \widehat{E}_{\bar{\lambda}}) \cap \mathbb{R}^n = \operatorname{Re} \widehat{E}_{\lambda} \oplus \operatorname{Im} \widehat{E}_{\lambda} = \operatorname{Re} \widehat{E}_{\bar{\lambda}} \oplus \operatorname{Im} \widehat{E}_{\bar{\lambda}}.$$

Matriisin A *vakaa aliavaruus* eli *stabiili aliavaruus* on

$$E^s = E^s(A) = \bigoplus_{\lambda < 0} \widehat{E}_{\lambda} \oplus \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \\ \operatorname{Re} \lambda < 0}} \widehat{E}_{\lambda, \bar{\lambda}},$$

sen *epävakaa aliavaruus* eli *epästabiili aliavaruus* on

$$E^u = E^u(A) = \bigoplus_{\lambda > 0} \widehat{E}_{\lambda} \oplus \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \\ \operatorname{Re} \lambda > 0}} \widehat{E}_{\lambda, \bar{\lambda}},$$

ja sen *keskusaliavaruus* on

$$E^0 = E^0(A) = \widehat{E}_0 \oplus \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \\ \operatorname{Re} \lambda = 0}} \widehat{E}_{\lambda, \bar{\lambda}}.$$

Esimerkiksi Jordanin kanonisen muodon (Lause 4.8) avulla nähdään, että

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^0 \oplus E^u.$$

Lemma 6.9. *Aliavaruudet $E^s(A)$, $E^0(A)$, $E^u(A)$ ovat A -invariantteja.*

Todistus. Seuraa Propositioista 4.3. □

Lemma 6.10. *Aliavaruudet $E^s(A)$, $E^0(A)$, $E^u(A)$ ovat invariantteja avaruuden \mathbb{R}^n virtauksessa $\phi_t(x) = \exp(At)x$.* □

Todistus. Seuraa Lemmasta 6.9 käyttämällä matriisien eksponenttifunktion sarjaesitystä ja väitettä (1). □

Lauseen 6.6 todistus. Affiinilla koordinaattimuunnoksella voimme olettaa, että $b = 0$ ja että differentiaalin $Df(0)$ matriisille A pätee $E^s(A) = \mathbb{R}^k$, $E^u(A) = \mathbb{R}^{n-k}$ ja $E^s(A) \perp E^u(A)$. Olkoon

$$x = (x_s, x_u),$$

missä $x_s \in E^s$, $x_u \in E^u$. Lemman 6.10 ja Proposition 6.2 nojalla on $K_s < 0$ ja $K_u > 0$ siten, että $(Ax_s \mid x_s) \leq K_s \|x_s\|^2$ kaikille $x_s \in E^s$ ja $(Ax_u \mid x_u) \geq K_u \|x_u\|^2$ kaikille $x_u \in E^u$.

Olkoon

$$f(x) = Ax + R(x),$$

missä $R(x) = (R_s(x), R_u(x)) = o(x)$, kun $x \rightarrow 0$. Valitaan $0 < \varepsilon < (K_u - K_s)/4$ ja $r > 0$ siten, että $\|R(x)\| \leq \varepsilon \|x\|$, kun $\|x\| \leq r$. Olkoon

$$C_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x_u\| \geq \|x_s\|\} \cap \overline{B}(0, r).$$

Olkoon $x = (x_s, x_u)$ differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisu, jolle $x(0) \in C_r$. Tällöin, kun $x(t) \in C_r$ pätee Taylorin kehitelmän, Cauchyn epäyhtälön ja kolmioepäyhtälön, ja oletuksen $\|x_u\| \geq \|x_s\|$ nojalla

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\|x_u(t)\|^2) &= 2(x_u(t)|Ax_u(t) + R_u(t)) \\ &\geq 2(K_u\|x_u(t)\|^2 - \|x_u(t)\|\varepsilon\|x(t)\|) \\ &\geq 2(K_u - 2\varepsilon)\|x_u(t)\|^2, \end{aligned}$$

joten $\|x_u\|$ kasvaa eksponentiaalisesti, kun ratkaisu on katkaistussa kartiossa C_r . Samaan tapaan nähdään, että

$$\frac{d}{dt}(\|x_s(t)\|^2) \leq 2(K_s + 2\varepsilon)\|x_u(t)\|^2,$$

kun $x(t) \in K_r$.

Tarkastellaan erotusta

$$g(t) = \|x_u(t)\|^2 - \|x_s(t)\|^2.$$

Selvästi $g(t) = 0$, jos $x(t)$ on yhtälön $\|x_u\| = \|x_s\|$ määrämällä kartiolla ja $g(0) \geq 0$. Edellä tehtyjen laskujen mukaan

$$\dot{g}(t) = 2(K_u - K_s - 4\varepsilon)\|x_u(t)\| > 0$$

kaikilla $t \in \mathbb{R}$, joilla $x(t) \in C_r$, joten $x(t)$ poistuu kartiosta pallon $\bar{B}(0, r)$ reunan läpi. Erityisesti se poistuu pallosta $\bar{B}(0, r)$ riippumatta siitä, kuinka läheltä tasapainopistettä alkuarvo valitaan. Siis tasapainopiste ei ole vakaa. \square

6.5 FitzHughin ja Nagumon yhtälö.

Tässä luvussa tarkastelemme esimerkkiä neurotieteen alalta.

Esimerkki 6.11 (FitzHughin ja Nagumon yhtälö). FitzHugh [Fit] päätyi 1960-luvulla tarkastelemaan tason differentiaaliyhtälöä joka yksinkertaistaa kalmarin suuren hermosäikeen toimintaa kuvaavaa Hodgkinin ja Huxleyn mallia.² Yleisin FitzHughin ja Nagumon yhtälö on

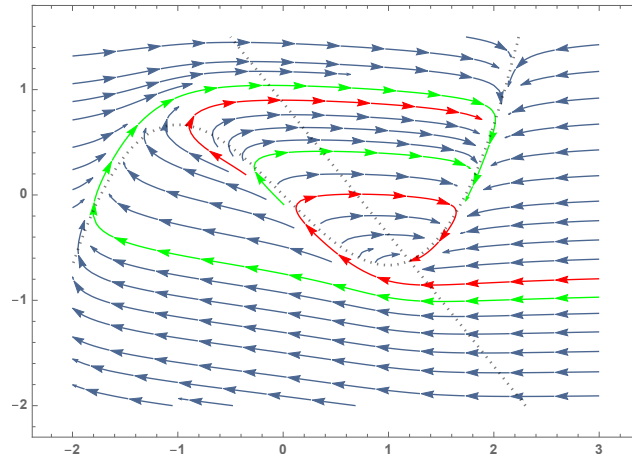
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} c(x_1 - \frac{x_1^3}{3} + x_2 + z(t)) \\ -\frac{1}{c}(x_1 - a + bx_2) \end{pmatrix},$$

missä a , b ja c ovat vakioita, joille pätee $0 < b < 1$, $1 - \frac{2b}{3} < a < 1$ ja $b < c^2$, ja z on ajasta riippuva ärsykefunktio. Tässä esimerkissä keskitymme tapaukseen, jossa z on vakiofunktio, jolloin tarkastelemme vektorikentän $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = \begin{cases} c(x_1 - \frac{x_1^3}{3} + x_2 + z) \\ -\frac{1}{c}(x_1 - a + bx_2) \end{cases},$$

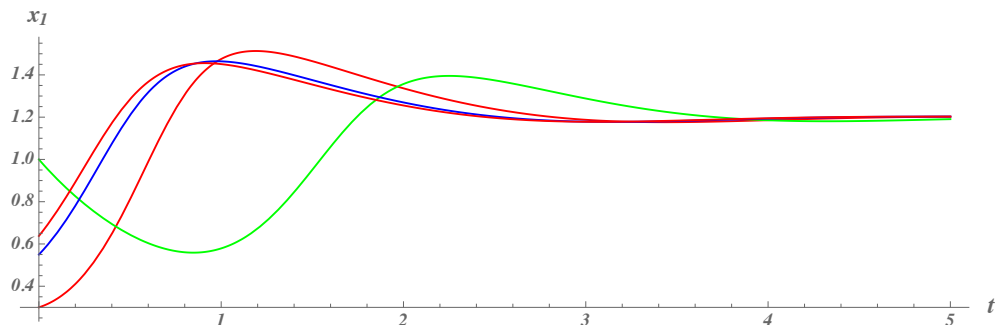
määräämää autonomista epälineaarista differentiaaliyhtälöä $\dot{x} = f(x)$.

²Nagumo yhteistyökumppaneineen tarkasteli FitzHughin esittelemää mallia, jota tuolloin kutsuttiin BVP-yhtälöksi seuraavana vuonna. Myöhemmin yhtälöä alettiin kutsua nykyisellä nimellä.



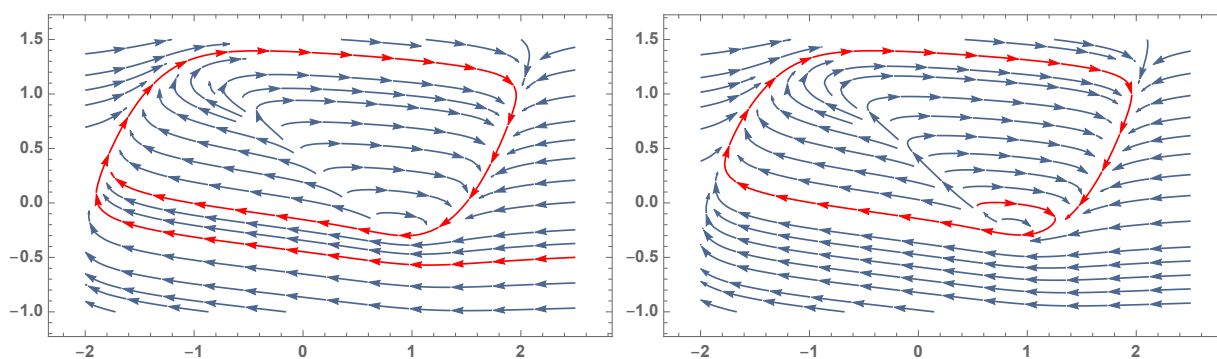
Kuva 6.3: FitzHughin ja Nagumon yhtälön ratkaisuja parametreilla $c = 3$, $a = 0.7$, $b = 0.8$ ja $z \equiv 0$. Nollakliinit on kuvattu pisteviivoilla. Kaikki ratkaisut näyttävät päätyvän tasapainopisteeseen, kun $t \rightarrow \infty$.

Tarkastellaan tapausta $c = 3$, $a = 0.7$, $b = 0.8$ ja $z \equiv 0$. Tällöin vektorikentällä f on vain yksi nollakohta $x \approx (1.199, -0.624)$. Tässä pisteessä vektorikentän linearisoinnin ominaisarvot ovat $\approx -0.79 \pm 0.85i$, joten tasapainopiste on nielu ja sen linearisointi on erityisesti spiraalinielu. Näillä parametreilla tasapainossa oleva systeemi palaa melko nopeasti takaisin tasapainoon, jos sitä häiritään. Kuvat 6.3 ja 6.4 havainnollistavat ratkaisujen käyttäytymistä.

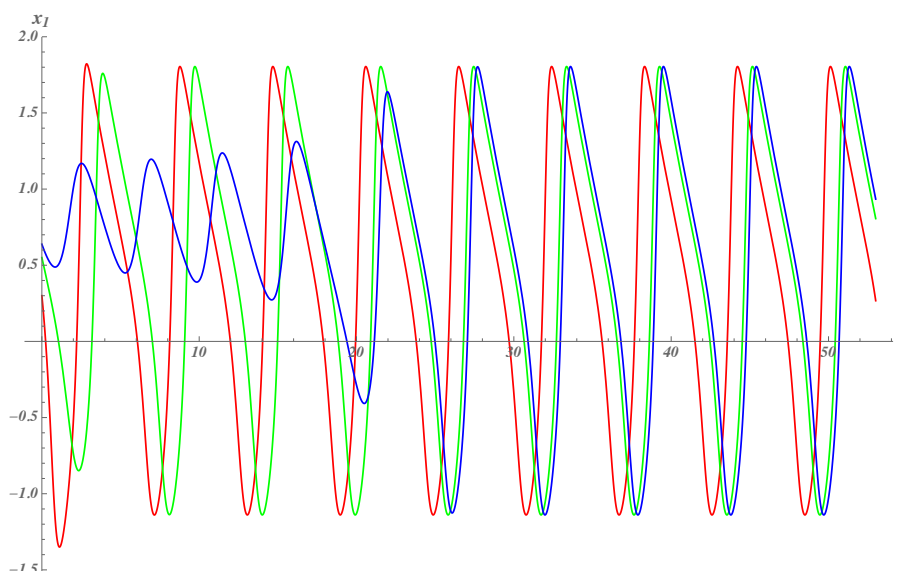


Kuva 6.4: FitzHughin ja Nagumon yhtälön ratkaisujen ensimmäisen koordinaatin käyttäytyminen eri alkuarvoilla parametreilla $c = 3$, $a = 0.7$, $b = 0.8$ ja $z \equiv 0$.

Kun $c = 3$, $a = 0.7$, $b = 0.8$ ja $z \equiv -0.45$, vektorikentän f ainoa tasapainopiste on $\approx (0.86, -0.20)$. Tässä pisteessä vektorikentän linearisoinnin ominaisarvot ovat $\approx 0.26 + 0.85i$, joten tasapainopiste on epävaka. Kuitenkaan kaikki radat eivät poistu äärettömyyksiin vaan näyttää siltä, että differentiaaliyhtälöllä $\dot{x} = f(x)$ on näillä parametreilla jaksollinen rata, joka kiertää tasapainopistettä. Koska ratkaisukäyrät eivät leikkaa epätriviaalisti, tasapainopisteen läheltä lähtevät ratkaisut pysyvät kompaktissa joukossa, joten radat kasautuvat jonnekin. Osoittautuu, että radat kasautuvat kohti puoleensavetävää jaksollista rataa.



Kuva 6.5: FitzHughin ja Nagumon yhtälön ratkaisuja parametreilla $c = 3$, $a = 0.7$, $b = 0.8$ ja $z \equiv -0.45$. Kaikki kuvatut ratkaisut näyttävät lähestyvän jaksollista rataa, kun $t \rightarrow \infty$.



Kuva 6.6: FitzHughin ja Nagumon yhtälön ratkaisujen ensimmäisen koordinaatin arvoja kolmella alkuarvolla parametreilla $c = 3$, $a = 0.7$, $b = 0.8$ ja $z \equiv -0.45$.

Harjoitustehtäviä

6.1. Olkoon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = (x_1, \|x\|^2 - 1).$$

- Etsi differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ tasapainopisteet.
- Ovatko tasapainopisteet hyperbolisia?
- Määritä hyperbolisten tasapainopisteiden tyypit.
- Hahmottele vektorikenttää f ja kuvaile differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisujen käyttäytymistä käsin tai Mathematicalla.

6.2. Olkoon $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ -funktio. Osoita, että differentiaaliyhtälön $\dot{x} = -\nabla V(x)$ linearisoinneilla tasapainopisteissä on vain reaalisia ominaisarvoja.³

6.3. Olkoon $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$V(x) = x_1^2(x_1 - 1)^2 + x_2^2.$$

Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä $\dot{x} = -\nabla V(x)$.

- Määritä differentiaaliyhtälön tasapainopisteet.
- Linearisoi yhtälö tasapainopisteissä.
- Määritä hyperbolisten tasapainopisteiden tyypit.
- Miten vektorikenttä $-\nabla V$ ja funktion V tasa-arvokäyrät suhtautuvat toisiinsa?
- Hahmottele differentiaaliyhtälön ratkaisujen käyttäytymistä.

6.4. Analysoi epälineaarisen heilurin differentiaaliyhtälön (5.1) tasapainopisteiden linearisoinnit kitkan b eri arvoilla. Mitä tapahtuisi, jos kitkaa kuvaava parametri olisikin negatiivinen?

6.5. Tarkastele differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} ax_1 - x_2 - ax_1\|x\|^2 \\ x_1 + ax_2 - ax_2\|x\|^2 \end{pmatrix}.$$

ratkaisuja, kun $a \in \mathbb{R}$.

6.6 (Van der Pol'n yhtälö). Van der Pol'n yhtälö kuvaa värähtelyilmiöitä, joita havaittiin 1920-luvulla eräissä tyhjiöputkia sisältävissä virtapiireissä. Olkoon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vektorikenttä

$$f(x) = \begin{cases} c\left(x_1 - \frac{x_1^3}{3} + x_2\right) \\ -\frac{x_1}{c} \end{cases},$$

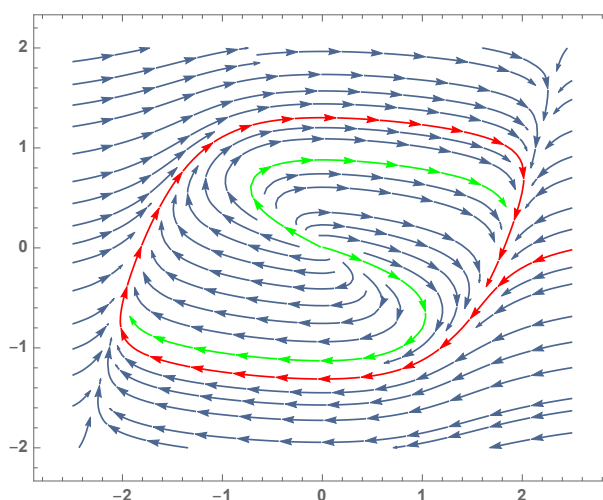
missä $c > 0$ on parametri. Määritä vektorikentän f tasapainopisteet ja linearisoinnit tasapainopisteissä. Millä parametrin c arvoilla voit päätellä linearisoinnista differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ luonteen tasapainopisteen lähellä? Miten ratkaisut käyttäytyvät näissä tapauksissa?

6.7. Olkoon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 + x_1^2 - x_2^2 \\ -x_1 - 2x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Etsi differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ tasapainopisteet ja määritä niiden tyypit.
- (b) Mitä linearisointi kertoo tämän differentiaaliyhtälön ratkaisuista?
- (c) Miten ratkaisut käyttäytyvät hyperbolisten tasapainopisteiden kautta kulkevilla suorilla?
- (d) Hahmottele vektorikenttää f ja kuvaile differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisujen käyttäytymistä.

³Vektoricalculus/analyysi ja Lineaarinen algebra ja geometria 2 auttavat.



Kuva 6.7: Van der Pol'n yhtälön ratkaisuja parametrilla $c = 2$.

6.8. Ratkaise vektorikentän $f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ 2x_2 + x_1^2 \end{pmatrix}$ määräämä differentiaaliyhtälö.

6.9. Olkoon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Tällöin 0 on vektorikentän f tasapainopiste, joka ei ole hyperbolinen. Miten ratkaisut käyttäytyvät tasapainopisteen lähellä?

6.10. Määritä differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\sin x_1 \left(\frac{\cos x_1}{10} + \cos x_2 \right) \\ \sin x_2 \left(\cos x_1 - \frac{\cos x_2}{10} \right) \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

tasapainopisteet. Mitä voit päätellä linearisoinneista tasapainopisteissä?

Luku 7

Liapunovin menetelmä

Tasapainopisteen vakaus tai asymptoottinen vakaus voidaan joskus päätellä tässä luvussa tarkasteltavalla Liapunovin menetelmällä. Tässä menetelmässä differentiaaliyhtälön ratkaisua ei tarvitse tuntea mutta tarvitaan vektorikentän kanssa oikealla tavalla yhteensopiva reaaliarvoinen funktio.

Tässä luvussa tarkastelemme myös fysiikassa merkittäviä Hamiltonin systeemejä, joiden energiafunktio eli Hamiltonin funktio on monissa tapauksissa Liapunovin funktio. Yleisessäkin tapauksessa Hamiltonin systeemin radat sisältyvät energiafunktion tasa-arvojoukkoihin, mikä helpottaa usein ratkaisujen käyttäytymisen selvittämistä erityisesti tason systeemeissä.

Johdannoksi tarkastelemme Lotkan ja Volterran yhtälöä, joka on klassinen esimerkki peto-saalismallista.

7.1 Tason yhtälön ratkaisukäyrien etsiminen separoimalla

Olkoon $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ ja olkoot $1 \leq k \leq n$. Joukot

$$N_k(f) = \{x \in U : f_k(x) = 0\},$$

ovat vektorikentän f nollakliinit.

Lemma 7.1. *Olkoon $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Joukko $\bigcap_{k=1}^n N_k(f)$ on vektorikentän f tasapainopisteiden joukko.* \square

Nollakliinit jakavat joukon U osiin, joissa kullakin ratkaisun osittaisderivaatalla on kiinteä merkki. Joissain tilanteissa tämä jako auttaa vektorikentän määräämään differentiaaliyhtälön ratkaisujen tarkastelussa. Esimerkiksi tason tapauksessa vektorikenttä on vaakasuora nollakliinilla $N_2(f)$ ja pystysuora nollakliinilla $N_1(f)$.

Tason differentiaaliyhtälön

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x) \\ \dot{x}_2 = f_2(x) \end{cases}$$

ratkaisuja voi yrittää löytää seuraavalla menetelmällä: Jos $x(t_0) \notin N_1(f)$, niin $\dot{x}_1(t_0) \neq 0$. Tällöin funktio x_1 on bijektio jossain pisteen $x_1(t_0)$ ympäristössä $I =]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$. Jos $t_1 \in I$, niin¹

$$\frac{d}{dx} x_1^{-1}(x_1(t_1)) = \frac{1}{\dot{x}_1(t_1)} = \frac{1}{f_1(x(t_1))}.$$

Siis differentiaaliyhtälön

$$\frac{d}{dx} (x_2 \circ x_1^{-1})(x_1(t_1)) = \frac{\dot{x}_2(t_1)}{\dot{x}_1(t_1)} = \frac{f_2(x(t_1))}{f_1(x(t_1))}$$

ratkaisut antavat komponenttifunktioiden x_1 ja x_2 riippuvuuden alkuarvon lähellä. Vastavasti, jos $x(t_0) \notin N_2(f)$, niin saadaan differentiaaliyhtälö $\frac{d}{dt} x_1 \circ x_2^{-1} = \frac{f_1}{f_2}$. Yleensä jälkimmäinen näistä yhtälöistä kirjoitetaan muodossa

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

Joissain tilanteissa, kun näin saatu differentiaaliyhtälö separoituu, se saadaan ratkaistua niin, että ratkaisukäyrälle saadaan yhtälö. Tällä tavalla ei kuitenkaan saada ratkaisun lauseketta eli sitä, millä nopeudella ratkaisu parametrizoi ratkaisukäyrän.

Esimerkki 7.2 (Lotkan ja Volterran yhtälö). Tarkastellaan esimerkkiä differentiaaliyhtälöiden käytöstä biologisen tilanteen mallittamisessa. Meressä on kahdenlaisia kaloja: haikaloja ja hainruokaa.

Olkoon haikaloiden lukumäärä h ja hainruoan lukumäärä r . Oletetaan, että ilman haikaloja hainruoan populaatio kehittyisi Esimerkissä 1.1(1) käsitellyn Malthusin lain mukaan eksponentiaalisesti yhtälön $\dot{r} = \alpha r$ mukaan, missä α on positiivinen vakio. Haikaloiden ja hainruoan kohtaamista tapahtuu $\beta_0 hr$ kappaletta ja jollain todennäköisyydellä β_1 hai syö hainruoan. Siis hainruoan määrä vähenee nopeudella βhr . Vastaavasti haikaloiden lukumäärän luonnollinen poistumanopeus on suhteessa lukumäärään γh ja ruoan saanti kasvattaa populaatiota nopeudella δhr . Näiden kahden lajin lukumääriä säätelee tämän päättelyn mukaisesti differentiaaliyhtälöpari

$$\begin{cases} \dot{r} = (\alpha - \beta h)r, \\ \dot{h} = (-\gamma + \delta r)h \end{cases} \quad (7.1)$$

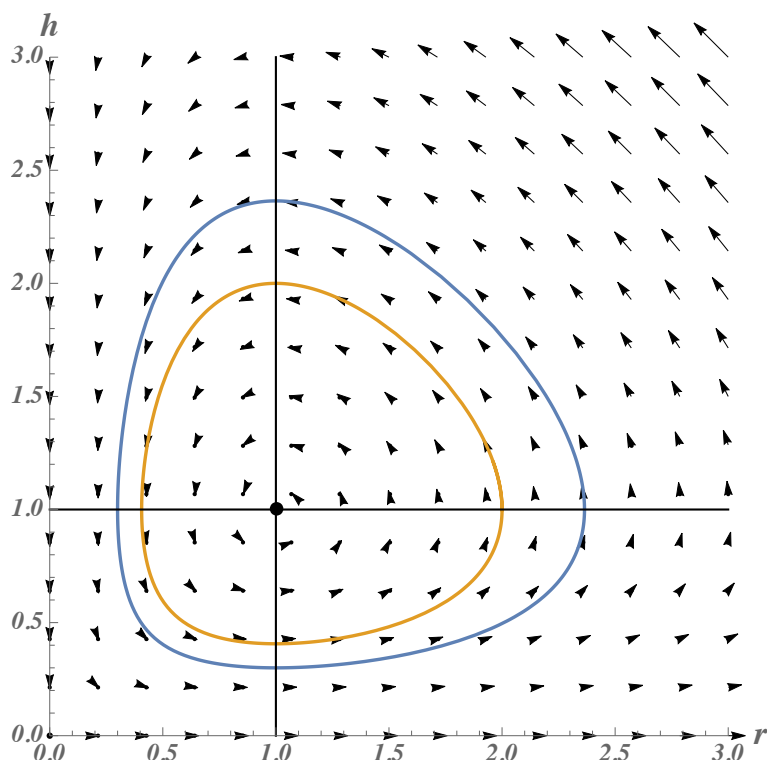
joillain vakioilla $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$.

On helppo nähdä, että alkuarvoa $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ vastaa vakioratkaisu: $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ on vektorikentän

$$f(r, h) = ((\alpha - \beta h)r, (\delta r - \gamma)h),$$

tasapainopiste.

¹Tässä $\frac{d}{dx}$ tarkoittaa derivointia joukossa $x_1(I) \subset \mathbb{R}$.



Etsitään differentiaaliyhtälön (7.1) ratkaisukäyrät edellä kuvatulla menetelmällä. Yhtälön $r = \frac{\gamma}{\delta}$ määräämän h -nollakliinin komplementissa saadaan differentiaaliyhtälö

$$\frac{dr}{dh} = \frac{(\alpha - \beta h)r}{(-\gamma + \delta r)h}.$$

Tämä on separoituva yhtälö, joka on helppo ratkaista (implisiittisesti): Ratkaisut toteuttavat yhtälön $\delta r + \beta h - \gamma \log r - \alpha \log h = C_0$ jollain vakiolla $C_0 \in \mathbb{R}$. Olkoon $L_0: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$,

$$L_0(r, h) = \delta r + \beta h - \gamma \log r - \alpha \log h.$$

Toisen derivaatan testillä näkee helposti, että tasapainopiste $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ on funktion L_0 globaali minimi. Olkoon

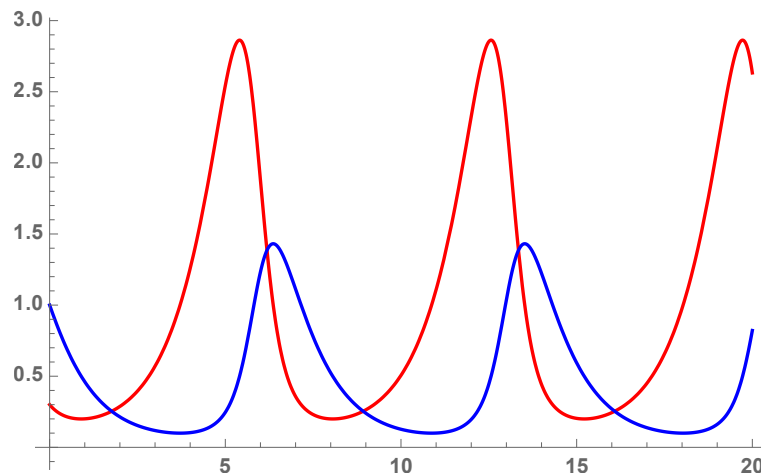
$$L(r, h) = L_0(r, h) - L_0(\gamma/\delta, \alpha/\beta).$$

Funktion L tasa-arvojoukot $L^{-1}(T)$, $T > 0$, ovat topologisia ympyröitä, jotka eivät sisällä yhtään vektorikentän f tasapainopistettä. Alkuarvotetävän maksimaalinen määrittelyväli on \mathbb{R} jokaisella alkuarvolla $(r_0, h_0) \in]0, \infty[\times]0, \infty[$. Jokaisen pisteen rata sisältyy topologiseen ympyrään, jota ratkaisu kiertää pysähtymättä.

7.2 Liapunovin funktio

Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä. Differentioituvan funktion $L: U \rightarrow \mathbb{R}$ rataderivaatta eli Lien derivaatta vektorikentän f suuntaan on

$$\dot{L}(x) = DL(x)f(x) = (\nabla L(x) \mid f(x)).$$



Kuva 7.1: Hain ja hainruoan populaatioiden kehitys alkuarvoilla $r_0 = 0.3$, $h_0 = 1$ ja parametreilla $a = c = d = 1$, $b = 2$.

Lemma 7.3. *Olkkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä. Jos $L: U \rightarrow \mathbb{R}$ on differentioituva ja x on differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisu, niin*

$$\dot{L}(x(t)) = \frac{d}{dt}L \circ x(t).$$

Todistus. Ketjusäännön nojalla

$$\frac{d}{dt}L \circ x(t) = DL(x(t))\dot{x}(t) = (\nabla L(x(t)) \mid \dot{x}(t)) = (\nabla L(x(t)) \mid f(x(t))) = \dot{L}(x(t)),$$

koska x on ratkaisu. □

Propositio 7.4. *Olkkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -vektorikenttä. Jos $L: U \rightarrow \mathbb{R}$ on differentioituva ja $\dot{L} = 0$, niin differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisut sisältyvät funktion L tasa-arvojoukkoihin.*

Todistus. Jos $\dot{L} = 0$ ja x on ratkaisu, niin Lemman 7.3 nojalla $\frac{d}{dt}L \circ x(t) = \dot{L}(x(t)) = 0$ kaikilla t , joten $L \circ x$ on vakio. □

Olkkoon $V \subset U$ vektorikentän f tasapainopisteen b avoin ympäristö. Differentioituva funktio $L: V \rightarrow \mathbb{R}$ on vektorikentän f Liapunovin funktio pisteessä b , jos

- (1) $L(b) = 0$ ja $L(x) > 0$ kaikilla $x \in V - \{b\}$ ja
- (2) $\dot{L}(x) \leq 0$ kaikilla $x \in V - \{b\}$.

Lause 7.5 (Liapunovin lause). *Olkkoon b vektorikentän $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tasapainopiste. Jos jossain pisteen b avoimessa ympäristössä $V \subset U$ on Liapunovin funktio, niin b on vakaa.*

Todistus. Olkkoon L Liapunovin funktio pisteessä b . Olkkoon $\delta > 0$ siten, että $\overline{B}(b, \delta) \subset V$ ja olkkoon

$$\alpha = \min_{x \in \partial B(b, \delta)} L(x) > 0.$$

Olkoon

$$W = \{x \in B(b, \delta) : L(x) < \alpha\}.$$

Nyt W on tasapainopisteen b avoin ympäristö ja koska $\dot{L} \leq 0$, niin joukosta W lähtevät ratkaisut pysyvät siinä. Seurauksen 5.12 nojalla ratkaisun maksimaalinen määrittelyväli on ylhäältä rajoittamaton, koska W sisältyy kompaktiin palloon $\overline{B}(b, \delta)$. Siispä b on vakaa. \square

Esimerkki 7.6. Esimerkin 7.2 funktio L on Lotkan ja Volterran yhtälön Liapunovin funktio tasapainopisteessä $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$, sillä

$$DL(r, h)f(r, h) = \left(\delta - \frac{\gamma}{r} \quad \beta - \frac{\alpha}{h} \right) \begin{pmatrix} (\alpha - \beta h)r \\ (\delta r - \gamma)h \end{pmatrix} = 0.$$

Esimerkki 7.7. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$. Tarkastellaan lineaarista differentiaaliyhtälöä

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 2\pi i z_1 \\ \dot{z}_2 = 2\pi \alpha i z_2 \end{cases} \quad (7.2)$$

avaruudessa \mathbb{C}^2 . Jos \mathbb{C}^2 ja \mathbb{R}^4 samastetaan asettamalla $z_1 = x_1 + iy_1$ ja $z_2 = x_2 + iy_2$, saadaan reaalin differentiaaliyhtälö

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2\pi y_1 \\ \dot{y}_1 = 2\pi x_1 \\ \dot{x}_2 = -2\pi \alpha y_2 \\ \dot{y}_2 = 2\pi \alpha x_2 \end{cases}$$

Funktio $L: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$L(z_1, z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2,$$

on lineaarisen differentiaaliyhtälön (7.2) Liapunovin funktio ja $\dot{L} \equiv 0$. Kuten edelläkin Liapunovin funktion tasa-arvojoukot ovat hyperpintoja, nyt ne ovat 3-ulotteisia pallopinnoja.

Yhtälö (7.2) on helppo ratkaista: Kuvaus

$$z_\alpha(t) = (e^{2\pi i t} w_1, e^{2\pi \alpha i t} w_2)$$

on ratkaisu alkuarvolla $z_\alpha(0) = (w_1, w_2)$. Ratkaisun kumpikin kompleksinen koordinaatti parametrizoi 0-keskisen ympyrän kompleksitasossa.

Jos $\alpha = p/q$ on rationaaliluku, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$, niin

$$z_\alpha(t+q) = (e^{2\pi i(t+q)} w_1, e^{2\pi \frac{p}{q} i(t+q)} w_2) = (e^{2\pi i t + 2\pi i q} w_1, e^{2\pi \frac{p}{q} i t + 2\pi i p} w_2) = z_\alpha(t),$$

joten kaikki radat ovat jaksollisia. Erityisesti kaikkien tasapainopisteestä 0 poikkeavien pisteiden radat ovat homeomorfisia ympyrän \mathbb{S}^1 kanssa.

Jos α on irrationaaliluku, niin kuvaus $z_\alpha(z)$ on injektiivinen kaikille $z \in \mathbb{C}^2$, joille $z_1 \neq 0$ ja $x_2 \neq 0$, sillä $e^{2\pi i q} = 1$, jos ja vain jos $q \in \mathbb{Z}$ mutta $e^{2\pi i \alpha q} \neq 1$ kaikilla $q \in \mathbb{Z}$. Osoittautuu, että pisteen (w_1, w_2) radan sulkeuma on *torus*

$$\begin{aligned} T(|w_1|, |w_2|) &= \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| = |w_1|, |z_2| = |w_2|\} \\ &= \{z_1 \in \mathbb{C} : |z_1| = |w_1|\} \times \{z_2 \in \mathbb{C} : |z_2| = |w_2|\}, \end{aligned}$$

joka on siis kahden ympyrän karteeminen tulo.

7.3 Hamiltonin systeemit

Tässä luvussa tutustumme fysiikassa merkittävään differentiaaliyhtälöiden tyyppiin, jonka tarkastelussa Liapunovin lauseet ovat hyödyllisiä. Otamme ensin käyttöön uuden merkinnän:

Olkkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkkoon $H: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 -funktio. Kirjoitetaan pisteen $z \in \Omega$ koordinaatit muodossa $z = (x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H(x, y)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H(x, y)}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H(x, y)}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H(x, y)}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

Olkkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkkoon $H: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 -funktio. Differentiaaliyhtälö

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} \end{cases}$$

on *Hamiltonin systeemi*, jolla on n vapausastetta. Funktio H on systeemin *kokonaisenergia* tai *Hamiltonin funktio*.^a

^aMekaniikassa x kuvaa kappaleen paikkaa ja y sen liikemomenttia, katso Esimerkki 7.9.

Propositio 7.8. *Hamiltonin systeemin ratkaisut sisältyvät kokonaisenergiafunktion tasarvojoukkoihin*

Todistus. Harjoitustehtävä 7.4. □

Esimerkki 7.9 (Epälineaarinen heiluri). Jäykällä varrella akseliin kiinnitetyn heilurin liikettä kuvaa Esimerkissä 5.1 ja Harjoitustehtävässä 6.4 tarkasteltu differentiaaliyhtälö

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\sin \theta - bv \end{cases} \quad (7.3)$$

Differentiaaliyhtälöllä (7.3) on numeroituva joukko tasapainopisteitä: Tasapainopisteet $(\pi + k2\pi, 0)$ vastaavat heilurin yläasemaa. Näissä pisteissä yhtälön linearisointi

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -b \end{pmatrix}$$

on hyperbolinen kaikilla $b \geq 0$ ja ominaisarvojen tulo on negatiivinen. Nämä tasapainopisteet ovat siis Lauseen 6.6 nojalla epävakaita. Tasapainopisteet $(k2\pi, 0)$ taas vastaavat heilurin ala-asemaa. Näissä pisteissä yhtälön linearisointi on

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{pmatrix}.$$

Jos kitka on positiivinen, niin ala-asema on vakaa tasapainopiste, jos taas $b = 0$, niin ominaisarvot ovat puhtaasti imaginaarisia ja linearisointi on keskus.

Kitkaton matemaattinen heiluri on Hamiltonin systeemi. Sen Hamiltonin funktio on systeemin energia

$$E(\theta, v) = \frac{1}{2}v^2 + 1 - \cos \theta.$$

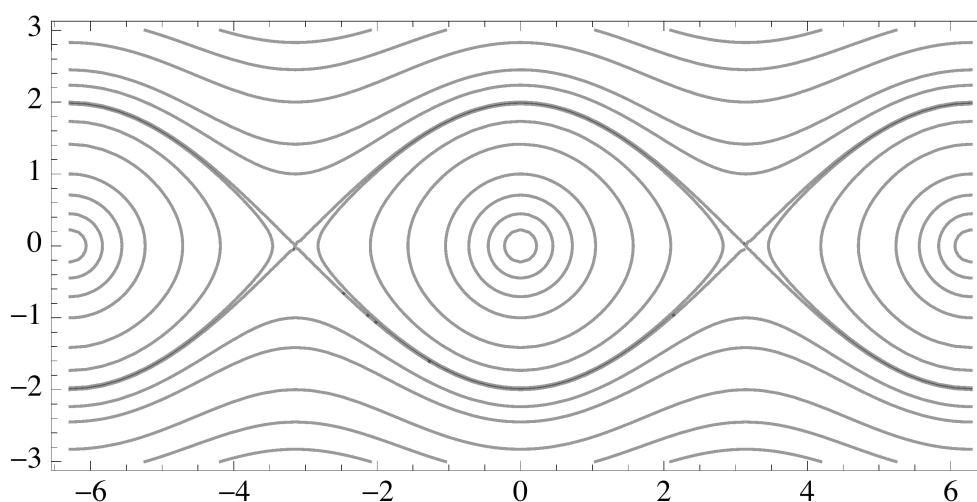
joka koostuu *liike-energiasta* $\frac{1}{2}v^2$ ja *potentiaalienergiasta* $1 - \cos \theta$.

Nyt $E(k2\pi, 0) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. ja $E(\theta, v) > 0$, kun $(\theta, v) \neq (k2\pi)$ ja

$$\dot{E} = DE(\theta, v) \begin{pmatrix} v \\ -\sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ -\sin \theta \end{pmatrix} = 0,$$

joten energia on Liapunovin funktio ala-asemaa vastaavissa tasapainopisteissä $(\theta, v) = (k2\pi, 0)$. Erityisesti siis 0 on vakaa tasapainopiste.

Koska energia on sileä funktio, jonka gradientin nollakohdat ovat vektorikentän tasapainopisteissä, sen tasa-arvokäyrät ovat sileitä käyriä tasapainopisteiden ulkopuolella. Kuten Lotkan ja Volterran yhtälön tapauksessa näemme, että tasa-arvokäyrät ovat systeemin suljettuja ratoja, kun $E(\theta, v) < 2 = E(\pi, 0)$.



Kuva 7.2: Kitkattoman epälineaarisen heilurin yhtälön ratkaisuja.

Olkoon $U \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko ja olkoon $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ C^1 -vektorikenttä. Olkoon b differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ satulapiste. Tasapainopisteen b *vakaa käyrä* on

$$W^s(b) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \phi_t(x) \rightarrow b, \text{ kun } t \rightarrow \infty\}$$

ja sen *epävakaa käyrä* on

$$W^u(b) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \phi_t(x) \rightarrow b, \text{ kun } t \rightarrow -\infty\}$$

Esimerkki 7.10. Kitkattoman epälineaarisen heilurin hyperbolisten tasapainopisteiden $((1 + 2k)\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, (globaalit) vakaat ja epävakaat käyrät saadaan valitsemalla vuorotellen alempi ja ylempi haara kokonaisenergian tasa-arvojoukossa

$$\{(\theta, v) \in \mathbb{R}^2 : E(\theta, v) = E(\pi, 0) = 2\} = \{(\theta, v) \in \mathbb{R}^2 : v^2 = 2(1 + \cos \theta)\},$$

kuvan 7.2 mukaisesti.

Jatkuvasti differentioituvan vektorikentän $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tasapainopiste b on *surkastumaton* (tai *degeneroitumaton*), jos $Df(p)$ on kääntyvä.

Propositio 7.11. *Yhden vapausasteen Hamiltonin systeemin surkastumattoman tasapainopisteen linearisointi on keskus tai satula. Linearisointi tasapainopisteessä b on*

- *keskus, jos ja vain jos b on Hamiltonin funktion aito lokaali minimi tai maksimi.*
- *satula, jos ja vain jos b on Hamiltonin funktion satulapiste.*

Todistus. Harjoitustehtävä 7.5. □

Tämän avulla osoitetaan

Propositio 7.12. *Olkoon b yhden vapausasteen Hamiltonin systeemin degeneroitumaton tasapainopiste. Tällöin*

- *Jos linearisointi pisteessä b on keskus, niin b vakaa mutta ei asympotoottisesti vakaa.*
- *Jos linearisointi pisteessä b on satula, niin b on epävakaa.*

Todistus. Jos linearisointi on satula, niin b on epävakaa Lauseen 6.6 nojalla.

Oletetaan, että linearisointi on keskus. Tällöin b on Hamiltonin funktion lokaali aito minimi tai maksimi Proposition 7.11 nojalla. Lokaalin aidon minimin tai maksimin lähellä Hamiltonin funktion tasa-arvokäyrät ovat ympyröitä. Proposition 7.8 nojalla radat sisältyvät tasa-arvojoukkoihin, joten b on vakaa mutta ei asympotoottisesti vakaa. □

Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ avoin väli ja olkoon $f \in C^1(I, \mathbb{R})$. Funktion f määräämä *Newtonin systeemi* on toisen asteen differentiaaliyhtälö $\ddot{x} = f(x)$ tai vastaava differentiaaliyhtälöpari

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x) \end{cases} \quad (7.4)$$

Newtonin systeemin *liike-energia* on $T(v) = \frac{1}{2}v^2$ ja sen *potentiaalienergia* pisteen $x_0 \in I$ suhteen on

$$V(x) = - \int_{x_0}^x f(s) ds .$$

Systeemin *kokonaisenergia* on $E = T + V$.

Propositio 7.13. *Newtonin systeemi on yhden vapausasteen Hamiltonin systeemi, jonka Hamiltonin funktio on systeemin energia.*

Todistus. Newtonin systeemille (7.4) pätee

$$\frac{\partial E(x, v)}{\partial x} = \partial V'(x) = -f(x)$$

ja

$$\frac{\partial E(x, v)}{\partial v} = T'(v) = v. \quad \square$$

Esimerkki 7.14. Esimerkissä 7.9 tarkasteltu kitkaton matemaattinen heiluri on Newtonin systeemi. Sen kokonaisenergia koostuu liike-energiasta $\frac{1}{2}v^2$ ja potentiaalienergiasta $1 - \cos \theta$.

7.4 Aito Liapunovin funktio

Olkoon $V \subset U$ vektorikentän f tasapainopisteen b avoin ympäristö. Differentioituva funktio $L: V \rightarrow \mathbb{R}$ on vektorikentän f *aito Liapunovin funktio* pisteessä b , jos se on Liapunovin funktio pisteessä b ja

$$(\hat{2}) \quad \dot{L}(x) < 0 \text{ kaikilla } x \in V - \{b\}.$$

Lause 7.15 (Liapunovin lause). *Olkoon b vektorikentän $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tasapainopiste. Jos jossain pisteen b avoimessa ympäristössä $V \subset U$ on aito Liapunovin funktio, niin b on asymptoottisesti vakaa.*

Todistus. Jatkamme Lauseen 7.5 merkinnöillä. Oletetaan, että $\dot{L}(x) < 0$ kaikilla $x \neq b$. Olkoon x differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisu, jolle $x(0) \in W$. Erityisesti pisteen $x(0)$ positiivinen rata on rajoitettu, joten kompaktiuden nojalla on rajattomasti kasvava jono $(t_k)_{k=1}^\infty$ siten, että $x_{t_k} \rightarrow w_0$ jollain $w_0 \in \bar{W}$. Koska V on aito Liapunovin funktio, saadaan Lemman 7.3 ja jatkuvuuden nojalla

$$V(w_0) < V(x_t) \tag{7.5}$$

kaikilla $t \geq 0$.

Oletetaan, että $w_0 \neq b$. Olkoon w ratkaisu, jolle pätee $w(0) = w_0$. Olkoon $s > 0$. Tällöin $L(w(s)) < L(w_0)$, koska L on aito Liapunovin funktio. Proposition 5.7 nojalla $V(x_{t_k+s}) < V(w_0)$, kun k valitaan niin, että x_{t_k} on riittävän lähellä pistettä w_0 , joten on päädytty ristiriitaan epäyhtälön (7.5) kanssa. \square

Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkoon $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ sileä funktio. Differentiaaliyhtälö

$$\dot{x} = -\nabla V(x) \tag{7.6}$$

on funktiota V vastaava *gradienttisysteemi*.

Propositio 7.16. *Olkoon V sileä funktio. Tällöin*

- (1) *vektorikenttä $-\nabla V$ on kohtisuorassa funktion V tasa-arvojoukkoa vastaan jokaisessa vektorikentän $-\nabla V$ säännöllisessä pisteessä. Tämän pisteen ympäristössä funktion V tasa-arvojoukot ovat hyperpintoja.*

- (2) jos b on gradienttisysteemin (7.6) tasapainopiste, niin sen linearisoinnin kaikki ominaisarvot ovat reaalisia.
- (3) jos b on funktion V eristetty kriittinen piste, joka on aito lokaali minimipiste, niin funktio $x \mapsto V(x) - V(b)$ on on vastaavan gradienttisysteemin (7.6) aito Liapunovin funktio pisteessä b ja b on systeemin asymptoottisesti vakaa tasapainopiste.

Todistus. Kohdat (1) ja (2) tehdään kuten Harjoitustehtävässä 6.3.

Kohdan (3) todistusta varten huomaamme, että funktio $x \mapsto V(x) - V(b)$ on selvästi positiivinen jossain pisteen b punkteeratussa ympäristössä. Lisäksi

$$\dot{V}(x) = DV(x)(-\nabla V(x)) = -\|\nabla V(x)\|^2 < 0,$$

koska oletimme, että b on eristetty kriittinen piste. Väite seuraa Liapunovin lauseesta 7.15. \square

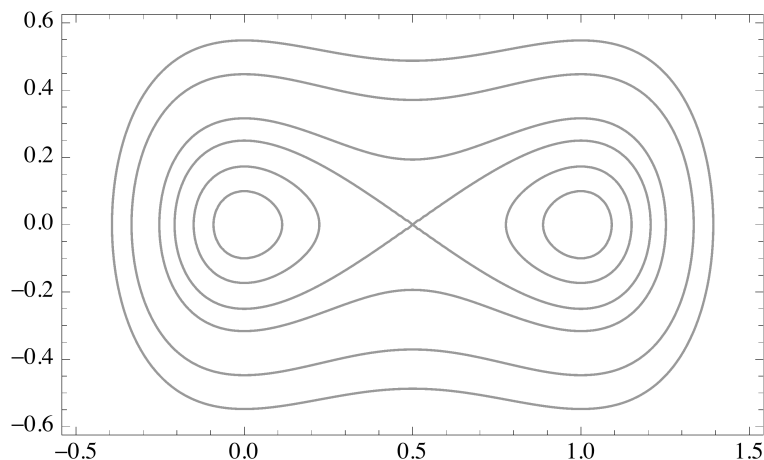
Esimerkki 7.17. Funktio $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$V(x) = x_1^2(x_1 - 1)^2 + x_2^2,$$

määrää gradienttisysteemin

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -4x_1(x_1 - \frac{1}{2})(x_1 - 1) \\ -2x_2 \end{pmatrix},$$

jota tarkasteltiin Harjoitustehtävässä 6.3. Vektorikenttä ∇V on kohtisuorassa funktion V tasa-arvokäyriä vastaan. Koska $\nabla V(x) = 0$ ainoastaan, jos $x_2 = 0$ ja $x_1 \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, niin tasa-arvokäyrät ovat sileitä kaikkialla paitsi tasapainopisteessä $(\frac{1}{2}, 0)$. Pisteet $(0, 0)$ ja $(1, 0)$ ovat funktion V minimipisteitä, joten V on aito Liapunovin funktio näissä pisteissä.



Kuva 7.3: Esimerkin 7.17 funktion V tasa-arvokäyriä

Harjoitustehtäviä

7.1. Esimerkissä 7.2 osoitimme, että Lotkan ja Volterran yhtälön ratkaisut ovat jaksollisia jollain tuntemattomalla jakson pituudella T . Määritä hain ja hainruoan populaatioiden keskiarvot $\frac{1}{T} \int_0^T h(t) dt$ ja $\frac{1}{T} \int_0^T r(t) dt$.²

7.2. Kun Lotkan ja Volterran malliin lisätään populaatioiden sisäistä kilpailua kuvaavat termit, saadaan differentiaaliyhtälö

$$\begin{cases} \dot{r} = ar - bhr - er^2, \\ \dot{h} = -ch + dhr - fh^2, \end{cases}$$

missä $a, b, c, d, e, f > 0$. Miten ratkaisut käyttäytyvät?

7.3. Olkoon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vektorikenttä $f(x) = \begin{pmatrix} 4 - 2x_2 \\ 12 - 3x_1^2 \end{pmatrix}$.

- Määritä vektorikentän f tasapainopisteet.
- Määritä vektorikentän f linearisoinnit tasapainopisteissä.
- Mitä voit päätellä tasapainopisteiden vakaudesta linearisointien perusteella?
- Määritä differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisukäyrät.³
- Miten alkuarvot tehtävän

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = (-4, 2) \end{cases}$$

ratkaisut käyttäytyvät, kun $t \rightarrow -\infty$ ja $t \rightarrow \infty$?

7.4. Osoita, että Hamiltonin systeemin kokonaisenergian rataderivaatta on 0. Osoita, että Hamiltonin systeemin ratkaisukäyrät sisältyvät kokonaisenergian tasa-arvojoukkoihin.

7.5. Todista Propositio 7.11.⁴

7.6. Ratkaise kokonaisenergiaa

$$H(x, y) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2}{2}$$

vastaava kahden vapausasteen Hamiltonin systeemi.

7.7. Olkoon $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $V(t) = (t^2 - 1)^2$. Tarkastele tason differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -V'(x_1) - \mu x_2 \end{pmatrix}$$

tasapainopisteitä parametrin $\mu \geq 0$ eri arvoilla.

7.8. Olkoon $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorikenttä

$$f(x) = (2x_2(x_3 - 1), -x_1(x_3 - 1), -x_3^3).$$

Osoita, että funktio $L(x) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2$ on vektorikentän f Liapunovin funktio origossa sopivalla vakioiden a, b, c valinnalla. Mitä voit päätellä origon vakaudesta?

²Tarkastele funktioiden $\frac{\dot{r}}{r}$ ja $\frac{\dot{h}}{h}$ integraaleja.

³Katso lukua 7.1.

⁴Laske ominaisarvot.

7.9. Osoita, että differentiaaliyhtälö

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + x^2 \end{cases}$$

on Hamiltonin systeemi. Määritä kriittisten pisteiden vakaas. Määritä hyperbolisten kriittisten pisteiden globaalit vakaat ja epävakaat käyrät.

7.10. Osoita, että differentiaaliyhtälö⁵

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x^2 - y^2 \\ \dot{y} = -x - 2xy \end{cases}$$

on Hamiltonin systeemi. Määritä kriittisten pisteiden vakaas. Määritä hyperbolisten kriittisten pisteiden globaalit vakaat ja epävakaat käyrät.

7.11. Osoita, että funktio $L(x) = \|x\|^2$ on differentiaaliyhtälön

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_1^3 \\ -x_2(x_1^2 + x_3^2 + 1) \\ -\sin x_3 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

aito Liapunovin funktio origossa.⁶

7.12. Arvioi niiden pisteiden joukkoa, joille differentiaaliyhtälön (7.7) ratkaisut lähestyvät origoa, kun $t \rightarrow \infty$.⁷

Lorenzin differentiaaliyhtälö on

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \sigma(x_2 - x_1) \\ rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ x_1x_2 - bx_3 \end{pmatrix}, \quad (7.8)$$

missä $\sigma, r, b > 0$.

7.13. Olkoon $0 < r < 1$. Osoita, että 0 on Lorenzin differentiaaliyhtälön ainoa tasapainopiste. Osoita, että funktio $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$V(x) = x_1^2 + \sigma(x_2^2 + x_3^2)$$

on aito Liapunovin funktio origossa.

⁵Katso Harjoitustehtävä 6.7

⁶Rajoita x_3 sopivasti.

⁷Miten ratkaisut käyttäytyvät tasoilla $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = \pm\pi\}$?

Liite A

Lineaarialgebraa

Tässä liitteessä palautamme mieleen lineaarialgebran kurseilla käsiteltyä ominaisarvoihin ja diagonalisoitumiseen liittyvää teoriaa. Laajennamme käsittelyä kompleksisiin ominaisarvoihin ja kompleksisiin vektoriavaruuksiin. Hyviä ja keskenään erilaisia lineaarialgebran lähteitä ovat esimerkiksi [Gre], [Gro], [Pet] ja [HJ].

A.1 Ominaisarvot ja ominaisvektorit

Jos A on reaalinen $n \times n$ -matriisi, niin vektori $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ on matriisin A *ominaisvektori* ominaisarvolla $\lambda \in \mathbb{R}$, jos $Av = \lambda v$.

Matriisin A reaalista ominaisarvoa λ vastaavat ominaisvektorit muodostavat nollavektorin kanssa *ominaisavaruuden*

$$E_\lambda = E_\lambda(A) = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = \lambda v\} = \ker(A - \lambda I).$$

Ominaisavaruuden E_λ dimensio on ominaisarvon λ *geometrinen kertaluku*.

Matriisin A *karakteristinen polynomi*

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Ominaisvektori on siis nollasta poikkeava vektori matriisia $A - \lambda I$ standardikannassa vastaavan lineaarikuvauksen ytimessä. Tästä nähdään, että matriisin A reaaliset ominaisarvot ovat karakteristisen polynomin reaaliset juuret. Kurseilla LAG1 ja LAG2 on tapana käsitellä ainoastaan reaalisia ominaisarvoja, mutta tällä kurssilla on luontevaa käsitellä myös karakteristisen polynomin kompleksisia juuria.

Jos A on reaalinen $n \times n$ -matriisi, ja $\lambda \in \mathbb{C}$ on karakteristisen polynomin χ_A juuri, niin λ on matriisin A ominaisarvo. Jos $\lambda \in \mathbb{R}$, niin se on *reaalinen ominaisarvo*, muuten se on *kompleksinen ominaisarvo*.

Matriisin A ominaisarvot muodostavat sen *spektrin* $\text{Sp}(A)$

Ominaisarvon kertaluku karakteristisen polynomin juurena on sen *algebraallinen kertaluku*.

Lemma A.1. Jos λ on reaalisen matriisin A ominaisarvo, niin myös sen kompleksikonjugaatte $\bar{\lambda}$ on ominaisarvo.

Todistus. Karakteristisen polynomin χ_A kertoimet ovat reaalisia. Jos $\chi_A(\lambda) = 0$, niin $0 = \overline{\chi_A(\lambda)} = \chi_A(\bar{\lambda})$. \square

Jos A on $n \times n$ -matriisi, niin sen karakteristisen polynomin aste on n . Algebran peruslauseen¹ mukaan karakteristisella polynomilla on kertaluku huomioiden n juurta.

Esimerkki A.2. (1) Matriisin $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ karakteristinen polynomi on

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

joten sillä on kompleksiset ominaisarvot i ja $-i$.

(2) Matriisilla $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on yksi algebraallisesti kaksinkertainen ominaisarvo 1. Ominaisarvon 1 geometrinen kertaluku on 1: Ominaisvektorit määrittävä yhtälöryhmä $Av = v$ kutistuu yhtälöksi $v_2 = 0$, joka määrää 1-ulotteisen aliavaruuden.

Lemma A.3. Matriisin determinantti on sen ominaisarvojen tulo.

Todistus. Jos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ovat matriisin $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ karakteristisen polynomin juuret siten, että k -kertainen juuri esiintyy luettelossa k kertaa, $\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda)$. Erityisesti polynomin $\chi_A(\lambda)$ vakiotermin on $\prod_{i=1}^n \lambda_i$. Toisaalta matriisin $B_\lambda = A - \lambda I_n = (B_{ij})_{i,j=1}^n$ determinantin

$$\chi_A(\lambda) = \det B_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) B_{\sigma(1)1} B_{\sigma(2)2} \cdots B_{\sigma(n)n}$$

termin $\varepsilon(\sigma) B_{\sigma(1)1} B_{\sigma(2)2} \cdots B_{\sigma(n)n}$, jossa esiintyy kertoimia B_{ii} , muuttujan λ suhteen vakiotermin on $\varepsilon(\sigma) A_{\sigma(1)1} A_{\sigma(2)2} \cdots A_{\sigma(n)n}$. Siis polynomin $\chi_A(\lambda)$ vakiotermin on

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = \det A. \quad \square$$

A.2 Konjugointi ja diagonalisoituvuus

Matriisi A on *diagonalisoituvaa*, jos se on jonkin diagonaalimatriisin konjugaatte.

Jos $n \times n$ -matriisi A on diagonalisoituvaa, niin vektoriavaruudella \mathbb{R}^n on kanta, joka koostuu matriisin A ominaisvektoreista. Tässä tapauksessa ominaisavaruuksien dimensioiden summa on n . Lineaarialgebran kursseilla osoitetuista tuloksista saadaan suoraan:

¹Katso esimerkiksi [Lan, Thm. IX.5.1] tai [Ahl, s. 122]. Algebran peruslause todistetaan esimerkiksi kompleksianalyysin kursseilla.

Lemma A.4. $n \times n$ -matriisi A on diagonalisoituva, jos ja vain jos sen ominaisarvojen geometristen kertalukujen summa on n .

Todistus. Katso esimerkiksi [Pet, Thm. 2..5.10]. □

Esimerkki A.5. Lineaarialgebran tulosten nojalla osoitetaan, että 2×2 -matriisi B on diagonalisoituva, jos sillä on kaksi eri (reaalista) ominaisarvoa. Toisaalta 2×2 -matriisi voi olla diagonalisoituva vaikka sillä olisi vain yksi ominaisarvo ($\lambda = \mu$ Esimerkissä 2.1) ja esimerkiksi matriisilla $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ei selvästi ole yhtään ominaisvektoria eikä siis yhtään reaalista ominaisarvoa, koska sitä standardikannassa vastaava lineaarikuvaus on kierto myötapäivään kulman $\pi/2$ verran.

Lause A.6. Olkoot A ja B reaalisia $n \times n$ -matriiseja, joille pätee $A = CBC^{-1}$ jollain kääntyvällä reaalilla $n \times n$ -matriisilla C . Tällöin

- (1) matriiseilla A ja B on samat ominaisarvot.
- (2) matriisia C vastaava lineaarikuvaus kuvaa matriisin B ominaisavaruuksia bijektiivisesti matriisin A ominaisavaruuksiksi.
- (3) $\text{tr } A = \text{tr } B$.
- (4) $\det A = \det B$. □

A.3 Kompleksista lineaarialgebraa

Lineaarisen algebran ja geometrian kursseilla käsitellään yleensä ainoastaan reaalisia vektoriavaruuksia ja niiden lineaarikuvauksia. Lineaarialgebran teoria voidaan kuitenkin muotoilla yleisemmin korvaamalla aksioomissa esiintyvä reaalilukujen kunta \mathbb{R} millä tahansa kunnalla, esimerkiksi rationaaliluvuilla tai kompleksiluvuilla. Kompleksinen lineaarialgebra auttaa meitä ymmärtämään paremmin esimerkiksi neliömatriisien jakautumista konjugaattiluokkiin.

Kompleksisen vektoriavaruuksien aksioomat ovat samat kuin reaaliosuudessa, mutta kaikki ominaisuudet, joissa reaaliosuudessa esiintyy \mathbb{R} vaaditaan kompleksiluvuille.

Olkoon $V \neq \emptyset$ joukko, jolla on laskutoimitus $+$ ja *vakiolla kertominen* $\mathbb{C} \times V \rightarrow V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$, jotka toteuttavat ehdot

- (1) $x + y = y + x$ kaikilla $x, y \in V$
- (2) $(x + y) + v = x + (y + v)$ kaikilla $x, y, v \in V$
- (3) on $0 \in V$, jolle $0 + x = x$ kaikilla $x \in V$ ja
- (4) jokaisella $x \in V$ on $-x \in V$, jolle $x + (-x) = 0$.
- (5) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ kaikille $\lambda \in \mathbb{C}$ ja $v, w \in V$,
- (6) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ kaikille $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ja $v \in V$,
- (7) $\mu(\lambda v) = (\mu\lambda)v$ kaikille $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ja $v \in V$ ja
- (8) $1v = v$ kaikille $v \in V$,

niin V varustettuna tällä rakenteella on \mathbb{C} -vektoriavaruus.^a

^aMuistamme algebrasta, että $(V, +)$ on kommutatiivinen ryhmä ehtojen (1)–(4) nojalla.

Yleisten vektoriavaruuksien teoriaan voi tutustua esimerkiksi lähteen [Gre] ja monien algebran kirjojen kuten [DF] avulla.

Esimerkki A.7. \mathbb{C}^n on kompleksinen vektoriavaruus, jonka (kompleksinen) dimensio on n : Standardikanta, joka koostuu vektoreista e_1, \dots, e_n , missä e_i on vektori, jonka ainoa nollasta poikkeava kerroin on $1 \in \mathbb{C}$ paikalla i , on selvästi lineaarisesti riippumaton.

Kompleksisessa vektoriavaruudessa \mathbb{C}^n määritellään vektorien reaali- ja imaginaariosa ja kompleksikonjugaatti komponenteittain kuvauksina $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$:

Jos $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, niin

$$\operatorname{Re} z = (\operatorname{Re} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n),$$

$$\operatorname{Im} z = (\operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Im} z_n)$$

ja

$$\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n).$$

Harjoitustehtäviä

A.1. Olkoon A reaalinen $n \times n$ -matriisi. Olkoon λ matriisin A ominaisarvo ja olkoon V sitä vastaava ominaisvektori. Osoita, että e^λ on matriisin $\exp A$ ominaisarvo ja että V on sitä vastaava ominaisvektori.

Liite B

Napakoordinaatit

Joissain tapauksissa differentiaaliyhtälön ratkaisujen käyttäytyminen on helpompi hahmottaa napakoordinaattien avulla.

Napakoordinaattikuvaus on $N: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$,

$$N(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Derivoimalla komponenttifunktiot saadaan

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{x}_2 &= \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta}, \end{aligned} \tag{B.1}$$

ja derivoimalla yhtälöiden

$$\begin{cases} r^2 = x_1^2 + x_2^2 \\ \theta = \arctan \frac{x_2}{x_1} \end{cases}$$

vasemmat ja oikeat puolet saadaan käyttökelpoiset yhtälöt

$$\begin{cases} r\dot{r} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\ r^2\dot{\theta} = x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1. \end{cases} \tag{B.2}$$

Näiden yhtälöiden avulla voidaan usein muodostaa alkuperäisen yhtälöparin kanssa yhtäpitävä yhtälö napakoordinaateissa. Joskus tämä uusi yhtälö on helpompi ratkaista kuin alkuperäinen.

Liite C

Metriset avaruudet

Tässä liitteessä käsittelemme metristen avaruuksien teoriaa olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen todistuksen tarpeisiin. Metrisiä avaruuksia käsitellään yksityiskohtaisemmin omalla kurssillaan,¹

C.1 Metriikka

Olkoon $X \neq \emptyset$. Kuvaus $d: X \times X \rightarrow [0, \infty[$ *metriikka* joukossa X , jos

- $d(x, y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$ (positiivisuus),
- $d(x, y) = d(y, x)$ kaikille $x, y \in X$ (symmetrisyys) ja
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ kaikille $x, y, z \in X$ (kolmioepäyhtälö)

Pari (X, d) on *metrinen avaruus*.

Metriikka on tapa mitata joukon X pisteiden etäisyyksiä, sen määritelmään on valittu ominaisuuksia, jotka euklidisen normin määräämällä avaruuden \mathbb{R}^n euklidisella etäisyydellä (metriikalla)

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

on.

Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Joukon A metriikka $d|_{A \times A}$ on metrisen avaruuden X *indusoima* metriikka joukossa A .

Käytämme indusoidulle metriikalle usein samaa merkintää kuin ympäröivän avaruuden X metriikalle.

¹Katso esimerkiksi [Par]

Esimerkki C.1 (S^n). Euklidisen avaruuden yksikköpallon pinta on

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{E}^n : \|x\| = 1\}.$$

Koska S^{n-1} on epätyhjä joukko, sille voidaan määritellä diskreetti metriikka. Koska S^{n-1} on ympäröivän euklidisen avaruuden epätyhjä osajoukko, sillä on euklidisen avaruuden indusoima metriikka.

C.2 Täydellinen metrinen avaruus

Metrisen avaruuden (X, d) Cauchyn jonot ja jonojen suppeneminen määritellään kuten euklidisessa avaruudessa.

Metrinen avaruus X on *täydellinen*, jos sen kaikki Cauchyn jonot suppenevat.

Esimerkki C.2. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ suljettu ja rajoitettu väli. Välillä I määriteltyjen jatkuvien kuvausten $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektoriavaruus $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ varustettuna maksiminormilla

$$\|f\|_{\max} = \max_{t \in I} \|f(t)\|$$

on täydellinen metrinen avaruus, kun se varustetaan metriikalla $d_{\max}(f, g) = \|f - g\|_{\max}$. Jono $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ suppenee normiavaruudessa $C^0(I, \mathbb{R}^n) = (C^0(I, \mathbb{R}^n), f_{\max})$, jos ja vain jos se suppenee tasaisesti.

Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia ja olkoon $K > 0$. Kuvaus $F: X \rightarrow Y$ on *K-Lipschitz-kuvaus* tai *K-Lipschitz(-jatkuva)*, jos

$$d_Y(F(x), F(y)) \leq K d_X(x, y)$$

kaikille $x, y \in X$. Jos F on *K-Lipschitz* jollain $K > 0$, niin sanotaan, että F on *Lipschitz-jatkuva*. Jos F on *K-Lipschitz* jollain $K < 1$, niin sanotaan, että F on *kutistava* (vakiolla K).

Piste $x \in X$ on kuvauksen $F: X \rightarrow X$ *kiintopiste*, jos $F(x) = x$.

Lause C.3 (Banachin kiintopistelause). *Olkoon X täydellinen metrinen avaruus. Tällöin jokaisella kutistavalla kuvauksella $F: X \rightarrow X$ on täsmälleen yksi kiintopiste.*

Todistus. Olkoon $x \in X$ ja olkoot $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Olkoon $F: X \rightarrow X$ kutistava kuvaus vakiolla $K < 1$. Tällöin

$$\begin{aligned} d(F^m(x), F^n(x)) &\leq \sum_{k=0}^{n-m-1} d(F^{m+k}(x), F^{m+k+1}(x)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-m-1} d(F^{m+k}(x), F^{m+k}(F(x))) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-m-1} K^{m+k} d(x, F(x)) \leq \frac{K^m}{1-K} d(x, F(x)). \end{aligned}$$

Siis jono $(F^j(x))_{j=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono ja koska X on täydellinen, tämä jono suppenee kohti jotain pistettä $x_{\infty} \in X$.

Piste x_{∞} on kuvauksen F kiintopiste, sillä kaikille $j \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned} d(x_{\infty}, F(x_{\infty})) &\leq d(x_{\infty}, F^j(x)) + d(F^j(x), F^{j+1}(x)) + d(F^{j+1}(x), F(x_{\infty})) \\ &\leq (1+K)d(x_{\infty}, F^j(x)) + K^j d(x, F(x)) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

kun $j \rightarrow \infty$. Metriikan positiivisuudesta seuraa, että $x_{\infty} = F(x_{\infty})$.

Jos x_{∞} ja y_{∞} ovat kiintopisteitä, niin

$$Kd(x_{\infty}, y_{\infty}) \geq d(F(x_{\infty}), F(y_{\infty})) = d(x_{\infty}, y_{\infty}),$$

joten $d(x_{\infty}, y_{\infty}) = 0$ ja siis $x_{\infty} = y_{\infty}$. □

Käytämme tuloavaruudessa $X \times Y$ metriikkaa

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2).$$

Propositio C.4. *Olkoon X täydellinen metrinen avaruus ja olkoon Y metrinen avaruus. Olkoon $0 < K < 1$ ja olkoon $F: X \times Y \rightarrow X$ jatkuva kuvaus, jolle kuvaus $F_y = F(\cdot, y): X \rightarrow X$ on kutistava kuvaus vakiolla K jokaiselle $y \in Y$. Olkoon $g: Y \rightarrow X$ kuvaus, jonka arvo pisteessä y on kuvauksen F_y kiintopiste. Tällöin kuvaus g on jatkuva.*

Todistus. Havaitaan, että kaikille $x \in X$ pätee

$$d_X(x, g(y)) \leq \sum_{i=0}^k d_X(F_y^i(x), F_y^{i+1}(x)) + d_X(F_y^{k+1}(x), g(y)),$$

joten

$$d_X(x, g(y)) \leq \sum_{i=0}^{\infty} d_X(F_y^i(x), F_y^{i+1}(x)) = \frac{1}{1-K} d_X(x, F_y(x)),$$

sillä äärellinen summa on pienempi kuin $\frac{1}{1-K} d_X(x, F_y(x))$ ja $d_X(F_y^{k+1}(x), g(y)) \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$, koska $g(y)$ on kutistavan kuvauksen F_y kiintopiste. Valitaan $x = g(y') = F(g(y'), y')$, jolloin yllä oleva epäyhtälö antaa

$$d_X(g(y'), g(y)) \leq \frac{1}{1-K} d_X(F(g(y'), y'), F(g(y'), y)). \quad (\text{C.1})$$

Tulometriikan määritelmän mukaan $d_Y(y', y) = d_1((g(y'), y'), (g(y'), y))$, joten kuvauksen F jatkuvuuden ja yhtälön (C.1) nojalla nähdään, että $d_X(g(y'), g(y)) \rightarrow 0$, kun $d_Y(y', y) \rightarrow 0$, kuten väitettiin. □

Harjoitustehtäviä

C.1. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ suljettu ja rajoitettu väli. Osoita, että lauseke

$$\|f\| = \max_{t \in I} \|f(t)\|$$

määrittää normin vektoriavaruudessa $C^0(I, \mathbb{R}^n)$. Osoita, että $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ on täydellinen metrinen avaruus, kun se varustetaan metriikalla $d(f, g) = \|f - g\|$.²

²JMA 4

Kirjallisuutta

- [Ahl] L. V. Ahlfors. *Complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978.
- [Apo] T. M. Apostol. *Mathematical analysis*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., second edition, 1974.
- [DF] D. S. Dummit and R. M. Foote. *Abstract algebra*. John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ, third edition, 2004.
- [Fit] R. FitzHugh. Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane. *Biophysical Journal*, 1(6):445 – 466, 1961.
- [Gre] W. Greub. *Linear algebra*. Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1975. Graduate Texts in Mathematics, No. 23.
- [Gro] S. Grossman. *Elementary linear algebra*. Saunders College Publishing, 1991.
- [Har] P. Hartman. *Ordinary differential equations*. Birkhäuser, Boston, Mass., second edition, 1982.
- [HSD] M. W. Hirsch, S. Smale, and R. L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, volume 60 of *Pure and Applied Mathematics*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2004.
- [HJ] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2013.
- [Lan] S. Lang. *Undergraduate Algebra*. Springer, 1987.
- [Par] J. Parkkonen. Metriset avaruudet ja topologia. <http://users.jyu.fi/~parkkone/MetTop2018/Topo2018.pdf>, 2018.
- [Per] L. Perko. *Differential equations and dynamical systems*, volume 7 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1993. Corrected reprint of the 1991 original.
- [Pet] P. Petersen. *Linear algebra*. Springer-Verlag, 2021.

- [Tes] G. Teschl. *Ordinary differential equations and dynamical systems*, volume 140 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.