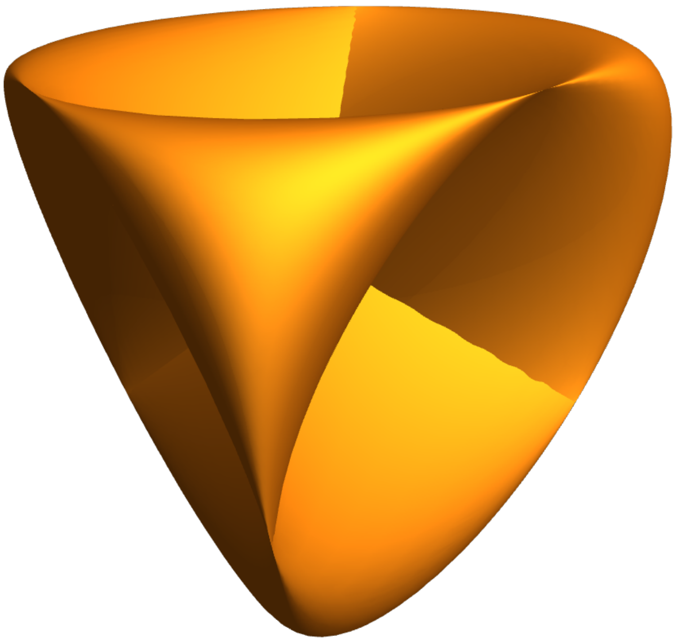
Differentiaaligeometria



Jouni Parkkonen

Luentoja Jyväskylän yliopistossa

syksyllä 2023

Sisällys

Johdanto

Tämä teksti on syksyn 2023 kurssien Johdatus monistoihin ja Differentiaaligeometriaa monistoilla kurssimateriaali. Nämä kurssit muodostavat yhdessä johdannon differentiaaligeometrian perusasioihin.

Kurssin esitietoina oletetaan hyvät tiedot differentiaalilaskennasta (Vektorianalyysi 2) ja topologian perusasioiden hallinta esimerkiksi lähteiden [Par2] tai [Väi, Luvut I-V] pohjalta. Kurssit on mahdollista suorittaa vaikka topologian kurssi suoritettaisiin samaan aikaan kuin Differentiaaligeometriaa monistoilla. Tällöin uusien käsitteiden omaksuminen on joiltain osin vaativampaa mutta edellä mainitut lähteet auttavat tässä tehtävässä. Monet käsitteet esiintyvät jo metristen avaruuksien kurssilla rajoitetummassa kontekstissa ja tulevat sitä kautta tutuiksi.

Kirja [Lee2] on kurssilla suositeltavaa lukemista ja kurssi pohjautuukin suurelta osin tähän kirjaan.

Merkintöjä ja sopimuksia

Tässä esitellään merkintöjä joillekin käsitteille, jotka saattavat olla tuttuja aiemmilta kursseilta. Jotkut merkinnöistä[1]) tai valinnoista[2] poikkeavat eri kursseilla.

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ luonnolliset luvut.
- $\#(A) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ joukon A alkioiden lukumäärä.
- $A - B = \{a \in A : a \notin B\}$ joukkojen A ja B erotus.
- $A \sqcup B$ on joukkojen A ja B *erillinen yhdiste*. Merkintä tarkoittaa joukkoa $A \cup B$ lisätiedolla, että $A \cap B = \emptyset$.
- Joukkojen X_α *erillinen yhdiste* on
$$\coprod_{\alpha \in A} X_\alpha = \big\{(x, \alpha) : x \in X_\alpha \;\; \alpha \in A\big\}\,.$$
- $f|_A$ kuvauksen $f\colon X \to Y$ rajoittuma osajoukkoon $A \subset X$, $f|_A(a) = f(a)$ kaikilla $a \in A$.
- $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \{u : \exists \alpha \in A,\ \text{jolle } u \in U_\alpha\}$.
- $\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha = \{u : u \in U_\alpha \text{ kaikilla } \alpha \in A\}$.
- $A \subsetneq B$ joukko A on joukon B aito osajoukko: $A \subset B$ ja $A \neq B$.
- $\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{jos } m = n \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}$.
- ${}^t\!A$ on matriisin A transpoosi.
- $(x \,|\, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ kaikille $x, y \in \mathbb{R}^n$.
- $\mathbb{E}^n$ on n-ulotteinen euklidinen avaruus, katso Luku 1.2.
- $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{E}^{n+1} : \|x\| = 1\}$.

[1]Esimerkiksi joukkojen erotukselle käytettävät merkinnät vaihtelevat.
[2]Onko 0 luonnollinen luku?

- $B^n(a,r) = \{x \in \mathbb{E}^n : \|x - a\| < r\}$
- $\partial_i f(p) = \partial|_p f = \frac{\partial}{\partial x_k} f(p)$ on kuvauksen $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$ osittaisderivaatta pisteessä $p \in \mathbb{E}^n$.
- $Df(p) = \big(\partial_i f_j(p)\big)$ on kuvauksen $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ differentiaali pisteessä $p \in \mathbb{E}^n$.

Uusien käsitteiden *määritelmät* on laatikoitu näin. Niitä ei ole numeroitu.

Tällaisessa laatikossa on jokin huomautus tai sopimus, joka on tärkeä huomata.

Osa I

Johdatus monistoihin

Luku 1

Sileät monistot

Ensimmäisessä luvussa määrittelemme sileät monistot ja tutustumme muutamaan keskeiseen esimerkkiin. Luvussa 1.4 annettava sileän moniston määritelmä pohjautuu topologisen moniston määritelmään, joten alaluku 1.2 käsittelee tätä, sileää monistoa yleisempää käsitettä. Alaluku 1.3 ja osa alaluvusta 1.5 edellyttävät edistyneempää topologian kurssin sisällön hallintaa mutta suurimman osan luvusta 1 voi opiskella sujuvasti ennen topologian opiskelua.

1.1 Euklidinen avaruus

Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ *standardikantavektorit* ovat

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$$

ja yleinen vektori esitetään komponenttiensa avulla muodoissa

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{e}_k\,.$$

Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ *euklidinen sisätulo*

$$(x \,|\, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\ .$$

määrää *euklidisen normin*

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

ja *euklidisen etäisyyden* $d(x, y) = \|x - y\|$. Kolmikko

$$\mathbb{E}^n = \big(\mathbb{R}^n, (\cdot \,|\, \cdot), \|\cdot\|\big)$$

on n-ulotteinen *euklidinen avaruus.*[1]

[1] Sovimme, että $\mathbb{E}^0 = \{0\}$.

1.2 Topologiset monistot

Topologiset monistot ovat topologisia avaruuksia,[2] joilla on lokaalisti samoja ominaisuuksia kuin euklidisella avaruudella.

Olkoon X topologinen avaruus. Jos jokaisella $x \in X$ on ympäristö, joka on homeomorfinen euklidisen avaruuden kanssa, niin X on *lokaalisti euklidinen avaruus*. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Jos jokaisella $x \in X$ on ympäristö, joka on homeomorfinen euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^n$ jonkin avoimen joukon kanssa, niin X on *n-ulotteinen lokaalisti euklidinen avaruus*.

Jos $U \subset \mathbb{R}^n$ ja $V \subset \mathbb{R}^m$ ovat epätyhjiä avoimia joukkoja ja $m \neq n$, niin ei ole homeomorfismia $h\colon U \to V$. Tästä seuraa, että lokaalisti euklidisen avaruuden n-ulotteisuus on hyvin määritelty. Tämä tulos todistetaan esimerkiksi lähteissä [Lee1, 13.22], [Lee2, Thm. 17.26] algebrallisen topologian menetelmillä. Emme tarkastele tätä tulosta lähemmin tällä kurssilla, sillä differentioituville monistoille tulos on huomattavasti helpompi kuten Luvussa 1.4 huomaamme.

Topologinen avaruus X on *Hausdorffin avaruus*, jos kaikille $x, y \in X$, $x \neq y$ on avoimet ympäristöt $U \ni x$ ja $V \ni y$ siten, että $U \cap V = \varnothing$.

Topologinen avaruus X on *N_2-avaruus*,[a] jos sen topologialla on numeroituva kanta.[b]

[a] Englanniksi yleensä *second countable*.

[b] Topologian τ osajoukko β on topologian τ *kanta*, jos jokaiselle $U \in \tau - \{\varnothing\}$ on $B_i \in \beta$ siten, että $U = \bigcup_{i \in I} B_i$ jollekin indeksijoukolle I.

Esimerkki 1.1. Metrisenä avaruutena $\mathbb{E}^n$ on Hausdorffin avaruus. Mikä tahansa euklidisen avaruuden avoin joukko voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä palloista, joiden keskipiste ja säde ovat rationaalilukuja. Nämä pallot muodostavat avaruuden $\mathbb{E}^n$ topologian numeroituvan kannan, joten $\mathbb{E}^n$ on N_2-avaruus.

Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Jos $M = (M, \tau)$ on n-ulotteinen lokaalisti euklidinen Hausdorffin N_2-avaruus, niin se on *n-ulotteinen topologinen monisto* eli *topologinen n-monisto*.

Esimerkki 1.2. (1) Euklidinen avaruus $\mathbb{E}^n$ on topologinen n-monisto.

(2) Olkoon $U \subset \mathbb{E}^n$ avoin joukko ja olkoon $f\colon U \to \mathbb{E}^m$ jatkuva kuvaus. Kuvauksen f *kuvaaja*

$$\mathscr{G}(f) = \{(x, f(x) : x \in U\} \subset \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^m$$

on n-ulotteinen topologinen monisto, kun se varustetaan relatiivitopologialla eli aliavaruustopologialla. Tällöin $\mathscr{G}(f)$ on Hausdorffin avaruus ja N_2, koska nämä ominaisuudet periytyvät euklidisesta avaruudesta $\mathbb{E}^{n+m}$.

Kuvaus $F\colon U \to \mathscr{G}(f)$, $F(x) = (x, f(x))$ on jatkuva ja projektiokuvaus $(x, f(x)) \mapsto x$ on sen jatkuva käänteiskuvaus. Koko kuvaaja $\mathscr{G}(f)$ on siis homeomorfinen avaruuden $\mathbb{E}^n$ avoimen joukon kanssa, joten $\mathscr{G}(f)$ on topologinen monisto.

[2] *Topologinen avaruus* $X = (X, \tau)$ on pari, jossa $X \neq \varnothing$ on joukko ja τ on kokoelma joukon X osajoukkoja, jolla on samat ominaísuudet yhdisteiden ja leikkausten suhteen kuin euklidisen avaruuden avoimilla joukoilla: (1) $\varnothing \in \tau$ ja $X \in \tau$, (2) jos $U_1, U_2, \ldots, U_N \in \tau$, niin $\bigcap_{k=1}^N U_k \in \tau$ ja (3) jos $A \neq \varnothing$ ja $U_\alpha \in \tau$ kaikilla $\alpha \in A$, niin $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$. Kokoelma τ on *topologia* ja sen alkiot ovat *avoimia joukkoja*. Topologisten avaruuksien teoriaa voi kerrata tai opiskella esimerkiksi lähteiden [Mun], [Par2] ja [Väi] avulla.

Propositio 1.3. *Olkoot $M_1, M_2, \ldots, M_n$ topologisia monistoja. Tällöin $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ on topologinen monisto.*[3]

Todistus. Harjoitustehtävä 1.3. □

Olkoon M on topologinen monisto ja olkoon $p \in M$. Olkoon U pisteen p avoin ympäristö ja olkoon $\phi \colon U \to \phi(U) \subset \mathbb{E}^n$ on homeomorfismi. Pari (U, ϕ) on *kartta* eli *lokaali koordinaatti* ja kuvaus ϕ on *karttakuvaus* tai *koordinaattikuvaus*. Avoin joukko U on pisteen x *koordinaattiympäristö*.

Kartta (U, ϕ) *sisältää* pisteen $p \in M$, jos $p \in U$. Kartta (U, ϕ) on *p-keskinen*, jos $\phi(p) = 0$.

Esimerkki 1.4. Yksikköpallon pinta

$$\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^n(0,1) = \{x \in \mathbb{E}^n : \|x\| = 1\}$$

on topologinen avaruus varustettuna relatiivitopologialla avaruuden $\mathbb{E}^{n+1}$ topologiasta. Siis $\mathbb{S}^n$ on Hausdorffin avaruus ja koska $\mathbb{E}^n$ on N_2-avaruus, myös $\mathbb{S}^n$ on N_2-avaruus.

Olkoon $1 \leqslant k \leqslant n+1$. *Koordinaattiprojektio suuntaan* $\mathbf{e}_k$, joka on kuvaus $\mathrm{pr}_k \colon \mathbb{E}^{n+1} \to \mathbb{E}^n$,

$$\mathrm{pr}_k(x) = \sum_{i \neq k} x_i \mathbf{e}_i \,,$$

määrää homeomorfismit joukoilta

$$U_k^{\pm} = \{x \in \mathbb{S}^n : \pm x_k > 0\} \tag{1.1}$$

yksikköpallolle $B^n(0,1)$. Jos $x = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \mathbf{e}_i \in \mathbb{S}^n$, niin $x_j \neq 0$ jollain $1 \leqslant j \leqslant n+1$. Tällöin $x \in U_k^{\pm}$. Siis $\mathbb{S}^n$ on lokaalisti n-ulotteinen euklidinen avaruus, joten se on topologinen n-monisto.

Olkoon $x \in \mathbb{S}^n$. Ortogonaaliprojektio $\mathrm{pr}_x \colon \mathbb{E}^{n+1} \to x^{\perp}$, $\mathrm{pr}_x(y) = y - (y \mid x)\, x$, määrää homeomorfismin pallon kuoren $\mathbb{S}^n$ avoimilta puolikkailta

$$U_x^+ = \{y \in \mathbb{S}^n : (x \,|\, y) > 0\} \quad \text{ja} \quad U_x^- = \{y \in \mathbb{S}^n : (x \,|\, y) < 0\}$$

joukolle $B^{n+1} \cap x^{\perp}$.[4] Lineaarialgebrasta muistamme, että on ortogonaalinen lineaarikuvaus L_x, jolle pätee $L_x(x) = \mathbf{e}_{n+1}$ ja $L(x^{\perp}) = \mathbb{E}^n \times \{0\} = \{x \in \mathbb{E}^{n+1} : x_{n+1} = 0\}$. Kuvaus $\mathrm{pr}_{n+1} \circ L_x \circ \mathrm{pr}_x |_{U_x} \colon U_x \to B^n(0,1)$ on homeomorfismi. Pari $(U_x^+, \mathrm{pr}_x |_{U_x^+})$ on x-keskinen kartta.

1.3 Topologisten monistojen ominaisuuksia

Topologisella monistolla on käyttökelpoisia topologisia ominaisuuksia. Tässä luvussa käsiteltävät ominaisuudet tulevat pääosin käyttöön vasta osassa II. Ne esitellään tekstin tässä osassa, koska ne pätevät vaikka monistolla ei olisi luvussa 1.4 määriteltävää differentioituvaa rakennetta.

[3] Tuloavaruudessa käytetään tulotopologiaa.

[4] Jos $x = \mathbf{e}_k$ jollain $1 \leqslant k \leqslant n+1$, niin $\mathrm{pr}_{\mathbf{e}_k}$ on koordinaattiprojektio pr_k ja $U_{\mathbf{e}_k}^{\pm} = U_k^{\pm}$ kuten yhtälössä (1.1) määriteltiin.

Topologinen avaruus on *lokaalisti kompakti*, jos sen jokaisella pisteellä on ympäristö, jonka sulkeuma on kompakti.

Propositio 1.5. *Topologinen monisto on lokaalisti kompakti.*

Todistus. Olkoon M topologinen monisto ja olkoon $p \in M$. Tällöin on avoin ympäristö $p \in U \subset M$ ja homeomorfismi $\phi\colon U \to \phi(U) \subset \mathbb{E}^n$, missä $\phi(U)$ on avoin. Jollain $r > 0$ pätee $\overline{B}(\phi(p), r) \subset \phi(U)$. Koska ϕ on homeomorfismi, $\phi^{-1}(B(\phi(p), r))$ on pisteen p ympäristö ja $\overline{\phi^{-1}(B(\phi(p), r))} = \phi^{-1}(\overline{B}(\phi(p), r))$ on kompakti □

Topologinen avaruus on *Lindelöfin avaruus*, jos sen jokaisella peitteellä on numeroituva osapeite.

Propositio 1.6. *Topologinen monisto on Lindelöfin avaruus.*

Todistus. Katso [Väi, Lause 9.15]. □

Topologinen avaruus on *σ-kompakti*, jos se on kompaktien joukkojen numeroituva yhdiste.

Propositio 1.7. *Topologinen monisto on σ-kompakti.*

Todistus. Harjoitustehtävä 1.4. □

Olkoon X topologinen avaruus. Kokoelma $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ on *lokaalisti äärellinen*, jos jokaisella $x \in X$ on ympäristö U siten, että joukko $\{A \in \mathscr{A} : A \cap U \neq \varnothing\}$ on äärellinen.

Olkoon X topologinen avaruus ja olkoot $\mathscr{U}$ ja $\mathscr{V}$ avaruuden X peitteitä. Peite $\mathscr{V}$ on peitteen $\mathscr{U}$ *hienonnus*, jos jokaisella $U \in \mathscr{U}$ on $V \in \mathscr{V}$ siten, että $V \subset U$.

Topologinen avaruus on *parakompakti*, jos sen jokaisella peitteellä on lokaalisti äärellinen hienonnus.

Lause 1.8. *Topologinen monisto on parakompakti.*

Todistus. [Lee2, Thm. 1.15]. □

Lause 1.8 seuraa teknisemmästä tuloksesta, jota tarvitaan sileän ykkösen osituksen konstruktiossa Luvussa 10.4.

Lause 1.9. *Olkoon M topologinen monisto ja olkoon $\mathscr{B}$ sen topologian kanta. Olkoon $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ moniston M avoin peite. Tällöin on moniston M lokaalisti äärellinen avoin peite $(B_i)_{i\in I}$, jolle $B_i \in \mathscr{B}$ kaikilla $i \in I$.*

Todistus. [Lee2, Thm. 1.15]. □

Lause 1.10. *Topologinen monisto on metristyvä.*

Todistus. Smirnovin metristyvyyslauseen[5] nojalla jokainen lokaalisti metristyvä parakompakti Hausdorffin avaruus on metristyvä. Topologinen monisto on lokaalisti metristyvä, koska se on lokaalisti homeomorfinen euklidisen avaruuden kanssa ja euklidisen avaruuden topologia on metrinen topologia. Määritelmän mukaan topologinen monisto on Hausdorffina avaruus ja Lauseen 1.8 nojalla se on parakompakti, joten väite seuraa. □

[5] [Mun, Thm. 42.1]

1.4 Sileät monistot

Topologisen moniston rakenne ei ole riittävä siihen, että kehittäisimme differentiaalilaskentaa monistoilla. Tässä luvussa määrittelemme tarvittavan lisärakenteen.

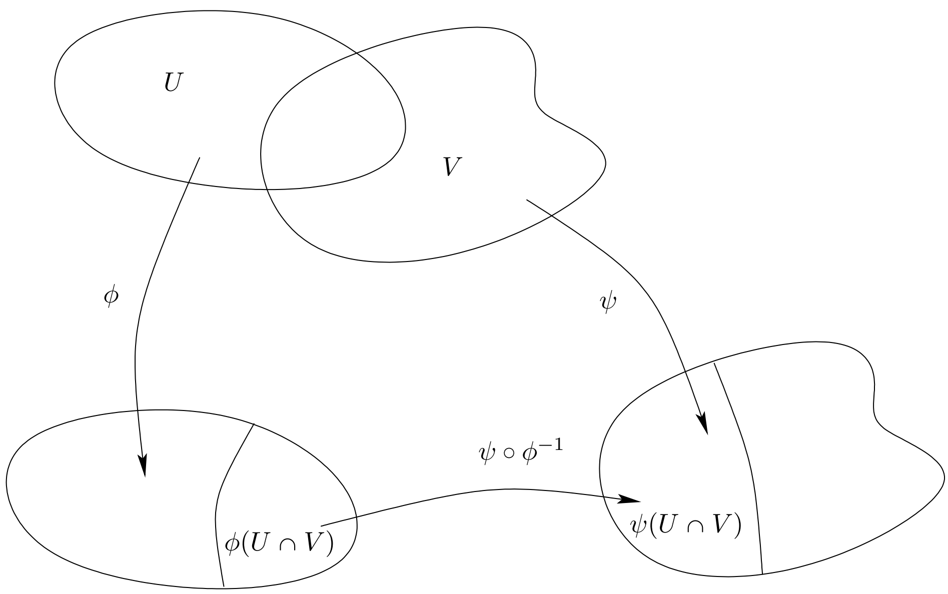
Olkoon $U \subset \mathbb{E}^n$ avoin joukko. Kuvaus $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ on *sileä* eli C^∞-kuvaus, jos se on äärettömän monta kertaa jatkuvasti differentioituva.

Olkoon M topologinen monisto. Moniston M avoimilla joukoilla U ja V määritellyt kartat (U, ϕ) ja (V, ψ) ovat (C^∞-)*yhteensopivia*, jos *kartanvaihto(kuvaus)* eli *siirtymäkuvaus*

$$\psi \circ (\phi|_{U\cap V})^{-1}\colon \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

on C^∞-diffeomorfismi.[a]

[a] Ehto on tyhjä, jos $U \cap V$ on tyhjä.



Kuva 1.1 — Kartat (U, ϕ) ja (V, ψ) ja niiden siirtymäfunktio.

Lemma 1.11. *Olkoot (U_1, ϕ_1), (U_2, ϕ_2), (U_3, ϕ_3) karttoja topologisella monistolla M siten, että (U_1, ϕ_1) ja (U_2, ϕ_2) ovat yhteensopivia ja (U_2, ϕ_2) ja (U_3, ϕ_3) ovat yhteensopivia. Tällöin $\phi_1 \circ (\phi_3|_{U_1\cap U_2\cap U_3})^{-1}$ on sileä.*

Todistus. Harjoitustehtävä 1.5. □

Olkoon $\mathscr{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$ kokoelma topologisen moniston M pareittain C^∞-yhteensopivia karttoja siten, että $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ on moniston M peite. Tällöin $\mathscr{U}$ on moniston M C^∞-*kartasto* eli *sileä kartasto*.[a]

[a] Kartastosta voi myös käyttää nimitystä *atlas*.

Vastaavaan tapaan voi määritellä C^k-monistot millä tahansa $k \in \mathbb{N}$, analyyttiset monistot ja esimerkiksi kompleksianalyyttiset monistot. Yksinkertaistamisen vuoksi tarkastelemme tällä kurssilla ainoastaan sileitä monistoja.

Esimerkki 1.12. (1) Kokoelma $\{(U, \mathrm{id}|_U) : U \subset \mathbb{E}^n \text{ avoin}, U \neq \varnothing\}$ on euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^n$ *kanoninen kartasto*. Kanonisen kartaston siirtymäfunktiot ovat identtisiä kuvauksia, joten kanoninen kartasto on C^∞-kartasto.

(2) Koordinaattiprojektioiden rajoittumat muodostavat C^∞-kartaston yksikköpallon kuorella $\mathbb{S}^n$. Yksikköympyrän $\mathbb{S}^1$ tapauksessa nämä kartat ovat $(U_1^\pm, \mathrm{pr}_1)$ ja $(U_2^\pm, \mathrm{pr}_2)$ kuten Esimerkissä 1.4. Esimerkiksi joukossa $\mathrm{pr}_2(U_1^+ \cap U_2^+) = \{s \in \mathbb{E}^1 : 0 < s < 1\}$ pätee

$$\mathrm{pr}_1 \circ \mathrm{pr}_2^{-1}(s) = \mathrm{pr}_1(s, \sqrt{1-s^2}) = \sqrt{1-s^2}$$

ja muissa tapauksissa vastaavasti, joten kartanvaihdot ovat sileitä.

(3) Kuvaus $S_0 \colon \mathbb{S}^n - \{\mathbf{e}_{n+1}\} \to \mathbb{E}^{n+1}$

$$S_0(x) = \frac{x - \mathbf{e}_{n+1}}{1 - x_{n+1}} + \mathbf{e}_{n+1}$$

liittää pisteeseen x pisteiden $\mathbf{e}_{n+1}$ ja x välisen suoran ja hypertason $\mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^1$ leikkauspisteen. Kuvaus $\mathscr{S} = \mathrm{pr}_{n+1} \circ S_0 \colon \mathbb{S}^n - \{\mathbf{e}_3\} \to \mathbb{E}^n$,

$$\mathscr{S}(x) = \frac{(x_1, \ldots, x_n)}{1 - x_{n+1}}$$

on *stereograafinen projektio pohjoisnavalta*. Stereograafisen projektion käänteiskuvauksen lauseke on

$$\mathscr{S}^{-1}(y) = \frac{(2y, \|y\|^2 - 1)}{1 + \|y\|^2}\,. \tag{1.2}$$

Vastaavasti muodostetaan *stereograafinen projektio etelänavalta* $\widetilde{S} =\colon \mathbb{S}^n - \{-\mathbf{e}_{n+1}\} \to \mathbb{E}^n$ lausekkeella

$$\widetilde{\mathscr{S}}(x) = \frac{(x_1, \ldots, x_n)}{1 + x_{n+1}}\,.$$

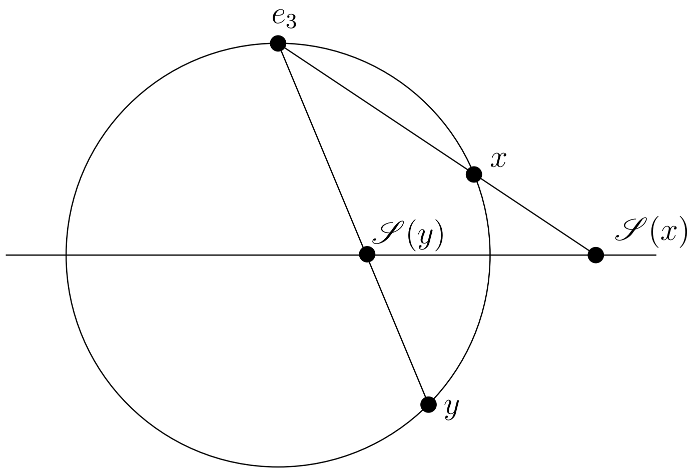
Stereograafisten projektioiden $\mathscr{S}$ ja $\widetilde{\mathscr{S}}$ koordinaattiympäristöt muodostavat topologisen moniston $\mathbb{S}^n$ peitteen. Niiden leikkausjoukko on $\mathbb{S}^n - \{\pm\mathbf{e}_{n+1}\}$ ja lausekkeen (1.2) nojalla pätee joukossa $\mathbb{E}^n - \{0\}$

$$\widetilde{\mathscr{S}} \circ \mathscr{S}^{-1}(y) = \frac{y}{\|y\|^2} = \mathscr{S} \circ \widetilde{\mathscr{S}}^{-1}(y)\,,$$

joten kartanvaihto on peilaus pallopinnassa $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{E}^n$. Stereograafiset projektiot pohjois- ja etelänavoilta muodostavat siis sileän kartaston.

(4) Esimerkki (2) voidaan yleistää implisiittifunktiolauseen[6] avulla: Olkoon $U \subset \mathbb{E}^n$ avoin ja olkoon $F \colon U \to \mathbb{E}^1$ sileä. Luku $c \in F(U)$ on *säännöllinen arvo*, jos $\nabla F(p) \neq 0$ kaikille $p \in F^{-1}(c)$. Implisiittifunktiolauseen mukaan *tasa-arvojoukko* $F^{-1}(c)$ on lokaalisti sileän funktion graafi ja kartanvaihtokuvaukset ovat sileitä.

[6]Katso Vektorianalyysi 2 tai esimerkiksi [Lee2, Thm. C.40].

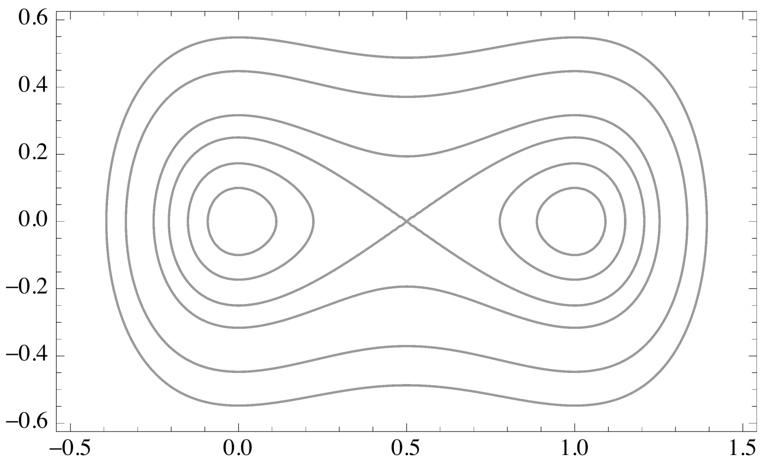


Kuva 1.2 — Stereograafinen projektio.

Esimerkiksi $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$V(x) = x_1^2(x_1-1)^2 + x_2^2,$$

on kahden muuttujan polynomifunktiona sileä ja $\nabla F(x) = \begin{pmatrix} -4x_1(x_1-\frac{1}{2})(x_1-1) \\ -2x_2 \end{pmatrix} = 0$ ainoastaan, jos $x_2 = 0$ ja $x_1 \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Siis Kuvassa 1.3 havainnollistetut funktion V tasa-arvokäyrät ovat sileitä kaikkialla paitsi pisteessä $(\frac{1}{2}, 0)$, sillä $F^{-1}(0) = \{(0,0),(1,0)\}$ on sileä 0-monisto vaikka 0 ei olekaan funktion V säännöllinen arvo.



Kuva 1.3 — Esimerkin 1.12(4) funktion V tasa-arvokäyriä

Jos $\mathscr{U}$ on sileä kartasto ja millekään sileälle kartastolle $\mathscr{V}$ ei päde $\mathscr{U} \subsetneq \mathscr{V}$, niin $\mathscr{U}$ on *maksimaalinen sileä kartasto* eli *differentioituva rakenne* eli *sileä rakenne* monistolla M.

Jos $\mathscr{U}$ on differentioituva rakenne topologisella monistolla M, niin $(M, \mathscr{U})$ on *sileä monisto* eli *differentioituva monisto*.

Jos $(M, \mathscr{U})$ on sileä monisto ja $(U, \phi) \in \mathscr{U}$, niin $(U, \phi) \in \mathscr{U}$ on *sileä kartta*.

Propositio 1.13. *Jokainen moniston M sileä kartasto sisältyy yksikäsitteiseen maksimaaliseen sileään kartastoon.*

Todistus. Olkoon $\mathscr{U}$ moniston M sileä kartasto. Olkoon $\widehat{\mathscr{U}}$ kaikkien karttojen kokoelma, jotka ovat yhteensopivia kartaston $\mathscr{U}$ kanssa. Kartastoon $\mathscr{U}$ kuuluvat kartat peittävät moniston M ja ne sisältyvät kartastoon $\widehat{\mathscr{U}}$, joten kartastoon $\mathscr{U}$ kuuluvat kartat peittävät moniston M. Olkoot $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2) \in \widehat{\mathscr{U}}$. Oletetaan, että $p \in U_1 \cap U_2$. Olkoon $(V, \psi) \in \mathscr{U}$ kartta, joka sisältää pisteen p. Lemman 1.11 nojalla $\phi_1 \circ (\phi_2|_{U_1 \cap U_2 \cap V})^{-1}$ on sileä. Tämä pätee kaikilla $p \in U_1 \cap U_2$, joten $\phi_1 \circ (\phi_2|_{U_1 \cap U_2})^{-1}$ on sileä. Siis kokoelma $\widehat{\mathscr{U}}$ on sileä kartasto. Määritelmänsä nojalla kartasto $\widehat{\mathscr{U}}$ on maksimaalinen sileä kartasto.

Jos $\mathscr{V}$ on kartasto, joka sisältää kartaston $\mathscr{U}$, niin sen kartat ovat kartaston $\mathscr{U}$ karttojen kanssa yhteensopivia. Siis ne kuuluvat kartastoon $\widehat{\mathscr{U}}$, joten $\mathscr{V} \subset \widehat{\mathscr{U}}$. Siis $\widehat{\mathscr{U}}$ on yksikäsitteinen. □

Olkoon $\mathscr{U}$ sileä kartasto topologisella monistolla M. Sileä rakenne, johon $\mathscr{U}$ sisältyy on *kartaston $\mathscr{U}$ määräämä maksimaalinen sileä kartasto/differentioituva rakenne/sileä rakenne.*

Propositio 1.14. *Jos kartta (V, ψ) on yhteensopiva topologisen moniston M sileän kartaston $\mathscr{U}$ kanssa, niin se on sileä kartaston $\mathscr{U}$ määräämässä sileässä rakenteessa.*

Todistus. Harjoitustehtävä 1.6. □

Esimerkki 1.15. (1) Esimerkin 1.12 kartastot määräävät differentioituvat rakenteet, joilla varustettuna tarkastellut topologiset monistot ovat sileitä monistoja.

Käytämme sileillä monistoilla $\mathbb{E}^n$ ja $\mathbb{S}^n$ tässä Esimerkin 1.12 esiteltyjen kartastojen määräämiä sileitä rakenteita.

(2) Jos $M_1, M_2, \dots, M_n$ ovat sileitä monistoja, niiden tulomonistolla $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ on sileän moniston rakenne: Jos (U_j, ϕ_j) on sileä kartta monistolla M_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, niin $(U_1 \times \cdots \times U_n, \phi_1 \times \cdots \times \phi_n)$ on sileä kartta tulomonistolla M. Joukot $U_1 \times \cdots \times U_n$ peittävät moniston M ja on helppo tarkastaa, että näin saatu kartasto on sileä kartasto. Jos muuta ei mainita, käytämme sileiden monistojen tulomonistolla tämän kartaston määräämää sileää rakennetta.

(3) Olkoon M sileä monisto ja olkoon $V \subset M$ avoin epätyhjä osajoukko. Jos $\mathscr{U}$ on moniston M sileä kartasto, niin $\{(U \cap V, \phi|_{U \cap V}) : (U, \phi) \in \mathscr{U}\ , U \cap V \neq \varnothing\}$ on sileä kartasto, joka tekee avoimesta joukosta U sileän moniston. Tällöin U on sileän moniston M *avoin alimonisto.*

Esimerkki 1.16. Kuvaus $\phi \colon \mathbb{E}^1 \to \mathbb{E}^1$, $\phi(t) = t^3$, on homeomorfismi, joten $(\mathbb{E}^1, \phi)$ on kartta ja se muodostaa kartaston. Proposition 1.13 nojalla $(\mathbb{E}^1, \phi)$ sisältyy maksimaaliseen kartastoon $\mathscr{V}$. Tämä kartasto ei ole sama kuin kanonisen kartaston maksimaalinen kartasto, sillä kartanvaihtokuvaus $\mathrm{id} \circ \phi^{-1}$, $s \mapsto \sqrt[3]{s}$, ei ole sileä.

1.5 Monistot ja tekijäkuvaukset

Tässä luvussa tarkastelemme joitakin keskeisiä esimerkkejä sileistä monistoista, jotka muodostetaan ekvivalessiluokista tekijäkonstruktiolla.

Olkoon (X, τ) topologinen avaruus ja olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio joukolla X. Ekvivalenssirelaation $\sim$ ekvivalenssiluokat

$$[x] = \{y \in X : y \sim x\}$$

muodostavat *tekijäjoukon*

$$X/\sim \; = \big\{[x] : x \in X\big\}$$

ja kuvaus $\pi_\sim \colon X \to X/\sim$,

$$p_\sim(x) = [x]\,,$$

on *tekijäkuvaus* eli *luonnollinen tai kanoninen projektio.*

Kokoelma

$$\tau_\sim \; = \{U \subset X/\sim \; : \; \pi_\sim^{-1}(U) \in \tau\}$$

joukon $X/\sim$ *tekijätopologia.*

Propositio 1.17. *Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio joukolla X. Tekijäkuvaus $\pi_\sim \colon X \to X/\sim$ on jatkuva surjektio.*

Todistus. [Par2, Prop. 12.12], [Mun, §22]. □

Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia. Kuvaus $f \colon X \to Y$ on *avoin kuvaus*, jos $f(U)$ on avoin kaikille avoimille joukoille $U \subset X$.

Ekvivalenssirelaatio on *avoin*, jos sen tekijäkuvaus on avoin kuvaus.

Seuraava tulos on usein hyödyllinen monistojen muodostamisessa:

Propositio 1.18. *Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon B avaruuden X topologian kanta. Olkoon $\sim$ joukon X ekvivalenssirelaatio, jonka tekijäkuvaus $\pi \colon X \to X/\sim$ on avoin kuvaus. Tällöin $\{\pi(E) : E \in B\}$ on avaruuden $X/\sim$ topologian kanta.*

Todistus. Harjoitustehtävä 1.8. □

Seuraus 1.19. *Olkoon $\sim$ avoin ekvivalenssirelaatio N_2-avaruudessa X. Tällöin $X/\sim$ on N_2-avaruus.* □

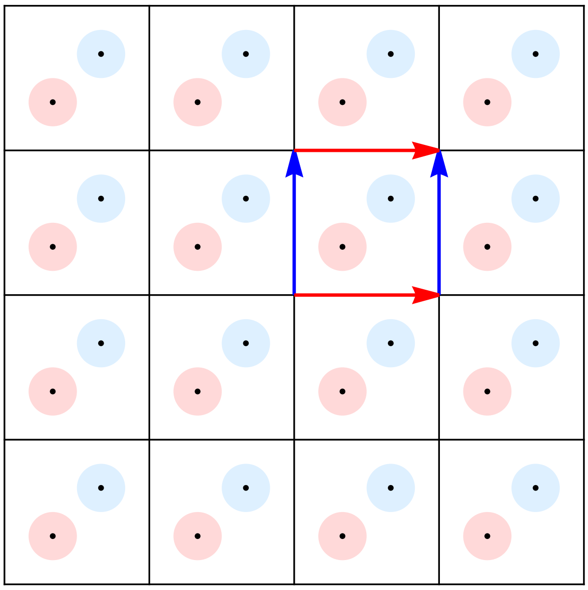
Harjoitustehtävässä 1.10 tarkastelemme esimerkkiä, jossa ekvivalenssirelaation tekijäkuvaus ei ole avoin eikä suljettu.

Sen tarkastaminen, että tekijäavaruus on Hausdorffin avaruus, on usein haastavampaa.

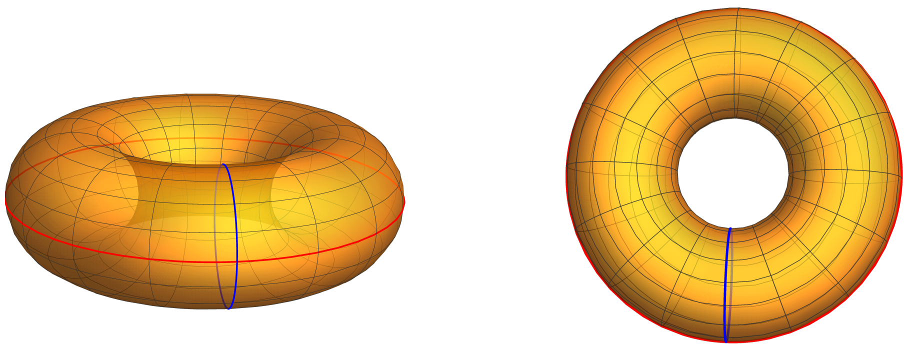
Esimerkki 1.20 (Torus)**.** Määritellään ekvivalenssirelaatio avaruudessa $\mathbb{E}^n$ valitsemalla ekvivalenssiluokiksi joukot $x + \mathbb{Z}^n$ kaikille $x \in \mathbb{E}^n$. Näin muodostettu tekijäavaruus

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{E}^n/\mathbb{Z}^n$$

on n-ulotteinen *torus*.



Kuva 1.4 — Pisteiden $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) + \mathbb{Z}^2$ ja $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) + \mathbb{Z}^2$ palloympäristöt 2-toruksella $\mathbb{T}^2 = \mathbb{E}^2/\mathbb{Z}^2$. Torus voidaan myös muodostaa samastamalla suljetun yksikköneliön vastakkaiset sivut kuten nuolet osoittavat.



Kuva 1.5 — 2-torus.

Jos $a + \mathbb{Z}^n, b + \mathbb{Z}^n \in \mathbb{T}^n$ ovat kaksi eri pistettä, niin niiden alkukuvat $a + \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{E}^n$ ja $b + \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{E}^n$ ovat erillisiä ja on helppo valita pieni $r > 0$ siten, että $B(a, r) + \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{E}^n$ ja $B(b, r) + \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{E}^n$ ovat erillisiä. Näiden avoimien joukkojen kuvat toruksella ovat pisteiden $a + \mathbb{Z}^n, b + \mathbb{Z}^n \in \mathbb{T}^n$ avoimet erilliset ympäristöt. Siis $\mathbb{T}^n$ on Hausdorffin avaruus.

Tarkastamme seuraavaksi, että tekijäkuvaus $\pi\colon x \mapsto x + \mathbb{Z}^n$ on avoin: Olkoon $U \subset \mathbb{E}^n$ avoin joukko. Ekvivalenssirelaation määritelmästä seuraa, että

$$\pi^{-1}\big(\pi(U)\big) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^n} (U + k)\,,$$

joka on avoin joukko. Tekijätopologian määritelmän nojalla siis $\pi(U)$ on avoin. Seurauksen 1.19 nojalla $\mathbb{T}^n$ on N_2-avaruus.

Toruksella on luonnollinen sileä kartasto, joka saadaan tekijäkuvauksen lokaaleista käänteiskuvauksista: Olkoon $a+\mathbb{Z}^n \in \mathbb{T}^n$. Tekijäkuvauksen π rajoittuma palloon $B(a, \frac{1}{2})$ on injektio, joten sen käänteiskuvaus $\phi_a = \pi^{-1} \colon U_a = \pi(B(a, \frac{1}{2})) \to B(a, \frac{1}{2}) \subset \mathbb{E}^n$ on karttakuvaus. Ekvivalenssirelaation määritelmän nojalla kartaston $\{(U_a, \phi_a) : a \in \mathbb{R}^n\}$ siirtymäkuvaukset ovat affiineja kuvauksia $x \mapsto x + k$, $k \in \mathbb{Z}^n$. Erityisesti siirtymäkuvaukset ovat siis sileitä.

Olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio joukossa X. Kuvaus $f \colon X \to Y$ on *yhteensopiva* ekvivalenssirelaation $\sim$ kanssa, jos $f(x_1) = f(x_2)$ kaikille $x_1, x_2 \in X$, joille pätee $x_1 \sim x_2$.

Jos kuvaus $f \colon X \to Y$ on yhteensopiva ekvivalenssirelaation $\sim$ kanssa, niin se määrää kuvauksen $f_\sim \colon X/\sim \to Y$,

$$f_\sim([x]) = f(x)\,.$$

Joukon X ekvivalenssirelaation $\sim$ kanssa yhteensopivalle kuvaukselle pätee siis $f = f_\sim \circ \pi_\sim$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi_\sim"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X/\sim \arrow[r, "f_\sim"'] & Y \end{tikzcd}$$

Propositio 1.21. *Olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio topologisessa avaruudessa X ja olkoon Y topologinen avaruus. Olkoon $f \colon X \to Y$ kuvaus, joka on yhteensopiva ekvivalenssirelaation $\sim$ kanssa. Tällöin f on jatkuva, jos ja vain jos $f_\sim$ on jatkuva.*

Todistus. Katso [Par2, Luku 12.2], [Mun, Thm. 22.2]. □

Esimerkki 1.22. Tekijäavaruus $\mathbb{E}^1/\mathbb{Z}$ on homeomorfinen yksikköympyrän $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{E}^2$ kanssa: Kuvaus $f \colon \mathbb{E}^1 \to \mathbb{S}^1$, $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, on jatkuva surjektio, joka on injektio välillä $[0, 1[$. Se on yhteensopiva ekvivalenssirelaation kanssa kosinin ja sinin jaksollisuuden nojalla, joten Proposition 1.21 nojalla kuvaus $f_\sim \colon \mathbb{E}^1 \to \mathbb{S}^1$ on jatkuva. Tekijäkuvauksen $\pi_\sim$ rajoittuma välille $[0, 1[$ on bijektio, joten kuvaus $f_\sim$ on bijektio.

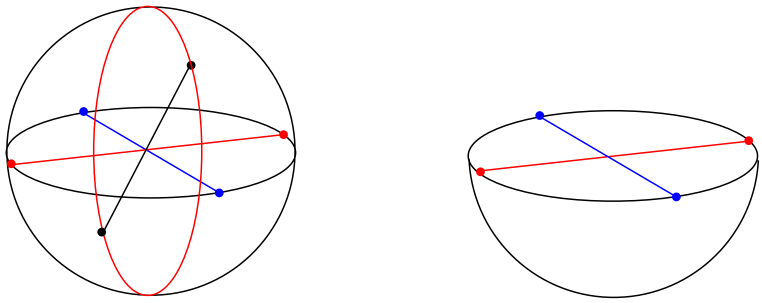
Proposition 1.17 nojalla tekijäkuvaus $\pi_\sim$ on jatkuva ja $\mathbb{E}^1/\mathbb{Z}^1 = \pi_\sim([0, 1])$, joten $\mathbb{E}^1/\mathbb{Z}^1$ on kompakti kompaktin joukon kuvana jatkuvassa kuvauksessa. Siis $f_\sim$ on jatkuva bijektio kompaktilta avaruudelta Hausdorffin avaruudelle, joten se on homeomorfismi.[7] Yleisemmin $\mathbb{T}^n$ on homeomorfinen tuloavaruuden $(\mathbb{S}^1)^n$ kanssa.

Esimerkki 1.23 (Projektiivinen avaruus)**.** Olkoon $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} - \{0\}$. Määritellään ekvivalenssirelaatio $\sim$ topologisessa avaruudessa $\mathbb{E}^{n+1} - \{0\}$ asettamalla osituksekseksi joukot

$$\mathbb{R}^\times x = \{t\, x : t \in \mathbb{R}^\times\} = [x] = [x_1 : x_2 : \cdots : x_n : x_{n+1}]\,.$$

Tämän ekvivalenssirelaation jokainen ekvivalenssiluokka leikkaa pallon pintaa $\mathbb{S}^n$ täsmälleen kahdessa pisteessä ja määrää joukon $\mathbb{S}^n$ osituksen joukoilla $\{x, -x\}$, $x \in \mathbb{S}^n$. Tekijäavaruus

$$\mathbb{P}^n = \big(\mathbb{E}^{n+1} - \{0\}\big)/\sim\, = \mathbb{S}^n/\sim$$



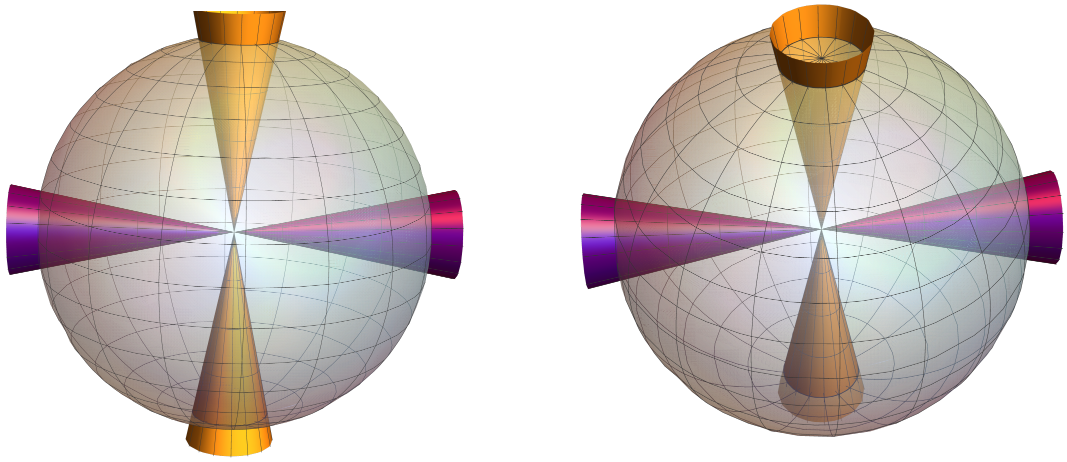
Kuva 1.6 — Projektiivisen tason $\mathbb{P}^2$ muodostaminen samastamalla pinnan $\mathbb{S}^2$ vastakkaiset pisteet kuten vasemmanpuoleisessa kuvassa ja samastamalla suljetun eteläisen pallonpuoliskon reunalla olevan päiväntasaajan vastakkaiset pisteet kuten oikeanpuoleisessa kuvassa.

on n-ulotteinen *projektiivinen avaruus*. Projektiivinen avaruus on kompakti Proposition 1.17 nojalla, koska $\mathbb{S}^n$ on kompakti.

Projektiivinen avaruus $\mathbb{P}^n$ on avaruuden $\mathbb{E}^{n+1}$ suorien eli 1-ulotteisten vektorialiavaruuksien avaruus: Pisteet $x, y \in \mathbb{E}^{n+1} - \{0\}$ virittävät saman suoran

$$\langle x \rangle = \{rx : r \in \mathbb{R}\} = \{ry : r \in \mathbb{R}\} = \langle y \rangle,$$

jos ja vain jos $y = sx$ jollain $s \in \mathbb{R}^\times$.



Kuva 1.7 — Projektiivinen taso on avaruuden $\mathbb{E}^3$ suorien avaruus.

Harjoitustehtävän 1.11 nojalla $\mathbb{P}^n$ on Hausdorffin avaruus ja N_2-avaruus. Osoitetaan, että projektiivinen avaruus on n-ulotteinen sileä monisto. Olkoon $1 \leqslant k \leqslant n+1$. Olkoon

[7] Katso [Par2, Lause 11.17], [Mun, Thm. 22.2].

$U_k = \{[x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1}] : x_k \neq 0\}$.[8] Kuvaus $\phi_k \colon U_k \to \mathbb{E}^n$,

$$\phi_k([x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1}]) = \left(\frac{x_1}{x_k}, \ldots, \frac{x_{k-1}}{x_k}, \frac{x_{k+1}}{x_k}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_k}\right).$$

Kuvaus on selvästi hyvin määritelty, koska $\frac{\lambda x_j}{\lambda x_k} = \frac{x_j}{x_k}$ kaikille $1 \leqslant j, k \leqslant n+1$ ja kaikille $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. Rajoittumalla yksikköpallon pinnalle Esimerkki 1.4 osoittaa, että se on homeomorfismi kuvalleen ja että koordinaattiympäristöt $U_1, U_2, \ldots, U_{n+1}$ peittävät projektiivisen avaruuden $\mathbb{P}^n$.

Osoitetaan, että kartanvaihdot ovat sileitä diffeomorfismeja: Olkoon $[x] \in \mathbb{P}^n$. Oletetaan, että $x_1, x_2 \neq 0$, jolloin $[x] \in U_1 \cap U_2$. Tällöin

$$\phi_1([x]) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_1}\right) \quad \text{ja} \quad \phi_2([x]) = \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_2}\right).$$

Käänteiskuvausten $\phi_1^{-1}, \phi_2^{-1} \colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{P}^n$ lausekkeet ovat

$$\phi_1^{-1}(y) = [1 : y_1 : \cdots : y_n] \quad \text{ja} \quad \phi_2^{-1}(y) = [y_1 : 1 : y_2 : \cdots : y_n],$$

joten

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(y) = \left(\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}, \ldots, \frac{y_n}{y_1}\right),$$

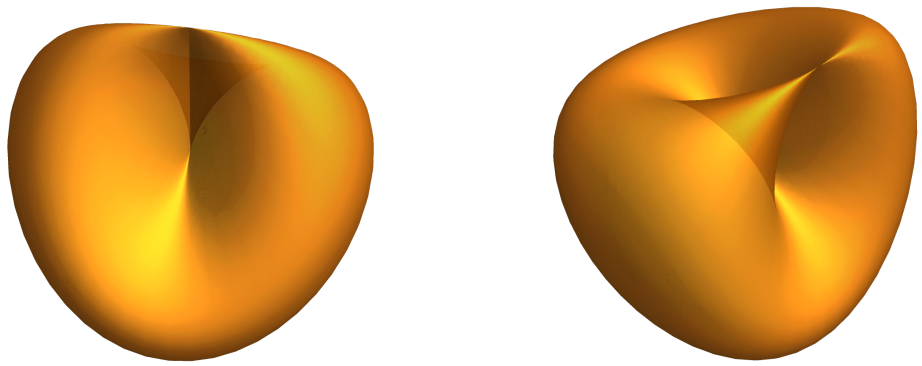
ja

$$\phi_1 \circ \phi_2^{-1}(y) = \left(\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}, \ldots, \frac{y_n}{y_1}\right).$$

Siis kartanvaihto $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} \colon \{y \in \mathbb{E}^n : y_1 \neq 0\} \to \{y \in \mathbb{E}^n : y_1 \neq 0\}$ on sileä diffeomorfismi. Muut kartanvaihdot tarkastellaan samaan tapaan.

Käytämme projektiivisessa avaruudessa tässä esimerkissä esitellyn kartaston määräämää sileää rakennetta.

Projektiivinen avaruus on abstrakti sileä monisto, jonka määritelmä ei anna sitä minkään euklidisen avaruuden osajoukkona.



Kuva 1.8 — Projektiivisen tason havainnollistus kuvan 1.6 oikeanpuoleisen konstruktion pohjalta. Kuvassa on projektiivisen tason $\mathbb{P}^2$ kuva Harjoitustehtävän 1.12 kuvauksella f_2.

[8]Ehto $x_k = 0$ on hyvin määritelty, koska ekvivalenssiluokka määritellään kertomalla nollasta poikkeavilla reaaliluvuilla.

Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia. Kuvaus $F\colon X \to Y$ on *(topologinen) upotus*, jos $F\colon X \to F(X)$ on homeomorfismi.[a]

[a] Kuvajoukko $F(X)$ varustetaan aliavaruustopologialla eli indusoidulla topologialla.

Whitneyn upotuslauseen[9] nojalla $\mathbb{P}^n$ voidaan upottaa euklidiseen avaruuteen $\mathbb{E}^{2n}$ kaikilla $n \geqslant 2$. Harjoitustehtävässä 1.13 tarkastelemme projektiivisen tason $\mathbb{P}^2$ topologista upotusta avaruuteen $\mathbb{E}^4$.

Esimerkki 1.24 (Kahden nollan reaaliluvut)**.** Olkoon $X = \mathbb{E}^1 \times \{0,1\}$ varustettuna topologisten avaruuksien $\mathbb{E}^1$ ja $\mathbb{E}^1$ erillisen yhdisteen topologialla. Olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio, jonka ekvivalenssiluokat ovat $\{(x,0),(x,1)\}$ kaikilla $x \neq 0$ ja yhden pisteen joukot $\{(0,0)\}$ ja $\{(0,1)\}$. Tekijäavaruus $X/\sim$ on lokaalisti euklidinen mutta se ei ole Hausdorffin avaruus, koska pisteillä $\{(0,0)\} \in X/\sim$ ja $\{(0,1)\} \in X/\sim$ ei ole erillisiä ympäristöjä

Harjoitustehtäviä

1.1. Olkoon
$$X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{E}^2$$
varustettuna relatiivitopologialla. Osoita, että X on N_2 Hausdorffin avaruus mutta X ei ole monisto.[10]

1.2. Olkoon $T > 0$ ja olkoon
$$S_T = \big\{(\sin(t), \sin(2t)) : 0 < t < T\big\} \subset \mathbb{E}^2 .$$
Osoita, että S_T on monisto, kun $0 < T \leqslant \pi$, ja että S_T ei ole monisto, kun $T > \pi$.

1.3. Todista Propositio 1.3.

1.4. Todista Propositio 1.7.

1.5. Todista Lemma 1.11.

1.6. Todista Propositio 1.14.

1.7. Osoita, että stereograafinen projektio $\mathscr{S}\colon \mathbb{S}^2 - \{\mathbf{e}_3\} \to \mathbb{E}^2$ on yhteensopiva sileän moniston $\mathbb{S}^2$ sileän rakenteen kanssa.

1.8. Todista Propositio 1.18

1.9. Osoita, että tekijätopologia on topologia.

1.10. Olkoon $X = \{x \in \mathbb{E}^2 : x_1 \geqslant 0\} \cup \{x \in \mathbb{E}^2 : x_2 = 0\}$ varustettuna relatiivitopologialla. Olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio, jonka ekvivalenssiluokat ovat joukot $\{x \in X : x_1 = a\}$, $a \in \mathbb{R}$. Osoita, että tekijäkuvaus $\pi\colon X \to X/\sim\ \cong \mathbb{E}^1$ ei ole avoin eikä suljettu.

1.11. Osoita, että projektiivinen avaruus on Hausdorffin avaruus ja N_2-avaruus.[11]

[9] Lause 5.16.

[10] Perustele huolellisesti, miksi origolla ei ole ympäristöä, joka on homeomorfinen euklidisen avaruden avoimen joukon kanssa.

[11] Osoita, että projektiokuvaus on avoin kuvaus. Kuva 1.7 saattaa auttaa Hausdorff-ominaisuuden osoittamisessa.

1.12. Olkoot $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2, \widetilde{f}_3 \colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{E}^3$,

$$\widetilde{f}_1(x) = (x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2)\,,$$
$$\widetilde{f}_2(x) = (x_2x_3, 2x_1x_2, x_1^2 - x_2^2)\,,$$
$$\widetilde{f}_3(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{(x_1+x_2+x_3)\big((x_1+x_2+x_3)^3 + 4(x_2-x_1)(x_3-x_2)(x_1-x_3)\big)}{4} \\ (2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)\|x\|^2 + 2x_2x_3(x_2^2 - x_3^2) + x_3x_1(x_1^2 - x_3^2) + x_1x_2(x_2^2 - x_1^2) \\ \sqrt{3}\big((x_2^2 - x_3^2)\|x\|^2 + x_3x_1(x_3^2 - x_1^2) + x_1x_2(x_2^2 - x_1^2)\big) \end{pmatrix}.$$

Osoita, että kuvaukset $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2, \widetilde{f}_3$ määräävät jatkuvat kuvaukset $f_1, f_2, f_3 \colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{E}^3$.

1.13. Osoita, että kuvaus $\nu \colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{E}^4$,

$$\nu([x]) = (x_1^2 - x_2^2,\, x_1x_2,\, x_1x_3,\, x_2x_3)$$

on topologinen upotus.[12]

[12] Tarkastele kuvausta $\widetilde{\nu} \colon \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^4$, $\widetilde{\nu}(x) = (x_1^2 - x_2^2,\, x_1x_2,\, x_1x_3,\, x_2x_3)$. Osoittaaksesi, että ν on injektiivinen, osoita, että $\widetilde{\nu}(x) = \widetilde{\nu}(y)$, jos ja vain jos $x = \pm y$. Miksi riittää osoittaa, että ν on jatkuva injektio?

Luku 2

Sileät funktiot ja kuvaukset

Moniston differentioituva rakenne mahdollistaa differentiaalilaskennan kehittämisen monistolla. Tässä luvussa tutustumme sileisiin kuvauksiin. Luvun aluksi tarkastelemme vektoriarvoisia kuvauksia. Tällä kurssilla kutsumme *funktioiksi* kuvauksia, joiden maalijoukko on $\mathbb{E}^1$.

2.1 Sileät vektoriarvoiset kuvaukset

Olkoot $m, n \in \mathbb{N}$ ja olkoon M sileä n-monisto. Vektoriarvoinen kuvaus $f \colon M \to \mathbb{E}^m$ on *sileä*, jos $f \circ \phi^{-1} \colon \phi(U) \to \mathbb{E}^n$ on sileä kaikille sileille kartoille (U, ϕ).

Olkoon

$$\mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{E}^m) = \{f \colon M \to \mathbb{E}^m : f \text{ on sileä}\}.$$

Lemma 2.1. *Olkoon M sileä monisto ja olkoot (U, ϕ), (V, ψ) moniston M sileitä karttoja, joille $U \cap V \neq \varnothing$. Olkoon $f \colon M \to \mathbb{E}^n$. Jos $f \circ \phi^{-1}$ on sileä, niin $f \circ (\psi|_{U \cap V})^{-1}$ on sileä.*

Todistus. Kuvauksen $f \circ (\psi|_{U \cap V})^{-1}$ määrittelyjoukossa $\psi(U \cap V)$ pätee

$$f \circ (\psi|_{U \cap V})^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ (\psi|_{U \cap V})^{-1}),$$

joten $f \circ (\psi|_{U \cap V})^{-1}$ on sileä kahden sileän kuvauksen yhdistettynä kuvauksena. □

Lemman 2.1 nojalla vektoriarvoisen kuvauksen sileys riittää tarkastaa yhdelle sileälle kartalle joka pisteessä.

Seuraus 2.2. *Olkoon M sileä monisto. Kuvaus $f \colon M \to \mathbb{E}^n$ on sileä, jos ja vain jos jokaisella $p \in M$ on sileä kartta (U_p, ϕ_p) siten, että $p \in U_p$ ja kuvaus $f \circ \phi^{-1} \colon \phi(U) \to \mathbb{E}^n$ on sileä.*

Todistus. Oletetaan, että jokaisella $p \in M$ on sileä kartta (U_p, ϕ_p) siten, että $p \in U$ ja kuvaus $f \circ \phi_p^{-1} \colon \phi(U_p) \to \mathbb{E}^n$ on sileä. Olkoon (V, ψ) sileä kartta ja olkoon $q \in V$. Tällöin

$$f \circ (\psi|_{V \cap U_q})^{-1} = (f \circ \phi_q^{-1}) \circ (\phi_q \circ (\psi|_{V \cap U_q})^{-1})$$

on kahden sileän kuvauksen yhdisteenä sileä. Koska tämä pätee kaikille $q \in V$, kuvaus $f \circ \psi^{-1}$ on sileä.

Jos taas f on sileä, niin $f \circ \phi^{-1}$ on sileä kaikille kartoille ϕ. Väite seuraa, koska millä tahansa moniston M pisteellä p on sileä kartta, joka sisältää pisteen p. □

Sileällä monistolla M määritellyt $\mathbb{E}^n$-arvoiset kuvaukset muodostavat vektoriavaruuden, kun kuvausten $f, g \colon M \to \mathbb{E}^n$ yhteenlasku ja vakiolla $\lambda \in \mathbb{R}$ kertominen määritellään asettamalla

$$(f+g)(p) = f(p) + g(p)\,,$$
$$(\lambda f)(p) = \lambda f(p)$$

kaikille $p \in M$.

Lemma 2.3. *Olkoon M sileä monisto. Sileiden kuvausten joukko $\mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{E}^n)$ varustettuna kuvausten yhteenlaskulla ja vakiolla kertomisella on reaalinen vektoriavaruus.*

Todistus. Osoitetaan, että $\mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{E}^n)$ on kaikkien monistolla M määriteltyjen $\mathbb{E}^n$-arvoisten kuvausten vektoriavaruuden aliavaruus. Vakiofunktiot ovat sileitä, joten $\mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{E}^n)$ ei ole tyhjä joukko. Olkoot $f, g \in \mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{E}^n)$ ja olkoon $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Olkoon $p \in M$ ja olkoon (U, p) kartta, joka sisältää pisteen p. Määritelmän mukaan vektoriarvoiset kuvaukset $f \circ \phi^{-1}$ ja $g \circ \phi^{-1} \colon \phi(U) \to \mathbb{E}^n$ ovat sileitä. Differentiaalilaskennan tunnettujen tulosten nojalla $\lambda f \circ \phi^{-1} + \mu g \circ \phi^{-1}$ on sileä. Tämä pätee kaikilla $p \in M$, joten Seurauksen 2.2 nojalla $f + g$ on sileä. □

Lemma 2.4. *Olkoon M sileä n-monisto ja olkoon (U, ϕ) sileä kartta. Tällöin $\phi \colon U \to \mathbb{E}^n$ on sileä.*

Todistus. Seurauksen 2.2 nojalla kuvauksen ϕ, sileys riittää tarkastaa kartalle (U, ϕ). Tässä kartassa pätee $\phi \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}$. □

2.2 Sileät reaaliarvoiset funktiot

Sileät funktiot ovat erityisen tärkeä erikoistapaus. Niille käytetään eri lähteissä erilaisia merkintöjä

$$\mathrm{C}^\infty(M) = \mathfrak{F}(M) = \mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{E}^1)\,.$$

Yhteenlaskun ja vakiolla kertomisen lisäksi reaaliarvoisille funktioille määritellään kertolasku asettamalla

$$(fg)(p) = f(p)g(p)$$

kaikille $p \in M$.

Olkoon V vektoriavaruus, jossa on määritelty vektorien bilineaarinen kertolasku $(v, w) \mapsto vw$. Jos $(V, +, \cdot)$ on rengas, niin V varustettuna yhteen- ja kertolaskuilla ja vakiolla kertomisella on *(assosiatiivinen)* $\mathbb{R}$*-algebra*.

Propositio 2.5. *Sileiden funktioiden joukko $\mathrm{C}^\infty(M) = \mathfrak{F}(M)$ varustettuna yhteen- ja kertolaskulla ja reaalisella vakiolla kertomisella on kommutatiivinen assosiatiivinen $\mathbb{R}$-algebra.*

Todistus. Lemman 2.3 nojalla $\mathfrak{F}(M)$ on vektoriavaruus. Loput väitteestä todistetaan samaan tapaan. Harjoitustehtävä 2.1. $\square$

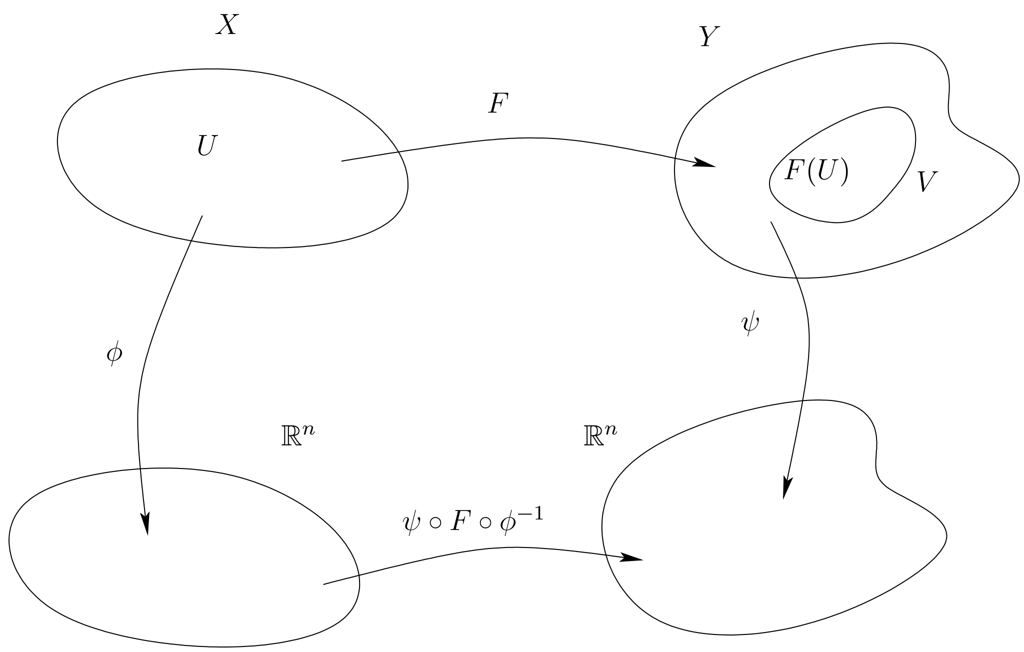
2.3 Sileät kuvaukset

Olkoot M ja N sileitä monistoja. Jatkuva kuvaus $F\colon M \to N$ on *sileä pisteessä* $p \in M$, jos kuvaus $\psi \circ F \circ (\phi|_{U\cap F^{-1}(V)})^{-1}$ on sileä jokaiselle kartalle (U, ϕ), joka sisältää pisteen p ja jokaiselle kartalle (V, ψ), joka sisältää pisteen $F(p)$,

Kuvaus F on *sileä*, jos se on sileä jokaisessa pisteessä $p \in M$.

Olkoon

$$C^\infty(M, N) = \{f\colon M \to N : f \text{ on sileä}\}.$$



Kuva 2.1 — Differentioituva kuvaus.

Propositio 2.6. *Olkoot M ja N sileitä monistoja. Jatkuva kuvaus $F\colon M \to N$ on sileä pisteessä $p \in M$, jos kuvaus $\psi \circ f \circ (\phi|_{U\cap F^{-1}(V)})^{-1}$ on sileä pisteessä $\phi(p)$ jollekin sileälle kartalle (U, ϕ), joka sisältää pisteen p ja jollekin sileälle kartalle (V, ψ), joka sisältää pisteen $F(p)$.*

Todistus. Harjoitustehtävä 2.2. $\square$

Propositio 2.7. *Sileiden kuvausten yhdistetty kuvaus on sileä.*

Todistus. Olkoot M_1, M_2 ja M_3 sileitä monistoja. Olkoot $F_1\colon M_1 \to M_2$ ja $F_2\colon M_2 \to M_3$ sileitä kuvauksia. Olkoon $p \in M_1$, olkoon (U_1, ϕ_1) pisteen p sisältävä sileä kartta, olkoon (U_2, ϕ_2) pisteen $F_1(p)$ sisältävä sileä kartta ja olkoon (U_3, ϕ_3) pisteen $F_2 \circ F_1(p)$ sisältävä sileä kartta. Tällöin

$$\begin{aligned}&\phi_3 \circ F_2 \circ F_1 \circ \phi_1|_{U_1 \cap (F_1^{-1}(U_2 \cap F_2^{-1}(U_3))} \\ &\qquad = \left(\phi_3 \circ F_2 \circ (\phi_2|_{U_2 \cap F_2^{-1}(U_3)})^{-1}\right) \circ \left(\phi_2 \circ F_1 \circ \phi_1|_{U_1 \cap (F_1^{-1}(U_2 \cap F_2^{-1}(U_3))}\right)\end{aligned}$$

on sileä. Väite seuraa Proposition 2.6 nojalla. □

Esimerkki 2.8. (1) Sileän moniston M avoimen alimoniston $U \subset M$ inkluusiokuvaus $i\colon U \to M$, $i(p) = p$, on sileä: Olkoon $p \in U$ ja olkoon (ϕ, V) pisteen p sisältävä sileä kartta monistolla M. Tällöin $\phi|_U$ on sileä kartta Esimerkin 1.15 nojalla. Kuvaus ι on sileä pisteessä p, sillä $\phi \circ i \circ (\phi|_U)^{-1} = \mathrm{id}$ määrittelyjoukossaan $U \cap V \ni p$. Identtinen kuvaus on sileä, joten ι on sileä Prioposition 2.6 nojalla.

(2) Tekijäkuvaus $\pi\colon \left(\mathbb{E}^{n+1} - \{0\}\right) \to \mathbb{P}^n$, $\pi(x) = [x]$ on sileä: Käytetään sileällä monistolla $\mathbb{E}^{n+1} - \{0\}$ euklidisen avaruuden kanonisen kartan määräämää avoimen alimoniston karttaa $\mathrm{id}\,|_{\mathbb{E}^{n-1}-\{0\}}\colon \mathbb{E}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{E}^{n+1}$ ja projektiivisessa avaruudessa Esimerkissä 1.23 määriteltyjä karttoja $\phi_k\colon U_k \to \mathbb{E}^n$, $1 \leqslant k \leqslant n+1$. Olkoon $p \in \mathbb{E}^{n+1} - \{0\}$ ja oletetaan, että $p_{n+1} \neq 0$. Tällöin

$$\phi_k \circ \pi \circ \mathrm{id}^{-1}(x) = \frac{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{x_{n+1}}$$

on sileä määrittelyjoukossaan $\{x \in \mathbb{E}^{n+1} : x_k \neq 0\} \ni p$. Laskut tehdään samaan tapaan muille kartoille.

(3) Kuvaus $F\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$, $F(x) = [x]$ on sileä: Olkoon $p \in \mathbb{S}^n$. Oletetaan, että $p_1 > 0$. Käytetään edellisessä luvussa määriteltyjä karttakuvauksia $\mathrm{pr}_1\colon U_1^+ \to B^n(0,1)$ ja ϕ_1. Olkoon $y \in B^n(0,1) = \mathrm{Im}\,\mathrm{pr}_1$. Tällöin

$$\phi_1 \circ F \circ \mathrm{pr}_1^{-1}(y) = \phi_1(F(\sqrt{1 - \|y\|^2}, y_1, \ldots, y_n)) = \frac{y}{\sqrt{1 - \|y\|^2}}\,,$$

joten $\phi_1 \circ F \circ \mathrm{pr}_1^{-1}$ on sileä. Laskut tehdään samaan tapaan muille kartoille.

2.4 Diffeomorfismit

Olkoot M ja N sileitä monistoja. Sileä bijektio $F\colon M \to N$ on *diffeomorfismi*, jos sen käänteiskuvaus on sileä.

Kuvaus $G\colon M \to N$ on *lokaali diffeomorfismi*, jos jokaisella pisteellä $p \in M$ on ympäristö U_p siten, että $G|_{U_p}\colon U_p \to G(U_p)$ on diffeomorfismi.

Lemma 2.9. *Olkoot M_1, M_2 ja M_3 sileitä monistoja. Jos M_1 ja M_2 ovat diffeomorfisia ja M_2 ja M_3 ovat diffeomorfisia, niin M_1 ja M_3 ovat diffeomorfisia.*

Todistus. Olkoot $F_1\colon M_1 \to M_2$ ja $F_2\colon M_2 \to M_3$ diffeomorfismeja. Bijektioiden yhdistetty kuvaus on bijektio ja sileiden kuvausten yhdistetty kuvaus on Proposition 2.7 nojalla sileä. Väite seuraa huomaamalla, että $(F_2 \circ F_1)^{-1} = F_1^{-1} \circ F_2^{-1}$. □

Lemma 2.10. *Olkoon M sileä monisto ja olkoon (U, ϕ) sileä kartta. Tällöin $\phi\colon U \to \phi(U)$ on diffeomorfismi.*

Todistus. Karttakuvauksen ϕ esitys koordinaateissa (U,ϕ) on $\mathrm{id}\circ\phi\circ\phi^{-1}=\mathrm{id}$, joka on diffeomorfismi. $\square$

Esimerkki 2.11. (1) Kuvaus $\phi\colon \mathbb{E}^1\to\mathbb{E}^1$, $\phi(x)=x^3$ ei ole diffeomorfismi, sillä sen käänteiskuvaus $y\mapsto\sqrt[3]{y}$ ei ole sileä origossa.

Esimerkissä 1.16 totesimme, että maksimaalinen kartasto $\mathscr{U}$, joka sisältää kartaston $\{(\mathbb{E}^1,\phi)\}$ on eri kuin kanonisen kartaston maksimaalinen kartasto. Kuvaus $\phi^{-1}\colon\mathbb{E}^1\to(\mathbb{E}^1,\mathscr{U})$ on diffeomorfismi, sillä sen esitys koordinaateissa on $\phi\circ\phi^{-1}\circ\mathrm{id}^{-1}=\mathrm{id}$, joka on sileä.

Lemma 2.12. *Olkoon M sileä n-monisto ja olkoon $U\subset M$ avoin, $U\neq\varnothing$. Olkoon $F\colon U\to F(U)\subset\mathbb{E}^n$ sileä diffeomorfismi. Tällöin (U,F) on sileä kartta.*

Todistus. Harjoitustehtävä 2.9. $\square$

Jos sileät monistot $(M,\mathscr{U})$ ja $(M,\mathscr{V})$ ovat diffeomorfisia, niin differentioituvat rakenteet $\mathscr{U}$ ja $\mathscr{V}$ ovat *ekvivalentteja.*

Jos sileät monistot ovat diffeomorfisia, niitä ajatellaan saman abstraktin sileän moniston ilmentyminä ja sanotaan, että ne ovat *diffeomorfismia vaille samat.* Jokaisella korkeintaan 3-ulotteisella monistolla on diffeomorfismia vaille yksikäsitteinen differentioituva rakenne. Topologisella avaruudella $\mathbb{E}^4$ on ylinumeroituvan monta differentioituvaa rakennetta, jotka eivät ole keskenään ekvivalentteja. Donaldsonin ja Freedmanin 1980-luvulla todistamista tuloksista seuraa, että tällaisia eksoottisia rakenteita on.[1] Kompakteille monistoille tiedettiin jo aiemmin esimerkkejä monistoista, joilla on useita differentioituvia rakenteita, jotka eivät ole ekvivalentteja keskenään. Esimerkiksi Milnor [Mil] osoitti, että monistolla $\mathbb{S}^7$ on 15 differentioituvaa rakennetta diffeomorfismia vaille. Toisaalta Kervaire [Ker] antoi esimerkin 10-monistosta, jolla ei ole yhtään differentioituvaa rakennetta.

On helpompi osoittaa, että diffeomorfisten sileiden monistojen on oltava samanulotteisia kuin, että homeomorfiset topologiset monistot ovat samanulotteisia.[2]

Propositio 2.13. *Olkoon M sileä m-monisto ja olkoon N sileä n-monisto. Jos M ja N ovat diffeomorfisia, niin $m=n$.*

Todistus. Olkoon $F\colon M\to N$ diffeomorfismi. Olkoon (U,ϕ) sileä kartta monistolla M ja olkoon (V,ψ) sileä kartta monistolla N siten, että $V\subset F(U)$. Kuvaus

$$\widehat{F}=\psi\circ F\circ(\phi|_{F^{-1}(V)})^{-1}$$

on diffeomorfismi avaruuden $\mathbb{E}^m$ avoimelta epätyhjältä joukolta $\phi(F^{-1}(V))$ avaruuden $\mathbb{E}^n$ avoimelle joukolle $\phi(V)$.

Olkoon $x_0\in\phi(F^{-1}(V))$. Ketjusäännön nojalla

$$I_n=D(\widehat{F}^{-1}\circ\widehat{F})(x_0)=D(\widehat{F}^{-1})(\widehat{F}(x_0))\,D\widehat{F}(x_0)$$

ja

$$I_m=D(\widehat{F}\circ\widehat{F}^{-1})(\widehat{F}(x_0))=D\widehat{F}(x_0)\,D(\widehat{F}^{-1})(\widehat{F}(x_0))\,,$$

joten $D\widehat{F}(x_0)$ on kääntyvä[3] ja $D(\widehat{F}^{-1}(\widehat{F}(x_0))=D\widehat{F}(x_0)^{-1}$. Siis $n=m$. $\square$

[1] Katso esimerkiksi [FQ].
[2] Katso luku 1.2.
[3] Katso Harjoitustehtävä 2.10.

2.5 Sileä töyssy

Olkoon $f\colon \mathbb{E}^1 \to \mathbb{E}^1$,

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & \text{kun } t > 0 \\ 0, & \text{kun } t \leqslant 0 \end{cases}.$$

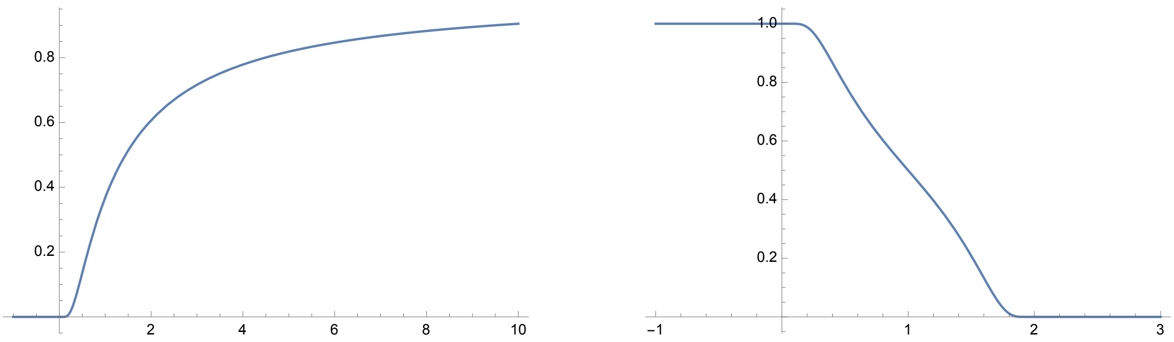
Olkoot $a < b$ ja olkoon $g\colon \mathbb{E}^1 \to \mathbb{E}^1$,

$$h_{a,b}(t) = \frac{f(b-t)}{f(b-t) + f(t-a)} \tag{2.1}$$

kaikilla $t \in \mathbb{E}^1$.

Lemma 2.14. *Funktiot f ja h ovat sileitä. Lisäksi $h_{a,b}(t) = 1$ kaikilla $t \leqslant a$ ja $h_{a,b}(t) = 0$ kaikilla $t \geqslant b$.*

Todistus. Funktion f sileys on analyysin harjoitustehtävä. Funktion $h_{a,b}$ määrittelevän lausekkeen nimittäjällä ei ole nollakohtia, koska $a < b$. Sen sileys seuraa siis funktion f sileydestä. Katso [Lee2, Lemmat 2.20,2.21]. □



Kuva 2.2 — Funktioiden f ja $h_{1,2}$ kuvaajat.

Olkoot $0 < a < b$ ja olkoon $h\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$,

$$H_{a,b}(x) = h_{a,b}(\|x\|)\,.$$

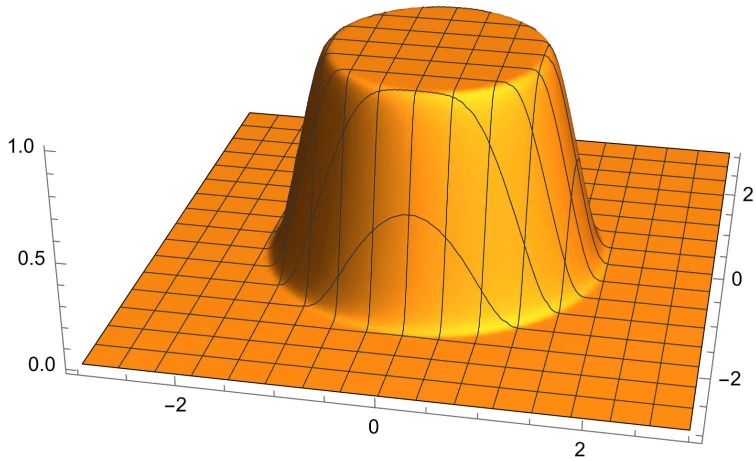
Lemma 2.15. *Funktio $H_{a,b}$ on sileä. Lisäksi $H(x) = 1$ kaikilla $x \in \overline{B}(0,a)$ ja $H_{a,b}(x) = 0$ kaikilla $x \notin \overline{B}(0,b)$.*

Todistus. Katso [Lee2, Lemma 2.22]. □

Funktio $H_{a,b}$ on *sileä töyssy* pisteessä $0 \in \mathbb{E}^n$.

Lemma 2.16. *Olkoon M sileä n-monisto ja olkoon (U,ϕ) p-keskinen kartta pisteessä p. Olkoon $b > 0$ siten, että $\overline{B}(\phi(p),b) \subset \phi(U)$ ja olkoon $0 < a < b$. Olkoon $\eta_{a,b}\colon M \to \mathbb{E}^1$,*

$$\eta_{a,b}(q) = \begin{cases} H \circ \phi(q), & \textit{kun } q \in U, \\ 0 & \textit{muulloin} \end{cases}.$$



Kuva 2.3 — Sileä töyssy $H_{1,2}$ tasossa.

Tällöin $\eta_{a,b}$ on sileä funktio, jolle pätee $\eta_{a,b}(q) = 1$ jossain pisteen p avoimessa ympäristössä ja jonka kantaja[4] sisältyy avoimeen joukkoon U. □

Sileä töyssyfunktio on käyttökelpoinen työkalu, jonka avulla voimme esimerkiksi jatkaa jonkin pisteen $p \in M$ koordinaattiympäristössä määritellyn sileän funktion koko monistolla M määritellyksi sileäksi funktioksi, joka saa samat arvot kuin alkuperäinen funktio jossain pisteen p ympäristössä.

Lemma 2.17. *Olkoon M sileä n-monisto ja olkoon $p \in M$. Olkoon U pisteen p avoin ympäristö ja olkoon $g \in \mathrm{C}^\infty(U)$. Tällöin on $\widetilde{g} \in \mathrm{C}^\infty(M)$, ja pisteen p avoin ympäristö $V \subset U$, joille pätee $g|_V = \widetilde{g}|_V$.*

Todistus. Olkoon (W, ϕ) p-keskinen kartta.[5] Lemman 2.16 nojalla on sileä töyssy $\eta\colon M \to \mathbb{E}^1$, jonka kantaja sisältyy joukkoon $W \cap U$. Olkoon $\widetilde{g}\colon M \to \mathbb{E}^1$,

$$\widetilde{g}(q) = \begin{cases} \eta(q)g(q)\,, & \text{kun } q \in W \cap U, \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}.$$

Tällöin $\widetilde{g}$ on sileä kaikissa avoimen joukon $W \cap U$ pisteissä, koska se on kahden sileän funktion tulo. Jos $q \notin W \cap U$, niin $\eta(q) = 0$ ja koska jatkuvan funktion kantaja on suljettu, pisteellä q on avoin ympäristö, jossa $\widetilde{g}$ on vakio nollafunktio. Siis $\widetilde{g}$ on sileä pisteessä q, joten $\widetilde{g} \in \mathrm{C}^\infty(M)$. □

[4]Funktion *kantaja* on sen nollajoukon komplementti.
[5]Avoin joukko U ei välttämättä ole karttaympäristö.

Harjoitustehtäviä

2.1. Todista Propositio 2.5.

2.2. Todista Propositio 2.6.

2.3. Osoita, että inkluusiokuvaus $i\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{E}^2$, $i(p) = p$, on sileä.

2.4. Olkoon $f\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^1$ sileä funktio. Osoita, että $f|_{\mathbb{S}^1}$ on sileä.

2.5. Osoita, että tekijäkuvaus $\pi\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{T}^n$, $\pi(x) = x + \mathbb{Z}^n$, on sileä.

2.6. Osoita, että kuvaus $\pi\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$, $\pi(x) = [x]$, on sileä lokaali diffeomorfismi.

2.7. Olkoot M ja N sileitä monistoja ja olkoon $q_0 \in N$. Olkoon $i_{q_0}\colon M \to M \times N$ kuvaus $i_{q_0}(p) = (p, q_0)$. Osoita, että i_{q_0} on sileä.

2.8. Osoita, että kuvaus $F\colon \mathbb{T}^1 \to \mathbb{S}^1$, $F(s + \mathbb{Z}) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$ on sileä.

2.9. Todista Lemma 2.12.

2.10. Olkoot A ja B matriiseja, joille pätee $AB = I_n$ ja $BA = I_m$. Osoita, että $B = A^{-1}$ ja $n = m$.

2.11. Olkoon M sileä n-monisto, $n \geqslant 1$. Osoita, että vektoriavaruus $\mathfrak{F}(M)$ on ääretönulotteinen.[6]

2.12. Olkoot M, N_1 ja N_2 sileitä monistoja. Olkoot $\pi_k\colon N_1 \times N_2 \to N_k$ projektiokuvaukset $\pi_k(p_1, p_2) = p_k$, kun $k \in \{1, 2\}$. Osoita, että kuvaus $F\colon M \to N_1 \times N_2$ on sileä, jos ja vain jos kuvaukset $\pi_1 \circ F$ ja $\pi_2 \circ F$ ovat sileitä.

[6]Osoita, että se ei ole äärellisulotteinen! Töyssyfunktioista voi olla apua tässä.

Luku 3

Tangenttiavaruus

Tässä luvussa määritellään sileän moniston tangenttivektorit yleistämällä euklidisen avaruuden suuntaisderivaatan käsite tarkasteltavaan abstraktimpaan tilanteeseen.

3.1 Euklidisen avaruuden tangenttivektorit ja derivaatiot pisteessä

Olkoon $U \subset \mathbb{E}^n$ avoin joukko ja olkoon $p \in U$. Jokainen vektori $v \in \mathbb{R}^n$ määrää *suuntaisderivaatan* pisteessä p asettamalla jokaiselle[1] $f \in \mathrm{C}^\infty(U)$

$$\partial_v|_p f = \partial_v f(p) = Df(p)v = (\nabla f(p) \,|\, v) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}\,.$$

Differentiaalilaskennasta tiedämme, että suuntaisderivaatta $\partial_v|_p \colon \mathrm{C}^\infty(U) \to \mathbb{R}$ on lineaarikuvaus, joka toteuttaa *Leibnitzin säännön*: Jos $f, g \in \mathrm{C}^\infty(U)$ ja $v \in \mathbb{R}^n$, niin

$$\partial_v|_p(fg) = \partial_v|_p f g(p) + f(p)\partial_v|_p g\,.$$

Tässä luvussa tarkastelemme suuntaisderivaatan yleistystä monistoille.

Olkoon M sileä monisto ja olkoon $p \in M$. Lineaarikuvaus $\mathfrak{d} \colon \mathrm{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ on avaruuden $\mathrm{C}^\infty(M)$ *(piste)derivaatio pisteessä* p, jos se toteuttaa *Leibnitzin säännön*

$$\mathfrak{d}(fg) = \mathfrak{d}(f)g(p) + f(p)\mathfrak{d}(g)\,.$$

Olkoon $\mathfrak{D}_p(M)$ pisteen $p \in M$ pistederivaatioiden joukko.

Määritelmä on asetettu niin, että suuntaisderivaatta on derivaatio pisteessä p kaikilla $p \in U$, kun $U \subset \mathbb{E}^n$ on avoin joukko.

[1] Suuntaisderivaatan määritelmä toimii toki yleisemmillekin funktioille mutta tällä kurssilla tarkastelemme vain sileitä funktioita.

Lemma 3.1. *Olkoon M sileä monisto. Olkoon $\mathfrak{d}$ pistederivaatio pisteessä $p \in M$.*
(1) Jos c on vakiofunktio, niin $\mathfrak{d}c = 0$.
(2) Jos $f, g \in \mathrm{C}^\infty(M)$ ja $f(p) = g(p) = 0$, niin $\mathfrak{d}(fg) = 0$.

Todistus. Derivaatiolle $\mathfrak{d}$ pätee $\mathfrak{d}(1) = \mathfrak{d}(1 \cdot 1) = 1\mathfrak{d}(1) + \mathfrak{d}(1)1$, joten $\mathfrak{d}(1) = 0$. Lineaarisuuden nojalla sama pätee kaikille vakiofunktioille.
(2) Seuraa suoraan Leibnitzin säännöstä. □

Lemma 3.2. *Olkoon M sileä monisto ja olkoon $p \in M$. Derivaatiot pisteessä p muodostavat vektoriavaruuden.*

Todistus. Harjoitustehtävä 3.1. □

Euklidisen avaruuden pistederivaatiot ovat suuntaisderivaattoja:

Propositio 3.3. *Lineaarikuvaus $L\colon \mathrm{C}^\infty(\mathbb{E}^n) \to \mathbb{R}$ on derivaatio pisteessä p, jos ja vain jos $L = \partial_v|_p$ jollain $v \in \mathbb{R}^n$.*

Todistus. Olkoon $\mathfrak{d}$ derivaatio pisteessä $p \in \mathbb{E}^n$. Olkoon $f \in \mathrm{C}^\infty(U)$. Tarkastellaan funktiota f janalla $t \mapsto p + t(x - p)$. Ketjusäännön mukaan

$$\frac{d}{dt} f(p + t(x - p)) = Df(p + t(x - p))\,(x - p) = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(p + t(x - p))\,(x_k - p_k)\,,$$

joten integroimalla saadaan

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + \sum_{k=1}^{n} (x_k - p_k) \int_0^1 \partial_k f(p + t(x - p))dt \\ &= f(p) + \sum_{k=1}^{n} (x_k - p_k)\, g_k(x)\,. \end{aligned}$$

Erityisesti $g_k(p) = \partial_k f(p)$. Derivaation Leibnitzin säännön, lineaarisuuden ja Lemman 3.1 nojalla

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}(f) &= \mathfrak{d}\Big(\sum_{k=1}^{n} (x_k - p_k)\, g_k(x)\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{d}(x_k - p_k)\, g_k(p) + \mathfrak{d}(g_k)(p_k - p_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(p) \mathfrak{d}(x_k) \\ &= \big(\nabla f(p) \,|\, (\mathfrak{d}(x_1), \mathfrak{d}(x_2), \ldots, \mathfrak{d}(x_n)\big) = \partial_{(\mathfrak{d}(x_1), \mathfrak{d}(x_2), \ldots, \mathfrak{d}(x_n))}\big|_p f\,. \end{aligned}$$

Siis derivaatio $\mathfrak{d}$ on suuntaisderivaatta. □

Lause 3.4. *Kuvaus $\partial_\cdot\colon \mathbb{R}^n \to \mathfrak{D}_p(\mathbb{E}^n)$, $v \overset{\partial_\cdot}{\mapsto} \partial v|_p$, on lineaarinen bijektio.*

Todistus. Suuntaisderivaatan määritelmän nojalla

$$\partial_{\lambda v + \mu w}|_p f = Df(p)(\lambda v + \mu w) = \lambda Df(p)v + \mu Df(p)w = (\lambda \partial_v|_p + \mu \partial_w|_p) f\,,$$

joten kuvaus on lineaarinen. Surjektiivisuus osoitettiin Propositiossa 3.3.

Olkoon $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Kuvaukselle $r_k \colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$, $r_k(x) = x_k$ pätee

$$\partial_v r_k(p) = D\, r_k(p)v = v_k\,,$$

kun $1 \leqslant k \leqslant n$. Koska $v \neq 0$, niin on $1 \leqslant k \leqslant n$, jolle $v_k \neq 0$. Siis $\partial_v|_p \neq 0$, joten kuvaus $v \mapsto \partial_v|_p$ on injektio. □

Lause 3.4 samastaa euklidisen avaruuden tangenttiavaruuden pisteessä $p \in \mathbb{E}^n$ ja vektoriavaruuden, jonka alkiot ovat derivaatioita, siis suuntaisderivaattoja pisteessä p:

$$T_p(\mathbb{E}^n) = \mathfrak{D}_p(\mathbb{E}^n)\,.$$

Tämä havainto on sileän moniston tangenttiavaruuden määritelmän taustalla:

Sileän moniston M *tangenttiavaruus* pisteessä p on

$$T_p(M) = \mathfrak{D}_p(M)\,.$$

Seuraava tulos osoittaa, että pistederivaatio määräytyy funktion käytöksestä tarkasteltavan pisteen lähellä.

Propositio 3.5. *Olkoon M sileä monisto ja olkoon $p \in M$. Olkoot $f, g \in \mathrm{C}^\infty(M)$. Jos on pisteen p avoin ympäristö V, jossa $f|_V = g|_V$, niin $vf = vg$ kaikille $v \in T_pM$.*

Todistus. Olkoon (U, ϕ), $U \subset V$, p-keskinen kartta. Joukko $\phi(U) \subset \mathbb{E}^n$ on origon avoin ympäristö, joten on $b > 0$ siten, että $\overline{B}(0, b) \subset \phi(U)$. Olkoon $0 < a < b$. Olkoon $\eta_{a,b}$ sileä töyssy kuten Lemmassa 2.16. Näillä parametrien valinnoilla pätee $(f-g)(1-\eta_{a,b}) = f-g$.

Olkoon $v \in T_pM$. Lemman 3.1 nojalla pätee

$$v(f-g) = v\big((1-\eta_{a,b})(f-g)\big) = 0\,,$$

joten pistederivaation lineaarisuudesta seuraa $vf = vg$. □

3.2 Sileän kuvauksen differentiaali pisteessä

Jos $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ ja $F \in \mathrm{C}^\infty(M, N)$, niin Proposition 2.7 nojalla $f \circ F \in \mathrm{C}^\infty(N)$.

Lemma 3.6. *Olkoot M ja N sileitä monistoja ja olkoon $p \in M$. Olkoon $F \colon M \to N$ sileä kuvaus ja olkoot $v \in T_pM$ ja $f \in \mathrm{C}^\infty(N)$. Olkoon $\widetilde{v} \colon \mathrm{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$, $\widetilde{v}(f) = v(f \circ F)$. Tällöin $\widetilde{v} \in T_{F(p)}N$.*

Todistus. Olkoot $f, g \in \mathrm{C}^\infty(N)$ ja $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tällöin kuvauksen v linearisuuden nojalla

$$\widetilde{v}(\lambda f + \mu g) = v(\lambda f \circ F + \mu g \circ F) = \lambda v(f \circ F) + \mu v(g \circ F) = \lambda \widetilde{v}(f) + \mu \widetilde{v}(g)\,,$$

joten $\widetilde{v}$ on lineaarinen. Vastaavasti derivaation v Leibnitzin säännöstä seuraa

$$\begin{aligned}\widetilde{v}(fg) = v((fg) \circ F) &= v(f \circ F\, g \circ F) = v(f \circ F)\, g \circ F(p) + f \circ F(p)\, v(g \circ F)\\ &= \widetilde{v}(f)\, g(F(p)) + f(F(p))\, \widetilde{v}(g)\,,\end{aligned}$$

joten $\widetilde{v}$ toteuttaa Leibnitzin säännön. □

Lemman 3.6 nojalla seuraava määritelmä on hyvin asetettu.

Olkoot M ja N sileitä monistoja ja olkoon $F\colon M \to N$ sileä kuvaus ja olkoon $p \in M$. Kuvaus $dF_p\colon T_pM \to T_{F(p)}N$,

$$dF_p(v)(f) = v(f \circ F)$$

kaikilla $f \in \mathrm{C}^\infty(N)$, on kuvauksen F *differentiaali* pisteessä $p \in M$.

Propositio 3.7. *(1) Sileän kuvauksen $F\colon M \to N$ differentiaali pisteessä $p \in M$ on lineaarikuvaus.*

(2) Olkoot M_1, M_2 ja M_3 sileitä monistoja ja olkoot $F_1\colon M_1 \to M_2$ ja $F_2\colon M_2 \to M_3$ sileitä kuvauksia. Tällöin

$$d(F_2 \circ F_1)_p = (dF_2)_{F_1(p)}(dF_1)_p\,.$$

(3) Sileän moniston M identtisen kuvauksen differentiaali pisteessä $p \in M$ on id_{T_pM}.

(4) Jos F on sileä diffeomorfismi, niin dF_p on lineaarinen bijektio ja

$$(dF_p)^{-1} = (dF^{-1})_{F(p)}\,.$$

Todistus. Harjoitustehtävät 3.2 ja 3.3. □

Propositio 3.8. *Olkoon M sileä monisto, olkoon $U \subset M$ avoin joukko ja olkoon $p \in U$. Olkoon $i\colon U \to M$ inkluusiokuvaus. Tällöin $di_p\colon T_pU \to T_pM$ on isomorfismi.*[2]

Todistus. Osoitetaan ensin, että di_p on injektio. Olkoon $v \in T_pU$ siten, että $di_p(v) = 0 \in T_pM$. Tällöin kaikille $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ pätee

$$0 = di_p(v)(f) = v(f \circ i) = v(f|_U)\,.$$

Olkoon $g \in \mathrm{C}^\infty(U)$. Lemman 2.17 nojalla on $\widetilde{g} \in \mathrm{C}^\infty(M)$ ja pisteen p avoin ympäristö $V \subset U$ siten, että $g|_V = \widetilde{g}|_V$. Proposition 3.5 nojalla $vg = v(\widetilde{g}|_U) = 0$. Tämä pätee kaikille $g \in \mathrm{C}^\infty(U)$, joten $v = 0$. Siis di_p on injektio.

Osoitetaan sitten, että di_p on surjektio. Olkoon $v \in T_pM$. Olkoon $\hat{v}\colon \mathrm{C}^\infty(U) \to \mathbb{R}$ kuvaus $\hat{v}f = v\widetilde{f}$, missä $\widetilde{f} \in \mathrm{C}^\infty(M)$ on mikä tahansa funktio, jolle $\widetilde{f}|_W = f|_W$ jossain pisteen p ympäristössä $W \subset U$. Kuvaus $\hat{v}$ on hyvin määritelty Proposition 3.5 nojalla ja Harjoitustehtävässä 3.4 tarkastetaan, että $\hat{v} \in T_pU$. Kaikille $g \in \mathrm{C}^\infty(M)$ pätee Proposition 3.5 nojalla

$$di_p(\hat{v})g = \hat{v}(g \circ i) = \hat{v}(g|_U) = v(\widetilde{g|_U}) = vg\,,$$

joten $di_p(\hat{v}) = v$. □

Lause 3.9. *Olkoon M sileä n-monisto ja olkoon $p \in M$. Tällöin $\dim T_pM = n$.*

Todistus. Olkoon (U,ϕ) kartta, joka sisältää pisteen p. Lemman 2.10 nojalla $\phi\colon U \to \phi(U)$ on diffeomorfismi. Proposition 3.7(4) nojalla vektoriavaruudet T_pU ja $T_{\phi(p)}\mathbb{E}^n$ ovat isomorfisia. Proposition 3.8 ja Lauseen 3.4 nojalla

$$\dim T_pM = \dim T_pU = T_{\phi(p)}\mathbb{E}^n = \dim \mathbb{R}^n = n\,. \qquad \square$$

[2]Se on siis lineaarinen bijektio.

3.3 Laskelmia koordinaateissa

Olkoon (U, ϕ) kartta sileällä n-monistolla M ja olkoon $p \in U$. Lauseen 3.4 nojalla *koordinaatti(tangentti)vektorit* $\partial_1|_{\phi(p)}, \dots, \partial_n|_{\phi(p)}$ muodostavat tangenttiavaruuden $T_{\phi(p)}\mathbb{E}^n$ kannan. Tangenttivektori

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \partial_i|_p = (d\phi_p)^{-1}(\partial_i|_{\phi(p)})$$

on i:s *koordinaattivektori* pisteessä p *kartan* ϕ *määräämissä koordinaateissa.*

Seuraus 3.10. *Koordinaattivektorit muodostavat tangenttiavaruuden T_pM kannan.*

Todistus. Väite seuraa Lauseen 3.9 todistuksesta. □

Tässä otamme käyttöön yleisen merkintätavan moniston koordinaattivektorille pisteessä $p \in M$.

Huomaa, että siirrymme nyt differentiaaligeometriassa koordinaatteja käyttävissä laskuissa yleiseen merkintätapaan, jossa koordinaatin x komponentteja merkitään yläindeksillä

$$\phi(q) = (x^1(q), x^2(q), \dots, x^n(q)).$$

Sääntö: Tangenttiavaruuden kantavektoreille käytetään alaindeksejä ja vektorin komponenteille yläindeksejä. Indeksi i lausekkeessa $\frac{\partial}{\partial x^i}$ tulkitaan alaindeksiksi, koska se on *murtolausekkeen* nimittäjän yläindeksi.

Einsteinin summaussääntö: Jos sama indeksi esiintyy kerran yläindeksinä ja kerran alaindeksinä monomilausekkeessa kuten ca^ib_i lauseke tarkoittaa summaa $\sum_{i=1}^n ca^ib_i$.Välttelemme kuitenkin Einsteinin summaussäännön käyttöä.

Olkoot M sileä m-monisto ja N sileä n-monisto ja olkoon $F\colon M \to N$ sileä kuvaus. Olkoon $\phi = (x^1, \dots, x^m)$ lokaali koordinaatti pisteessä $p \in M$ ja olkoon $\psi = (y^1, \dots, y^n)$ lokaali koordinaatti pisteessä $F(p) \in N$. Tällöin määritelmien ja differentiaalilaskennan nojalla

$$\begin{aligned}
dF_p(\partial_i|_p) &= dF_p d(\phi^{-1})_{\phi(p)}(\partial_i|_{\phi(p)}) \\
&= d(\psi^{-1})_{\psi\circ F(p)} d(\psi \circ F \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}(\partial_i|_{\phi(p)}) \\
&= d(\psi^{-1})_{\psi\circ F(p)} \sum_{j=1}^n \partial_i(\psi \circ F \circ \phi^{-1})^j(\phi(p))\, \partial_j|_{\psi\circ F(p)} \\
&= \sum_{j=1}^n \partial_i(\psi \circ F \circ \phi^{-1})^j(\phi(p))\, d(\psi^{-1})_{\psi\circ F(p)} \partial_j|_{\psi\circ F(p)} \\
&= \sum_{j=1}^n \partial_i(\psi \circ F \circ \phi^{-1})^j(\phi(p))\, \partial_j|_{F(p)}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Tällainen tiivis merkintätapa soveltuu hyvin esimerkiksi, kun M ja N ovat eri monistoja. Kartanvaihdon vaikutus koordinaattivektoreihin saadaan samalla laskulla mutta nyt edellä käytetty merkintätapa ei ole riittävä, koska käytetty kartasto ei käy ilmi merkinnöistä. Perinteisempi tapa kirjoittaa yhtälö (3.1) on

$$dF_p\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\Big) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi \circ F \circ \phi^{-1})^j}{\partial x^i}(\phi(p))\, \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{F(p)}. \tag{3.2}$$

Jos laskuja on paljon tehtävänä, kuvaukselle $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ on hyvä ottaa käyttöön jokin tiiviimpi merkintätapa.

Olkoon $p \in M$ ja olkoot (U, ϕ) ja (V, ψ) sileitä karttoja pistessä p. Kun $F = \mathrm{id}$, yhtälön (3.1) lasku antaa erikoistapauksena

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}(\psi \circ \phi^{-1})^j \, \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p \tag{3.3}$$

Perinteisesti käytetään lyhennysmerkintää $y^j = y^j(x) = (\psi \circ \phi^{-1})^j$, jolloin yhtälö (3.3) saa muodon

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\phi(p)) \, \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p \tag{3.4}$$

Esimerkki 3.11. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$ ja olkoon

$$C_\alpha = \big\{t(\cos\alpha, \sin\alpha) : t \geqslant 0\big\} .$$

Kuvaus $\Phi_\alpha \colon]0, \infty[\times]-\pi + \alpha, \pi + \alpha[\to U_\alpha = \mathbb{E}^2 - C_\alpha$,

$$\Phi_\alpha(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) ,$$

antaa tason $\mathbb{E}^2$ *napakoordinaatit.* Tällöin $\Phi_\alpha^{-1} \colon U \to]0, \infty[\times]-\pi + \alpha, \pi + \alpha[$ on karttakuvaus monistolla $\mathbb{E}^2$. Valinta $\alpha = 0$ antaa tavanomaiset napakoordinaatit.

Tarkastelemalla karttoja $\phi = \Phi_\alpha^{-1}$ ja $\psi = \mathrm{id}$, kartanvaihto antaa lausekkeet

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\Big|_{\Phi_\alpha(r_0,\theta_0)} &= \cos\theta_0 \frac{\partial}{\partial x^1} + \sin\theta_0 \frac{\partial}{\partial x^2} , \\
\frac{\partial}{\partial \theta}\Big|_{\Phi_\alpha(r_0,\theta_0)} &= -r_0 \sin\theta_0 \frac{\partial}{\partial x^1} + r_0 \cos\theta_0 \frac{\partial}{\partial x^2} ,
\end{aligned}$$

tai toisessa muodossa

$$\begin{aligned}
r_0 \frac{\partial}{\partial r}\Big|_{\Phi_\alpha(r_0,\theta_0)} &= x_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x^2} , \\
\frac{\partial}{\partial \theta}\Big|_{\Phi_\alpha(r_0,\theta_0)} &= -x_2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x^2} ,
\end{aligned}$$

missä $(x_1, x_2) = \Phi_\alpha(r_0, \theta_0)$.

3.4 Polun tangenttivektori

Sileän moniston $\mathbb{E}^1$ tangenttiavaruus pisteessä $t_0 \in \mathbb{E}^1$ on 1-ulotteinen Lauseen 3.9 nojalla. Tällöin tangenttiavaruudella $T_{t_0}\mathbb{E}^1$ on luonnollinen kanta $\frac{\partial}{\partial t}\big|_{t_0}$, jolle perinteisesti käytetään merkintää

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t_0} = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t_0}$$

Olkoon M sileä monisto ja olkoon $p \in M$. Olkoon J avoin väli, olkoon $\gamma \colon J \to M$ sileä polku ja olkoon $t_0 \in J$ siten, että $\gamma(t_0) = p$. *Sileän polun γ tangenttivektori pisteessä p* tai *nopeus hetkellä t_0* on[a]

$$\dot\gamma(t_0) = d\gamma_{t_0} \frac{d}{dt}\Big|_{t_0} .$$

[a]Lee [Lee2, s. 69] merkitsee nopeusvektoria $\gamma'(t_0)$.

Olkoon $\gamma\colon I \to M$ sileä polku ja olkoon $t_0' \in I$. Olkoon (U, ϕ) kartta, joka sisältää pisteen $\gamma(t_0)$ ja olkoot $x^1, x^2, \dots, x^n$ karttakuvauksen ϕ komponenttifunktiot. Merkitään $\gamma_i = x_i \circ \gamma$ kaikille $1 \leqslant i \leqslant n$. Tällöin saamme kaavan (3.1) erikoistapauksena

$$\dot\gamma(t_0) = \sum_{i=1}^n \frac{d\gamma^i}{dt}(t_0)\,\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(t_0)} . \tag{3.5}$$

Propositio 3.12. *Olkoon M sileä monisto ja olkoon $p \in M$. Jokaiselle $v \in T_pM$ on avoin väli $I \subset \mathbb{E}^1$, jolle $0 \in I$, ja sileä polku $\gamma\colon I \to M$, jolle $\dot\gamma(0) = v$.*

Todistus. Olkoon (U, ϕ) sileä p-keskinen kartta. Olkoon $\hat v \in \mathbb{R}^n$ siten, että[3]

$$d\phi_p v = \sum_{k=1}^n \hat v^k \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_0 .$$

Olkoon $\gamma_0\colon]-\varepsilon, \varepsilon[\to \phi(U)$,

$$\gamma_0(t) = t\,\hat v .$$

Tällöin jokaiselle $f \in C^\infty(\phi(U))$ pätee

$$\Big(d(\gamma_0)_0 \frac{d}{dt}\Big|_0\Big) f = \frac{d}{dt}\Big|_0 f \circ \gamma_0 = \frac{d}{dt}\Big|_0 f(t\hat v) = Df(0)\hat v = (d\phi_p v) f .$$

Siis

$$d(\gamma_0)_0 \frac{d}{dt}\Big|_0 = d\phi_p v .$$

Olkoon $\gamma = \phi^{-1} \circ \gamma_0$. Proposition 3.7 kohtien (2) ja (4) nojalla

$$\dot\gamma(0) = d(\phi^{-1} \circ \gamma_0)_0 \frac{d}{dt}\Big|_0 = d(\phi^{-1})_0 \circ d(\gamma_0)_0 \frac{d}{dt}\Big|_0 = d(\phi^{-1})_0 \circ d\phi_p v = v . \qquad \square$$

Seuraavaa tulosta voidaan käyttää Proposition 3.12 avulla sileiden kuvausten differentiaalien määrittämiseen.

Propositio 3.13. *Olkoot M ja N sileitä monistoja ja olkoon $F\colon M \to N$ sileä kuvaus. Olkoon $p \in M$ ja olkoon $v \in T_pM$. Olkoon $\gamma\colon I \to M$ sileä polku, jolle pätee $\dot\gamma(0) = v$. Tällöin*

$$dF_p v = (F \dot\circ \gamma)(0) .$$

Todistus. Oletuksen, polun nopeuden määritelmän, Proposition 3.7(2) ja differentiaalin määritelmän nojalla saadaan

$$dF_p v = dF_p \dot\gamma(0) = dF_p\, d\gamma_0 \frac{d}{dt}\Big|_0 = d(F \circ \gamma)_0 \frac{d}{dt}\Big|_0 = (F \dot\circ \gamma)(0) . \qquad \square$$

Tangenttiavaruus voidaan esittää myös sileiden polkujen avulla. Olkoon

$$\Gamma_p = \{\gamma\colon J \to M : J \ni 0 \text{ avoin väli},\ \gamma\colon J \to M \text{ sileä},\ \gamma(0) = p\} .$$

Määritellään $\gamma_1 \sim \gamma_2$, jos ja vain jos $\frac{d}{dt} f \circ \gamma_1(0) = \frac{d}{dt} f \circ \gamma_2(0)$ kaikille $f \in C^\infty(M)$.

Propositio 3.14. *Olkoon M sileä monisto ja olkoon $p \in M$. Kuvaus $[\gamma] \mapsto \dot\gamma(0)$ on hyvin määritelty bijektio tekijäjoukolta $\Gamma_p/\sim$ tangenttiavaruudelle T_pM.*

Todistus. Harjoitustehtävä 3.7 $\square$

[3] Lauseen 3.4 nojalla, jos $v \in T_p\mathbb{E}^n$, niin $v = \partial_{\hat v} = \sum_{k=1}^n \hat v^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ jollain $\hat v \in \mathbb{R}^n$.

Harjoitustehtäviä

3.1. Todista Lemma 3.2.

3.2. Todista Proposition 3.7 kohdat (1) ja (2).

3.3. Todista Proposition 3.7 kohdat (3) ja (4).

3.4. Osoita, että Propositiossa 3.8 määritelty kuvaus $\hat{v}$ on avaruuden $\mathfrak{F}(U)$ pistederivaatio pisteessä p.

3.5. Pisteen $x \in \mathbb{E}^3 \backslash \{0\}$ *pallokoordinaatit* määräytyvät lausekkeella

$$x = (r \cos\theta_1 \sin\theta_2, r \sin\theta_1 \sin\theta_2, r\cos\theta_2)\,.$$

Olkoon $p \in \mathbb{E}^3 - \{0\}$. Määritä tangenttivektorien $\frac{\partial}{\partial r}\big|_p$, $\frac{\partial}{\partial \theta_1}\big|_p$ ja $\frac{\partial}{\partial \theta_2}\big|_p$ lausekkeet kannassa, jonka muodostavat $\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p$, $\frac{\partial}{\partial x^2}\big|_p$ ja $\frac{\partial}{\partial x^3}\big|_p$.

3.6. Olkoot M_1 ja M_2 sileitä monistoja ja olkoot $\pi_k\colon M_1 \times M_2 \to M_k$ projektiokuvaukset $\pi_k(p_1, p_2) = p_k$, kun $k \in \{1, 2\}$. Olkoon $p = (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$. Osoita, että kuvaus $d(\pi_1)_p \times d(\pi_2)_p\colon T_p(M_1 \times M_2) \to T_{p_1}(M_1) \times T_{p_2}(M_2)$,

$$d(\pi_1)_p \times d(\pi_2)_p(v) = (d(\pi_1)_p(v), d(\pi_2)_p(v))\,,$$

on lineaarinen isomorfismi.[4]

3.7. Todista Propositio 3.14.

Olkoon G sileä monisto ja olkoon joukossa G määritelty laskutoimitus, jota merkitsemme kuten kertolaskua, siten, että G on ryhmä ja kuvaukset $\mu\colon G \times G \to G$, $\mu(g, h) = gh$ ja $\iota\colon G \to G$, $\iota(g) = g^{-1}$ ovat sileitä. Tällöin G on *Lien ryhmä*.

3.8. Olkoon G Lien ryhmä ja olkoon $e \in G$ neutraalialkio. Osoita, että[5]

$$d\mu_{(e,e)}(v, w) = v + w$$

ja

$$d\iota_e(v) = -v\,.$$

[4]Käytä tuloavaruudessa sileää rakennetta, joka määriteltiin esimerkissä 1.15. Mitä koordinaattivektoreille tapahtuu?

[5]Laske ensin $d\mu_{(e,e)}(v, 0)$ esimerkiksi Propositioiden 3.12 ja 3.13 avulla.

Luku 4

Tangenttikimppu ja vektorikentät

Olkoon $U \subset \mathbb{E}^n$ avoin joukko. Kuvaus $X: U \to \mathbb{E}^n$ on *vektorikenttä* joukossa U. Vektorikentät ovat tärkeitä matemaattisia olioita etenkin, koska sovelluksissa monia ilmiöitä mallinnetaan differentiaaliyhtälöiden ja alkuarvotehtävien

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = X(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

avulla.

Jatkuva tai sileä vektorikenttä X määrää jokaisessa pisteessä $p \in U$ tangenttivektorin $X(p) \in \mathbb{E}^n$, missä $\mathbb{E}^n$ ajatellaan tangenttiavaruudeksi $T_p\mathbb{E}^n$. Tässä luvussa määrittelemme sileän moniston M vektorikentät, joissa jokaiseen pisteeseen $p \in M$ liitetään tangenttivektori $X(p) \in T_pM$. Nyt siis eri pisteissä olevat tangenttivektorit ovat eri vektoriavaruuksissa, jotka yhdessä muodostavat moniston tangenttikimpun, joka on sileä monisto.

4.1 Tangenttikimppu

Olkoon M sileä monisto. Moniston M *tangenttikimppu* on

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$$

varustettuna sileän moniston rakenteella, joka määritellään alla. Tangenttikimpun TM *(kantapiste)projektio* on kuvaus $\pi = \pi_M : TM \to M$, $\pi_M(v,p) = p$.

Tangenttikimpun TM alkiolle (v,p) käytetään merkintää $v_p = (v,p)$, jolloin ajatellaan, että $v_p \in T_pM \subset TM$.

Olkoon (U, ϕ) sileä kartta sileällä n-monistolla M ja olkoon $p \in U$. Luvussa 3.3 huomasimme, että koordinaattivektorit $\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p$ muodostavat tangenttiavaruuden

$T_pM = T_pU$ kannan. Siis jokaisella $(v,p) \in T_pU \subset TU \subset TM$ pätee

$$v = \sum_{k=1}^{n} c^k(v) \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p \tag{4.1}$$

joillain kertoimilla $c^1(v), c^2(v), \ldots, c^n(v) \in \mathbb{R}$. Olkoon $c\colon TU \to \mathbb{E}^n$ kuvaus, jonka komponentit ovat $c^1(v), c^2(v), \ldots, c^n(v)$. Olkoon $\Phi_U\colon TU \to \phi(U) \times \mathbb{E}^n$ kuvaus[1]

$$\Phi_U(v,q) = (\phi(q), c(v))\,.$$

Valitaan joukkoon TU yksikäsitteisesti määritelty topologia, jolle kuvaus Φ_U on homeomorfismi. Olkoon

$$\mathscr{B} = \{A \subset TM : A \subset TU \text{ on avoin jollain koordinaattiympäristöllä } U \subset M\}\,.$$

Lemma 4.1. *Kokoelma $\mathscr{B}$ on joukon TM jonkin topologian kanta.*

Todistus. Selvästi TM on yhdiste kokoelmaan $\mathscr{B}$ sisältyvistä joukoista TU, sillä joukot U peittävät moniston M. Olkoot $A_1, A_2 \in \mathscr{B}$ ja olkoon $(v,p) \in A_1 \cap A_2$. Kokoelman $\mathscr{B}$ määritelmän mukaan on pisteen p karttaympäristöt U_1 ja U_2 siten, että A_1 on avoin joukossa TU_1 ja A_2 on avoin joukossa TU_2.

Joukko $U_1 \cap U_2$ on avoin, joten avaruus $T(U_1 \cap U_2)$ esiintyy kokoelman $\mathscr{B}$ määrittelyssä. Topologinen avaruus $T(U_1 \cap U_2)$ on avaruuksien TU_1 ja TU_2 aliavaruus, joten relatiivitopologian määritelmän nojalla joukot $A_1 \cap T(U_1 \cap U_2)$ ja $A_2 \cap T(U_1 \cap U_2)$ ovat avoimia joukossa $T(U_1 \cap U_2)$. Siis

$$p \in A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_2 \cap T(U_1 \cap U_2) = (A_1 \cap T(U_1 \cap U_2)) \cap (A_2 \cap T(U_1 \cap U_2))$$

on kahden avoimen joukon leikkauksena avoin topologisessa avaruudessa $T(U_1 \cap U_2)$. Väite seuraa kantalemmasta.[2] □

Valitaan joukkoon TM topologia, jonka kanta on $\mathscr{B}$.

Propositio 4.2. *TM on topologinen monisto.*

Todistus. Lemman 4.1 nojalla TM on topologinen avaruus ja konstruktionsa nojalla se on lokaalisti euklidinen. Proposition 1.6 nojalla monistolla M on numeroituva peite koordinaattiympäristöillä U_k, $k \in \mathbb{N}$. Avaruuden TM topologia määriteltiin niin, että joukot $TU_k \subset TM$ ovat homeomorfisia euklidisen avaruuden avoimen joukon kanssa, joten jokaisella topologisella avaruudella TU_k on numeroituva kanta $\mathscr{B}_k$. Numeroituva kokoelma $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{B}_k$ on avaruuden TM topologian numeroituva kanta, joten TM on N_2.

Olkoot $(v,p), (w,q) \in TM$. Jos $p = q$ ja $v \neq w$, niin on $k \in \mathbb{N}$, jolle $(v,p), (w,p) \in TU_k$. Koska TU_k on homeomorfinen euklidisen avaruuden avoimen joukon kanssa, pisteillä (v,p) ja (w,p) on erilliset ympäristöt. Jos taas $p \neq q$, niin pisteillä p ja q on erilliset ympäristöt V_p ja V_q monistolla M Tällöin TV_p ja TV_q ovat pisteiden (v,p) ja (w,q) erilliset ympäristöt. □

[1] Tässä yhteydessä olisi ehkä loogista, että vektorin $v_p \in T_pM$ vaihtoehtoinen merkintätapa olisi (p,v) eikä (v,p) kuten edellä.

[2] Katso [Par2, Lemma 13.5]. Munkres [Mun, §13] ottaa kantalemman ehdot topologian kannan määritelmäksi.

Varustetaan TM kartastolla $\{(TU, \Phi_U) : (U, \phi) \text{ on sileä kartta}\}$.

Propositio 4.3. *Sileän moniston tangenttikimppu on sileä monisto. Kantapisteprojektio on sileä kuvaus.*

Todistus. Olkoon M sileä n-monisto. Olkoot (TU, Φ) ja (TV, Ψ) tangenttikimpun TM karttoja, jotka liittyvät moniston M sileisiin karttoihin (U, ϕ) ja (V, ψ). Tällöin jokaiselle $(y, w) \in \Phi(TU) = \phi(U) \times \mathbb{R}^n$ pätee[3]

$$\Psi \circ \Phi^{-1}(y, w) = \big(\psi \circ \phi^{-1}(y), D(\psi \circ \phi^{-1})(y)\, w\big)\,, \tag{4.2}$$

joten kartanvaihto on sileä diffeomorfismi. Ensimmäinen väite seuraa Proposition 4.2 nojalla.

Edellä määritellyissä sileissä kartoissa $\phi \circ \pi \circ \Phi^{-1}(y, w) = y$, joten kantapisteprojektio π on sileä. □

Esimerkki 4.4. Jos monistolla M on globaali sileä kartta, niin TM on diffeomorfinen tuloavaruuden $M \times \mathbb{E}^n$ kanssa. Erityisesti $T\mathbb{E}^n$ on diffeomorfinen avaruuden $\mathbb{E}^{2n}$ kanssa. Kaikki tangenttikimput eivät ole näin yksinkertaisia: Algebrallisen topologian keinoilla voidaan osoittaa, että esimerkiksi moniston $\mathbb{S}^2$ tangenttikimppu on monimutkaisempi. Tämän osoittamiseen ei tällä kurssilla ole keinoja. Osoitamme Harjoitustehtävässä 5.10, että sileät monistot $T\mathbb{S}^3$ ja $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{E}^3$ ovat diffeomorfisia.

4.2 Sileän kuvauksen (globaali) differentiaali

Määrittelimme luvussa 3.2 sileän kuvauksen $F\colon M \to N$ pisteittäisen differentiaalin $dF_p\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ jokaisessa pisteessä $p \in M$. Yhdistämme nyt nämä kuvaukset tangenttikimpussa määritellyksi kuvaukseksi luonnollisella tavalla.

Sileän kuvauksen $F\colon M \to N$ *(globaali)differentiaali* on kuvaus $dF\colon TM \to TN$,

$$dF(v, p) = (dF_p v, F(p))\,.$$

Propositio 4.5. *Sileän kuvauksen globaali differentiaali on sileä kuvaus.*

Todistus. Olkoon M sileä m-monisto ja olkoon N sileä n-monisto. Olkoot (TU, Φ) ja (TV, Ψ) karttoja, jotka liittyvät moniston M sileisiin karttoihin (U, ϕ) ja (V, ψ). Tällöin jokaiselle $(y, w) \in \Phi(TU) = \phi(U) \times \mathbb{R}^m$ pätee

$$\Psi \circ F \circ \Phi^{-1}(y, w) = \big(\psi \circ F \circ \phi^{-1}(y), D(\psi \circ F \circ \phi^{-1})(y)\, w\big)\,,$$

joten differentiaali on sileä. □

Propositio 4.6. *(1) Olkoot M_1, M_2 ja M_3 sileitä monistoja ja olkoot $F_1\colon M_1 \to M_2$ ja $F_2\colon M_2 \to M_3$ sileitä kuvauksia. Tällöin $d(F_2 \circ F_1) = dF_2 \circ dF_1$.*

(2) Sileän moniston M identtisen kuvauksen differentiaali on id_{TM}.

(3) Jos F on sileä diffeomorfismi, niin dF on sileä diffeomorfismi ja $(dF)^{-1} = d(F^{-1})$.

Todistus. Harjoitustehtävä 4.1. □

[3] Katso yhtälö (3.3).

4.3 Vektorikentät

Olkoon M sileä monisto. (Sileä) kuvaus $X\colon M \to TM$, jolle pätee $\pi_M \circ X = \mathrm{id}_M$, on *(sileä) vektorikenttä* monistolla M.

Olkoon

$$\mathfrak{X}(M) = \{X\colon M \to TM : X \text{ on sileä vektorikenttä}\} .$$

Käytämme merkintää

$$X_p = X(p) .$$

Tämä on yhteensopivaa koordinaattivektorien ja koordinaattivektorikenttien merkintätapojen kanssa.

Esimerkki 4.7. Olkoon M sileä monisto ja olkoon (U, ϕ) sileä kartta, jonka komponentit ovat $x^1, x^2, \ldots, x^n$. *Koordinaattivektorikentät* $\frac{\partial}{\partial x^k}$ ovat sileitä vektorikenttiä joukossa U, sillä niiden esitys luonnollisessa kartassa Φ on

$$\Phi \circ \frac{\partial}{\partial x^k} \circ \phi^{-1}(y) = \Phi\Big(\frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_{\phi^{-1}(y)}\Big) = (y, \mathbf{e}_k) ,$$

josta näkee helposti, että $\pi \circ \frac{\partial}{\partial x^k} = \mathrm{id}$ ja että vektorikenttä on sileä.

Vektorikenttien joukossa $\mathfrak{X}(M)$ määritellään yhteenlasku ja vakiolla kertominen pisteittäin: Jos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$, asetetaan

$$(X + Y)_p = X_p + Y_p \quad \text{ja} \quad (\lambda X)_p = \lambda X_p ,$$

missä tangenttivektorien yhteenlasku ja reaaliluvulla kertominen suoritetaan vektoriavaruuden T_pM laskutoimituksilla kaikilla $p \in M$. Vektorikenttä voidaan myös kertoa sileällä funktiolla pisteittäin: Jos $X \in \mathfrak{X}(M)$ ja $f \in \mathfrak{F}(M)$, asetetaan

$$(fX)_p = f(p)X_p \tag{4.3}$$

kaikilla $p \in M$.

Yhtälön (4.1) nojalla mikä tahansa vektorikenttä X joukolla U voidaan ilmaista koordinaattivektorikenttien avulla: On funktiot $X^1, X^2, \ldots, X^n : U \to \mathbb{E}^1$, joille

$$X(p) = \sum_{k=1}^{n} X^k(p) \frac{\partial}{\partial x^k} . \tag{4.4}$$

Propositio 4.8. *Olkoon M sileä monisto ja olkoon (U, ϕ) sileä kartta. Vektorikenttä $X\colon M \to TM$ on sileä joukossa U, jos ja vain jos sen kerroinfunktiot esityksessä (4.4) ovat sileitä.*

Todistus. Vektorikentän X esitys luonnollisissa koordinaateissa (U, ϕ) ja (TU, Φ) on

$$y \mapsto \big(y, \big(X^1 \circ \phi^{-1}(y), \ldots, X^n \circ \phi^{-1}(y)\big)\big) ,$$

joten $X|_U$ on sileä, jos ja vain jos kerroinfunktiot $c^1, \ldots, c^n$ ovat sileitä. □

Esimerkki 4.9. Olkoon $\gamma\colon \mathbb{E}^1 \to \mathbb{S}^1$, $\gamma(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$. Kuvaukset

$$\begin{aligned}
\gamma_1^+ &= \mathrm{pr}_1 \circ \gamma|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\,, & \gamma_1^+(s) &= \cos s\\
\gamma_1^- &= \mathrm{pr}_1 \circ \gamma|_{]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[}\,, & \gamma_1^-(s) &= \cos s\\
\gamma_2^- &= \mathrm{pr}_2 \circ \gamma|_{]-\pi,0[}\,, & \gamma_2^-(s) &= \sin s\\
\gamma_2^+ &= \mathrm{pr}_2 \circ \gamma|_{]0,\pi[}\,, & \gamma_2^+(s) &= \sin s
\end{aligned}$$

ovat diffeomorfismeja, joten kuvaukset

$$\theta_1^+ = \big(\gamma|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\big)^{-1}, \quad \theta_2^+ = \big(\gamma|_{]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[}\big)^{-1}, \quad \theta_2^- = \big(\gamma|_{]-\pi,0[}\big)^{-1} \quad \text{ja} \quad \theta_2^+ = \big(\gamma|_{]0,\pi[}\big)^{-1}$$

ovat sileitä karttakuvauksia, joita sanotaan *kulmakartoiksi*.

Kulmakarttojen kartanvaihdot ovat muotoa $s \mapsto s + k\,2\pi$ jollain $k \in \mathbb{Z}$. Jos θ ja $\widetilde{\theta}$ ovat kulmakarttoja, niin $\frac{\partial\widetilde{\theta}}{\partial\theta} = 1$, joten $\frac{\partial}{\partial\widetilde{\theta}} = \frac{\partial}{\partial\theta}$ kulmakarttojen koordinaattiympäristöjen leikkausjoukoissa. Koska kulmakartat peittävät koko ympyrän $\mathbb{S}^1$, saamme koko monistolla $\mathbb{S}^1$ määritellyn *kulmakoordinaattivektorikentän* $\frac{\partial}{\partial\theta}$, jolla ei ole nollakohtia.

Propositio 4.10. *Kuvaus $\Phi\colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{E}^1 \to T\mathbb{S}^1$, $\Phi(p,s) = s\,\frac{\partial}{\partial\theta}|_p$ on sileä diffeomorfismi.*

Todistus. Harjoitustehtävä 4.2. □

Propositio 4.11. *Olkoon M sileä monisto. Olkoon $p \in M$ ja olkoon $v_p \in T_pM$. Tällöin on $X \in \mathfrak{X}(M)$, jolle $X_p = v_p$.*

Todistus. Harjoitustehtävä 4.4. □

4.4 Algebrallisesta rakenteesta

Tässä luvussa tarkastelemme vektorikenttiä algebrallisemmalta kannalta. Luvussa 2.2 havaitsimme, että sileän moniston sileät reaaliarvoiset funktiot muodostavat algebran, erityisesti ne siis muodostavat renkaan. Määrittelimme vektorikenttien kertomisen funktioilla yhtälössä (4.3). Seuraava määritelmä liittää tämän operaation yleisempiin algebrallisiin rakenteisiin.

Olkoon $(K, +, \cdot)$ kommutatiivinen rengas ja olkoon $(M, +)$ kommutatiivinen ryhmä. Olkoon $\mu\colon K \times M \to M$ kuvaus, $\mu(k,m) = km$, jolle pätee

- $k_2(k_1m) = (k_2k_1)m$ kaikilla $k_1, k_2 \in K$ ja $m \in M$,
- $1_K m = m$ kaikilla $m \in M$
- $(k_1 + k_2)\,m = k_1m + k_2m$ kaikilla $k_1, k_2 \in K$ ja $m \in M$, ja
- $k(m_1 + m_2) = km_1 + km_2$ kaikilla $k \in K$ ja $m_1, m_2 \in M$.

Tällöin M on K*-moduli*.

Esimerkki 4.12. (1) Jos K on kunta ja V on K-vektoriavaruus, niin V on K-moduli.
(2) $\mathbb{Z}^2$ on $\mathbb{Z}$-moduli, kun kokonaisluvulla kertominen määritellään luonnollisella tavalla asettamalla $\mu(k, (n_1, n_2)) = (kn_1, kn_2)$.

Propositio 4.13. *Sileän moniston M sileät vektorikentät muodostavat reaalisen vektoriavaruuden ja $\mathfrak{F}(M)$-modulin.*

Todistus. Harjoitustehtävä 4.5. □

Olkoon $X\colon M \to TM$ vektorikenttä sileällä monistolla M ja olkoon $f \in \mathfrak{F}(M)$. Koska $X_p \in \mathfrak{D}_p(M)$ jokaisella $p \in M$, X ja f määräävät funktion $Xf\colon M \to \mathbb{E}^1$ asettamalla

$$(Xf)(p) = X_p f$$

kaikilla $p \in M$. Seuraava tulos osoittaa, että sileä vektorikenttä määrää kuvauksen joukolta $\mathfrak{F}(M)$ itselleen ja saamme sileiden vektorikenttien luonnehdinnan tämän ominaisuuden avulla.

Propositio 4.14. *Olkoon M sileä monisto. Olkoon $X\colon M \to TM$ vektorikenttä. Tällöin $X \in \mathfrak{X}(M)$, jos ja vain jos $Xf \in \mathfrak{F}(M)$ kaikilla $f \in \mathfrak{F}(M)$.*

Todistus. Olkoon $X \in \mathfrak{X}(M)$ ja olkoon $f \in \mathfrak{F}(M)$. Olkoon (U, ϕ) sileä kartta. Tällöin

$$(Xf)(q) = \Big(\sum_{k=1}^{n} X^k(q) \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_q\Big) f = \sum_{k=1}^{n} X^k(q) \frac{\partial f}{\partial x^k}(q)\,,$$

joten Xf on sileä sileiden funktioiden äärellisenä summana.

Oletetaan sitten, että Xf on sileä kaikille $f \in \mathfrak{F}(M)$. Olkoon (U, ϕ) sileä kartta. Tällöin

$$Xx^i = \Big(\sum_{k=1}^{n} X^k \frac{\partial}{\partial x^k}\Big) x^i = X^i\,.$$

Olkoon $p \in U$. Lemman 2.17 nojalla on avoin joukko $U \supset V \in p$, ja funktio $\widetilde{x}^i \in \mathfrak{F}(M)$, jolle $x^i|_V = \widetilde{x}^i|_V$. Oletuksen mukaan $X\widetilde{x}^i$ on sileä joukossa V, joten $X^i = Xx^i$ on sileä joukossa V. Koska tämä pätee kaikille $p \in M$, voimme päätellä, että $X \in \mathfrak{X}(M)$. □

Vektorikentän X määräämä kuvaus[4] $X\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ toteuttaa *Leibnitzin säännön* pisteittäin koska $X(q)$ on pistederivaatio jokaisella $q \in M$: Kaikille $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ pätee

$$X(fg)(q) = X_q(fg) = X_q f\, g(q) + f(q)\, X_q g = (Xf)(q)g(q) + f(q)(Xg)(q)\,. \tag{4.5}$$

Samoin kuvauksen X lineaarisuus seuraa pistederivaatioiden lineaarisuudesta.

Olkoon A assosiatiivinen $\mathbb{R}$-algebra. Lineaarikuvaus $\mathfrak{d}\colon A \to A$ on *derivaatio*, jos se toteuttaa *Leibnitzin säännön*

$$\mathfrak{d}(ab) = \mathfrak{d}(a)b + a\mathfrak{d}(b)$$

kaikille $a, b \in A$.

Lemma 4.15. *(1) Jos $\mathfrak{d}$ on algebran A derivaatio, niin $\mathfrak{d}(1) = 0$.*

(2) Jos $\mathfrak{d}_1$ ja $\mathfrak{d}_2$ ovat algebran A derivaatioita, niin $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2 - \mathfrak{d}_2\mathfrak{d}_1$ on derivaatio.

[4]Merkitsemme kuvausta samoin kuin vektorikenttää yksinkertaisuuden tai hämäyksen vuoksi näkökulmasta riippuen.

Todistus. Harjoitustehtävä 4.6. □

Olkoon $\mathfrak{D}(M)$ assosiatiivisen $\mathbb{R}$-algebran $\mathfrak{F}(M)$ derivaatioiden joukko.[a]

[a] $\mathfrak{F}(M)$ on $\mathbb{R}$-algebra Proposition 2.5 nojalla.

Olkoon M sileä monisto. Jos $\mathfrak{d} \in \mathfrak{D}(M)$ ja $g \in \mathfrak{F}(M)$, niin määritellään kuvaus $f\mathfrak{d}\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ asettamalla

$$((g\mathfrak{d})f)(p) = g(p)\,\mathfrak{d}(f)(p)$$

kaikille $f \in \mathfrak{F}(M)$ ja kaikille $p \in M$.

Lemma 4.16. *Olkoon M sileä monisto. Tällöin $\mathfrak{D}(M)$ on $\mathfrak{F}(M)$-moduli.*

Todistus. Harjoitustehtävä 4.7 □

Propositio 4.17. *Olkoon M sileä monisto. Tällöin $X \in \mathfrak{X}(M)$, jos ja vain jos $X \in \mathfrak{D}(M)$.*

Todistus. Edellä tarkastimme, että vektorikenttä $X \in \mathfrak{X}(M)$ määrää derivaation, katso yhtälö (4.5).

Olkoon $\mathfrak{d} \in \mathfrak{D}(M)$. Olkoon $p \in M$. Edellä tehdyn laskun nojalla $\mathfrak{d}$ määrää pistederivaation X_p pisteessä p asettamalla $X_p(f) = (\mathfrak{d}f)(p)$ kaikille $f \in \mathfrak{F}(M)$. Näin määräytyvä vektorikenttä X on sileä, sillä $Xf = \mathfrak{d}f \in \mathfrak{F}(M)$ kaikilla $f \in \mathfrak{F}(M)$. □

4.5 Vektorikentän integraalikäyrät

Olkoon X sileä vektorikenttä sileällä monistolla M. Sileä polku $\gamma\colon I \to M$ on vektorikentän X *integraalikäyrä*, jos

$$\dot\gamma(t) = X(\gamma(t))$$

kaikilla $t \in I$.

Olkoon (U, ϕ) sileä kartta monistolla M. Olkoot $\gamma^1, \ldots, \gamma^n$ käyrän γ koordinaatit kartassa ϕ. Yhtälön (3.5) nojalla integraalikäyrän määrittelevä yhtälö tulee muotoon

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\gamma^i}{dt}(t)\,\frac{\partial}{\partial x^i} = \dot\gamma(t) = X(\gamma(t)) = \sum_{k=1}^{n} X^k(\gamma(t))\frac{\partial}{\partial x^k}\,.$$

Komponenteittain tarkasteltuna saadaan siis differentiaaliyhtälö(ryhmä) avoimessa joukossa $\phi(U)$

$$\frac{d}{dt}(\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t)) = \big(X^1(\gamma(t)), \ldots, X^n(\gamma(t))\big)\,.$$

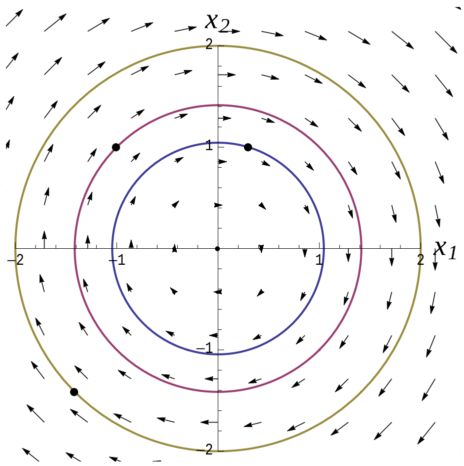
Lause 4.18 (OY-lause)**.** *Olkoon $D \subset \mathbb{E}^n$ avoin. Olkoon $f\colon D \to \mathbb{E}^n$ sileä vektorikenttä. Jokaisella $a \in \mathbb{R}$ ja $b \in D$ on $\delta > 0$ siten, että alkuarvotehtävällä*

$$\begin{cases} \dot x = f(x), \\ x(a) = b \end{cases} \tag{4.6}$$

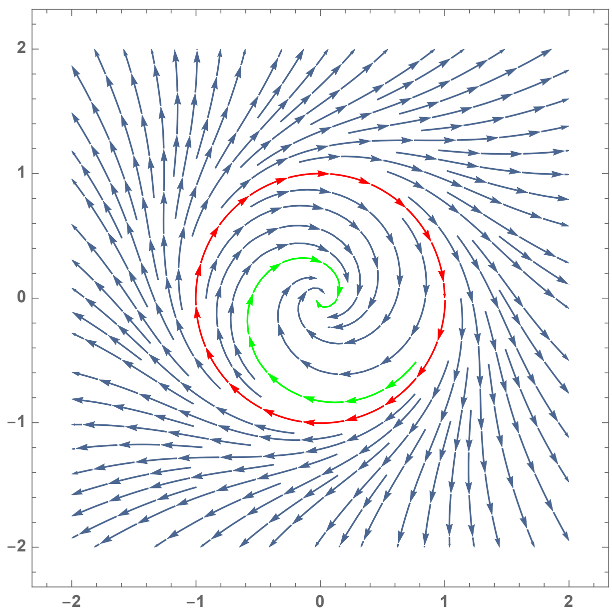
on välillä $]a-\delta, a+\delta[$ määritelty yksikäsitteinen ratkaisu.

Todistus. Katso [Par1, Lause 5.2] tai [Lee2, Appendix D]. □

Seuraus 4.19. *Olkoon M sileä monisto ja olkoon $p \in M$. Jokaisella sileällä vektorikentällä $X \in \mathfrak{X}(M)$ on integraalikäyrä, joka kulkee pisteen p kautta.* □



Kuva 4.1 — Tason vektorikentän $V(x) = x^2\frac{\partial}{\partial x^1} - x^1\frac{\partial}{\partial x^2}$ integraalikäyriä. Esimerkin 3.11 nojalla vektorikentän V lauseke napakoordinaateissa on $-\frac{\partial}{\partial \theta}$.



Kuva 4.2 — Napakoordinaateissa ilmoitetun tason vektorikentän $\frac{r(r^2-1)}{2}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial \theta}$ integraalikäyriä.

Harjoitustehtäviä

4.1. Todista Propositio 4.6.

4.2. Todista Propositio 4.10.

4.3. Olkoon M sileä n-monisto. Olkoot $X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$ sileitä vektorikenttiä siten, että tangenttivektorit $X_1(p), X_2(p), \ldots, X_n(p) \in T_pM$ ovat lineaarisesti riippumattomia kaikilla $p \in M$. Osoita, että on sileä diffeomorfismi $F\colon M \times \mathbb{E}^n \to TM$.

4.4. Todista Propositio 4.11.[5]

4.5. Todista Propositio 4.13.

4.6. Todista Lemma 4.15.

4.7. Todista Lemma 4.16.

Olkoon M sileä monisto. Olkoot $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Määritellään kuvaus $XY\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ asettamalla

$$(XY)f = X(Yf)$$

kaikille $f \in \mathfrak{F}(M)$.

4.8. Anna esimerkki vektorikentistä $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, joille XY ei ole vektorikenttä.

Olkoon M sileä monisto. Vektorikenttien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *Lien hakatulo*[a] $[X, Y]$ määritellään asettamalla

$$[X, Y]h = XYh - YXh$$

kaikille $h \in \mathfrak{F}(M)$.

[a] Englanniksi *Lie bracket*.

4.9. Olkoon M sileä monisto. Olkoot $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Osoita, että $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$.

4.10. Olkoon M sileä monisto. Olkoot $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Osoita, että

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0\,.$$

4.11. Olkoon M sileä monisto. Anna esimerkki monistosta M ja vektorikentistä $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, joille $XY \notin \mathfrak{X}(M)$. Olkoot $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ja olkoon $f, g \in \mathfrak{F}(M)$. Osoita, että

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X\,.$$

4.12. Olkoot $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{E}^3)$ vektorikentät

$$X = \frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{x^2}{2}\frac{\partial}{\partial x^3}\,, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{x^1}{2}\frac{\partial}{\partial x^3}\,, \quad Z = \frac{\partial}{\partial x^3}\,.$$

Määritä hakatulot $[X, Y]$, $[X, Z]$ ja $[Y, Z]$.

[5] Huomaa, että väitteen vektorikenttä on määritelty ja sileä koko monistolla M.

Luku 5

Alimonistot

Tässä luvussa määrittelemme sileän moniston sileän upotetun alimoniston käsitteen, joka yleistää esimerkiksi vektoriavaruuden lineaariset ja affiinit aliavaruudet kurssilla jo aiemmin keskeisenä esimerkkinä tarkastellun tapauksen $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{E}^{n+1}$ abstrakteille monistoille.

5.1 Upotettu alimonisto

Olkoon M sileä n-monisto ja olkoon $0 \leqslant k \leqslant n$. Osajoukko $S \subset M$ on *upotettu k-alimonisto*,[a] jos jokaiselle $p \in S$ on moniston M sileä kartta (U, ϕ), joka sisältää pisteen p ja jolle

$$\phi(U \cap S) = \phi(U) \cap \{x \in \mathbb{E}^n : x^{k+1} = \cdots = x^n = 0\}.$$

Tällöin $\operatorname{codim} S = n - k$ on alimoniston S *kodimensio* ja (U, ϕ) on alimonistoon S *sopeutettu* kartta tai *viipalekartta*.

Alimonisto S on *hyperpinta*, jos $\operatorname{codim} S = 1$.

[a]Joskus sitä kutsutaan myös *säännölliseksi* alimonistoksi.

Esimerkki 5.1. (1) Euklidisen avaruuden affiinit k-tasot ovat k-ulotteisia alimonistoja.

(2) Jos M ja N ovat sileitä monistoja ja $q \in N$, niin $M \times \{q\}$ on moniston $M \times N$ upotettu alimonisto.[1] Olkoon $(p, q) \in M \times \{q\} \subset M \times N$. Jos $\phi\colon U \to \mathbb{E}^m$ on pisteen p sisältävä sileä kartta monistolla M ja $\psi\colon V \to \mathbb{E}^n$ on q-keskinen sileä kartta monistolla N, niin $\phi \times \psi\colon U \times V \to \mathbb{E}^m \times \mathbb{E}^n$ on sileä kartta tulomonistolla $M \times N$. Lisäksi

$$\begin{aligned}\phi \times \psi\big((U \times V) \cap M \times \{q\}\big) &= \phi(U) \times \{\psi(q)\} = \phi(U) \times \{0\} \\ &= \phi \times \psi\big(U \times V\big) \cap \{x \in \mathbb{E}^{m+n} : x^{m+1} = \cdots = x^{m+n} = 0\},\end{aligned}$$

joten $\phi \times \psi$ on viipalekartta.

(3) Olkoon $U = \{x \in \mathbb{E}^2 : x^2 > 0$. Kuvaus $\phi\colon U \to \phi(U) = \{y \in \mathbb{E}^3 : y^2 > (y^1)^2 - 1\}$, $\phi(x) = (x^1, \|x\|^2 - 1)$, on euklidisen tason alimonistoon $\mathbb{S}^1$ sopeutettu viipalekartta.

[1]Tulomoniston sileä rakenne määriteltiin esimerkissä 1.15(2).

(4) Napakoordinaatit[2] Φ_0^{-1} kuvaavat joukon $U = \mathbb{E}^2 -]-\infty, 0[\times \{0\}$ joukolle $]0,\infty[\times]-\pi,\pi[$ siten, että $\Phi_0^{-1}(U \cap \mathbb{S}^1) = \{1\} \times]-\pi,\pi[$. Olkoon $h\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$, $h(x) = (x^2, 1 - x^1)$. Tällöin $h \circ \Phi_0^{-1}$ on määritelmän mukainen viipalekartta.

Vastaavasti pallokoordinaatit[3] $x \mapsto (r, \phi, \theta)$ määräävät sileän moniston $\mathbb{E}^3$ alimonistoon $\mathbb{S}^2$ sopeutetun viipalekartan määrittelyjoukossaan.

Olkoon $\mathrm{Pr}^n_k\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^k$,

$$\mathrm{Pr}^n_k(x) = \sum_{i=1}^k x^i \mathbf{e}_i$$

projektiokuvaus, joka vastaa ortogonaaliprojektiota aliavaruudelle $\mathbb{E}^k \times \{0\} \subset \mathbb{E}^n$.

Propositio 5.2. *Jos S on sileän n-moniston M k-ulotteinen upotettu alimonisto, niin se on k-ulotteinen sileä monisto, kun se varustetaan aliavaruustopologialla ja sopeutettujen karttojen määräämällä kartastolla*

$$\left\{(U \cap S, \phi_S) : (U, \phi) \text{ on sopeutettu kartta}\right\},$$

missä $\phi_S = \mathrm{Pr}^n_k \circ \phi|_{U \cap S}$.

Inkluusiokuvaus $i\colon S \to M$ on sileä injektio.

Todistus. Harjoitustehtävä 5.1. □

Propositio 5.3. *Olkoon S sileän moniston M sileä upotettu alimonisto.*

(1) Jos $G\colon M \to N$ on sileä kuvaus, niin $G|_S$ on sileä.

(2) Olkoon $F\colon N \to M$ sileä kuvaus, jolle $F(N) \subset S$. Tällöin $F\colon N \to S$ on sileä.

Todistus. (1) $G|_S = G \circ i$, joten G_S on sileiden kuvausten yhdistettynä kuvauksena sileä.

(2) Olkoon $p \in N$ ja olkoon (U, ϕ) sileän moniston N sileä kartta, joka sisältää pisteen p. Olkoon $S \subset M$ k-ulotteinen alimonisto ja olkoon $\psi\colon V \to \mathbb{E}^m$ moniston M sileä viipalekartta, joka on sopeutettu alimonistoon S ja sisältää pisteen $F(p)$. Tällöin kuvaus $\psi_S \circ F \circ \phi^{-1} = \mathrm{Pr}^m_k \circ \psi \circ F \circ \phi^{-1}$ on sileiden kuvausten yhdistettynä kuvauksena sileä kuvaus, joten $F\colon N \to S$ on sileä. □

5.2 Säännölliset tasa-arvojoukot

Tässä luvussa havaitsemme, että sileiden funktioiden ja sileiden kuvausten tasa-arvopinnat antavat sileiden monistojen upotettuja alimonistoja samaan tapaan kuin euklidisen avaruuden tapauksessa, kunhan tarkastellaan säännöllisiä arvoja.

Lause 5.4 (Käänteiskuvauslause)**.** *Olkoot M ja N sileitä n-monistoja. Olkoon $F\colon M \to N$ sileä kuvaus ja olkoon $p \in M$. Jos $dF_p\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ on kääntyvä, niin on pisteen p avoin ympäristö $W \ni p$ siten, että $F\colon W \to F(W)$ on sileä diffeomorfismi.*

[2] Katso Esimerkki 3.11.

[3] Katso Harjoitustehtävä 3.5.

Todistus. Olkoon (U, ϕ) p-keskinen sileä kartta ja olkoon (V, ψ) $F(p)$-keskinen sileä kartta siten, että $F(U) \subset V$. Kuvaus $\psi \circ F \circ \phi^{-1} \colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ on sileä ja $d(\psi \circ F \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}$ on kääntyvä Proposition 3.7 nojalla, koska kuvaukset ϕ ja ψ ovat diffeomorfismeja. Differentiaalilaskennan käänteiskuvauslauseen[4] nojalla on pisteen $\phi(p)$ avoin ympäristö $U' \subset \phi(U)$, jolle $\psi \circ F \circ \phi^{-1}|_{U'} \colon U' \to \psi \circ F \circ \phi^{-1}(U')$ on sileä diffeomorfismi. Tällöin $W = \phi^{-1}(U') \subset U$ on pisteen p avoin ympäristö ja $F|_{\phi^{-1}(U')} \colon W \to F(W)$ on diffeomorfismi. □

Olkoot M ja N sileitä monistoja ja olkoon $F \colon M \to N$ sileä kuvaus ja olkoon $p \in M$. Jos $dF_p \colon T_pM \to T_{F(p)}N$ on surjektio, niin p on kuvauksen F *säännöllinen piste*. Muuten p on *kriittinen piste*.

Esimerkki 5.5. Piste $p \in M$ on reaaliarvoisen sileän funktion $f \colon M \to \mathbb{R}$ kriittinen piste, jos ja vain jos df_p on nollakuvaus.

Olkoot M ja N sileitä monistoja. Olkoon $F \in C^\infty(M, N)$. Jos $c \in F(M)$ ja dF_p on surjektio jokaisella $p \in F^{-1}(S)$, niin c on *säännöllinen arvo* ja $F^{-1}(c)$ on *säännöllinen tasa-arvojoukko*.

Lause 5.6. *Olkoon M sileä monisto. Olkoon $f \in \mathfrak{F}(M)$ ja olkoon $c \in f(M)$ säännöllinen arvo. Tällöin $f^{-1}(c)$ on upotettu hyperpinta.*

Todistus. Olkoon M sileä n-monisto. Siirtymällä tarkastelemaan funktiota $f - c$ voimme olettaa, että $c = 0$. Olkoon $S = f^{-1}(0)$ ja olkoon $p \in S$. Olkoon (U, ϕ) p-keskinen kartta. Koska 0 on säännöllinen arvo, yhtälön (3.2) nojalla on $1 \leqslant k \leqslant n$, jolle $\frac{\partial}{\partial x^k}\big|_p f \neq 0$. Järjestämällä kartan komponentit uudelleen voidaan olettaa, että $k = 1$.

Olkoon $F \colon U \to \mathbb{E}^n$, $F(q) = (f(q), x^2(q), \ldots, x^n(q))$. Tällöin

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p f & \frac{\partial}{\partial x^2}\big|_p f & \cdots & \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p f \\ \frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p x^2 & \frac{\partial}{\partial x^2}\big|_p x^2 & \cdots & \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p x^2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p x^n & \frac{\partial}{\partial x^2}\big|_p x^n & \cdots & \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p f & \frac{\partial}{\partial x^2}\big|_p f & \cdots & \cdots & \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p f \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oletuksen mukaan kuvauksen $F \circ \phi^{-1}$ Jacobin determinantti

$$D(F \circ \phi^{-1})(\phi(p)) = \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_{\phi(p)} f \circ \phi^{-1}$$

pisteessä $\phi(p) \in \phi(U) \subset \mathbb{E}^n$ on nollasta poikkeava, joten dF_p on kääntyvä. Käänteiskuvauslauseen[5] nojalla on pisteen p avoin ympäristö $V \subset M$ siten, että $(V, F|_V)$ on sileä kartta. Tämä on haluttu kartta, sillä $f(q) = 0$ kaikilla $q \in S \cap V$.[6] □

[4] Jatkuvasti differentioituva tapaus käsitellään kurssilla Vektorianalyysi 2, katso myös [Fle, Luku 4.5]. Sileä versio todistetaan Leen kirjan liitteessä [Lee2, Thm.C.34].

[5] Lause 5.4.

[6] Määritelmän mukaan viimeisen koordinaatin tulisi olla nolla eikä ensimmäisen, mutta järjestyksellä ei toki ole merkitystä.

Esimerkki 5.7. (1) Olkoon $f\colon \mathbb{E}^{n+1} \to \mathbb{E}^1$ sileä funktio. Luku $c \in f(\mathbb{E})$ on säännöllinen arvo, jos $\nabla f(x) \neq 0$ kaikilla $x \in f^{-1}(c)$.

(2) Kuvaus $r\colon \mathbb{E}^{n+1} \to \mathbb{E}^1$, $r(x) = \|x\|^2$ on sileä ja $\nabla r(x) = 2x$, joten $\mathbb{S}^n = r^{-1}(1)$ on sileä alimonisto.

Samaan tapaan voidaan todistaa yleisempi tulos, joka antaa korkeamman kodimension alimonistoja.

Lause 5.8. *Olkoot M ja N sileitä monistoja. Olkoon $F\colon M \to N$ sileä ja olkoon $c \in F(M)$ säännöllinen arvo. Tällöin $F^{-1}(c)$ on upotettu alimonisto.*

Todistus. Katso [Lee2, Cor. 5.14]. □

5.3 Immersio ja upotus

Olkoot S ja M sileitä monistoja. Sileä kuvaus $F\colon S \to M$ on *sileä immersio*, jos dF_p on injektio kaikilla $p \in S$.

Jos F on sileä immersio ja topologinen upotus,[a] niin se on *sileä upotus*.

[a]Kuvaus on topologinen upotus, jos se on homeomorfismi kuvalleen.

Propositio 5.9. *Olkoon $S \subset M$ sileä alimonisto ja olkoon $i\colon S \to M$ inkluusiokuvaus $i(p) = p$. Tällöin i on sileä upotus.*

Todistus. Alimoniston määritelmän nojalla inkluusiokuvaus on topologinen upotus. Lisäksi viipalekartan avulla näkee helposti, että di_p on injektio. □

Propositio 5.10. *Olkoon S kompakti sileä monisto ja olkoon $F\colon S \to M$ injektiivinen sileä immersio. Tällöin F on sileä upotus.*

Todistus. Kuvaus F on jatkuva bijektio joukolle $F(S)$, joka on Hausdorffin avaruus alivaruustopologiassa. Siis $F\colon S \to F(S)$ on homeomorfismi,[7] joten F on topologinen upotus. □

Esimerkki 5.11. Harjoitustehtävässä 2.6 osoitettiin, että tekijäkuvaus $\pi\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$, $\pi(x) = [x]$, on sileä lokaali diffeomorfismi, joten $d\pi_p$ on kääntyvä jokaisella $p \in \mathbb{S}^n$. Erityisesti siis $d\pi_p$ on injektio, joten π on sileä immersio.

Lause 5.12 (Immersiolause)**.** *Olkoon $F\colon S \to M$ sileä immersio ja olkoon $p \in S$. Tällöin on p-keskinen sileä kartta (U, ϕ) monistolla S ja $F(p)$-keskinen sileä kartta (V, ψ) monistolla M siten, että $\psi \circ F \circ \phi^{-1}(x) = (x, 0)$ kaikille $x \in \phi(U)$.*

Todistus. Väite todistetaan käänteiskuvauslauseen[8] avulla samaan tapaan kuin Lause 5.6, katso esimerkiksi [Laf, Luku 2.6.2], jossa todistetaan differentioituva versio lauseesta. □

Lause 5.13 (Upotuslause)**.** *Olkoon $F\colon S \to M$ sileä upotus. Tällöin $F(S)$ on moniston M sileä alimonisto.*

[7]Katso [Par2, Lause 11.7], [Mun, Thm. 26.6]

[8]Lause 5.4.

Todistus. Olkoon $\dim S = k$ ja $\dim M = m$. Olkoon $p \in S$. Valitaan pisteille p ja $F(p)$ ympäristöt $U \ni p$ ja $V \ni F(p)$ ja kartat kuten Immersiolauseessa siten, että $F(U) \subset V$ ja

$$\psi(F(U) \cap V) = \{x \in \mathbb{E}^n : x^{k+1} = \cdots = x^n = 0\} \cap \psi(V)\,.$$

Koska F on upotus, niin $F(U)$ on avoin avaruudessa $F(S)$. Aliavaruustopologian määritelmän nojalla siis $F(U) = F(S) \cap W$ jollain avoimella $W \subset M$. Siis

$$(V \cap W) \cap F(S) = V \cap F(U) = F(U)\,,$$

joten pisteen $F(p)$ ympäristössä $W \cap V \subset V$ pätee

$$\psi\big(F(S) \cap V \cap W\big) = \{x \in \mathbb{E}^n : x^{k+1} = \cdots = x^n = 0\} \cap \psi(V \cap W)\,.$$

Siis $F(S)$ on upotettu alimonisto. □

Esimerkki 5.14. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$ ja olkoon $\gamma_\alpha \colon \mathbb{E}^1 \to \mathbb{T}^2 = \mathbb{E}^2/\mathbb{Z}^2$,

$$\gamma_\alpha(t) = (t, \alpha t) + \mathbb{Z}^2\,.$$

Kuvaus γ_α on sileä immersio, koska se on sileän upotuksen $t \mapsto (t, \alpha t)$ ja sileän kuvauksen $x \mapsto x + \mathbb{Z}^2$ yhdistetty kuvaus.

Jos $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, niin $\gamma_\alpha(t + q) = \gamma_\alpha(t) + (q, p)$ kaikilla $t \in \mathbb{E}^1$. Siis γ_α määrää sileän kuvauksen kompaktilta tekijämonistolta $\mathbb{E}^1/q\mathbb{Z}$, $t + q\mathbb{Z} \mapsto \gamma_\alpha(t)$, jolla on sama kuvajoukko kuin kuvauksella γ_α. Proposition 5.10 nojalla $\gamma_\alpha(\mathbb{E}^1)$ on upotettu alimonisto.

Jos $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, niin Kroneckerin approksimaatiolauseen[9] nojalla $\gamma_\alpha(\mathbb{E}^1)$ on toruksen $\mathbb{T}^2$ tiheä osajoukko. Siis se ei ole alimonisto.

Olkoot M ja N sileitä monistoja ja olkoon $F \colon M \to N$ sileä kuvaus. Tällöin

$$\mathscr{G}(f) = \{(x, F(x) : x \in M\}$$

on kuvauksen F *graafi* eli *kuvaaja*.

Propositio 5.15. *Olkoot M ja N sileitä monistoja ja olkoon $F \colon M \to N$ sileä kuvaus. Tällöin kuvauksen F graafi on sileä monisto.*

Todistus. Olkoon $\widetilde{F} \colon M \to M \times N$, $\widetilde{F}(x) = (x, F(x))$. Tällöin $\mathscr{G}(F) = \widetilde{F}(M)$. Kuvaus $\widetilde{F}$ on selvästi injektio. Projektiokuvauksen $\pi_M \colon M \times N \to M$ rajoittuma graafille $\mathscr{G}(F)$ on kuvauksen $\widetilde{F} \colon M \to \mathscr{G}(F)$ käänteiskuvaus, joka on jatkuvan kuvauksen rajoittumana jatkuva. Siis $\widetilde{F}$ on homeomorfismi kuvalleen.

Kuvaus $d\widetilde{F}_p$ on injektio jokaisella $p \in M$, sillä yhtälöstä $\pi_M \circ \widetilde{F} = \mathrm{id}_M$ seuraa Proposition 3.7(2) nojalla $\mathrm{id}_{T_pM} = d(\pi_M)_{\widetilde{f}(p)} d\widetilde{F}_p$. Siis $\widetilde{F}$ on sileä upotus, joten $\mathscr{G}(F)$ on upotettu alimonisto Lauseen 5.13 nojalla. □

Seuraavan tuloksen mukaan kaikki sileät monistot ovat itse asiassa sileästi diffeomorfisia jonkin euklidisen avaruuden sileän alimoniston kanssa.

[9]Katso esimerkiksi [HW, Luku XXIII].

Lause 5.16 (Whitneyn upotuslause)**.** *Jokaisella n-monistolla on sileä upotus euklidiseen avaruuteen $\mathbb{E}^{2n+1}$.*

Todistus. Katso [Lee2, Theorem 6.15]. □

Esimerkki 5.17. (1) Torus $\mathbb{T}^n$ on määritelmänsä mukaan abstrakti sileä monisto, jonka määritelmä ei anna sille upotusta minkään euklidisen avaruuden alimonistoksi. Esimerkissä 1.22 totesimme, että kuvaus $\widetilde{f}\colon \mathbb{E}^1 \to \mathbb{E}^2$, $\widetilde{f}(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ määrää homeomorfismin $f\colon \mathbb{T}^1 \to \mathbb{S}^1$. Kuvauksen $\widetilde{f}$ differentiaali $df_{\widetilde{p}}$ on injektio jokaisella $\widetilde{p} \in \mathbb{E}^1$, sillä koordinaateissa sen matriisi on $\begin{pmatrix} -\sin 2\pi t \\ \cos 2\pi t \end{pmatrix} \neq 0$ kaikilla t. Lisäksi tekijäkuvaus $\pi_\sim\colon \mathbb{E}^1 \to \mathbb{T}^1$ on lokaali diffeomorfismi, sillä se on 1-toruksen karttakuvausten käänteiskuvaus lyhyille väleille rajoitettuna. Olkoon $p \in \mathbb{T}^1$, olkoon (U, ϕ) pisteen p sisältävä kartta, jolle pätee $\pi_\sim \circ \phi = \mathrm{id}$. Siis $df_p = d\widetilde{f}_{\phi(p)}\, d\phi_p$ on injektio, joten f on upotus.

Yleisessä tapauksessa olkoon $F\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{E}^{2n} = (\mathbb{E}^2)^n$,

$$F(x + \mathbb{Z}^n) = \big(f(x_1), \ldots, f(x_n)\big).$$

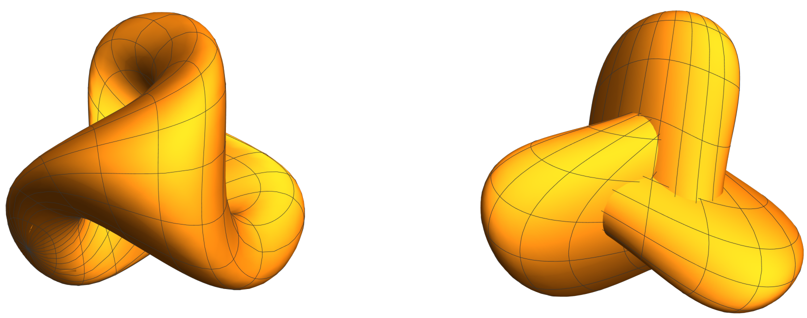
On helppo tarkastaa, että dF_p on injektio kaikilla $p \in \mathbb{T}^n$, joten F on immersio. Torus $\mathbb{T}^n$ on kompakti, sillä $\mathbb{T}^n = \pi_\sim([0,1]^n)$. Kuvaus F on selvästi sileä injektio, joten Proposition 5.10 nojalla se on upotus. Näin saadaan erityisesti 2-toruksen sileä upotus avaruuteen $\mathbb{E}^4$.

Tunnetusti torus voidaan upottaa avaruuteen $\mathbb{E}^3$. Kuvaus $G\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{E}^3$, jonka määrää kuvaus $\widetilde{G}\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3$,

$$\widetilde{G}(x) = \big((2 + \cos 2\pi x_1)\cos 2\pi x_2,\ (2 + \cos 2\pi x_1)\sin 2\pi x_2,\ \sin 2\pi x_1\big) \tag{5.1}$$

on sileä upotus.[10]

(2) Projektiivinen avaruus $\mathbb{P}^n$ on abstrakti sileä monisto, jonka määritelmä ei anna sille upotusta minkään euklidisen avaruuden alimonistoksi. Whitneyn upotuslauseen nojalla se voidaan upottaa avaruuteen $\mathbb{E}^{2n+1}$. Harjoitustehtävässä 5.6 osoitamme, että $\mathbb{P}^2$ voidaan upottaa avaruuteen $\mathbb{E}^4$ upotetuksi alimonistoksi. Projektiivista tasoa ei voi upottaa avaruuteen $\mathbb{E}^3$,[11] mutta on useita immersioita $F\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{E}^3$. Harjoitustehtävän 1.12 kuvaus f_3 on immersio.[12] Sen kuvajoukko $f_3(\mathbb{P}^2)$ on *Boyn pinta*.



Kuva 5.1 — Boyn pinta kahdesta eri suunnasta.

[10] Harjoitustehtävä 5.5
[11] Katso esimerkiksi [Hir, Thm. 4.7].
[12] Harjoitustehtäävä 5.7.

5.4 Alimoniston tangenttiavaruus

Sileän alimoniston $S \subset M$ tangenttiavaruutta pisteessä p on luontevaa ajatella ympäröivän moniston M tangenttiavaruuden T_pM aliavaruutena. Tällöin samastetaan avaruus T_pS inkluusiokuvauksen $i\colon S \to M$ differentiaalin $di_p\colon T_pS \to T_pM$ kuvajoukon kanssa: Jos $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ ja $v \in T_pS$, niin

$$di_p v f = v(f \circ i) = v(f|_S)\,. \tag{5.2}$$

Inkluusiokuvauksen differentiaali di_p on lineaarikuvaus, joten ajattelemme aliavaruutta T_pS vektoriavaruuden T_pM lineaarisena aliavaruutena.

Propositio 5.18. *Olkoon S sileän moniston M sileä alimonisto. Kuvaus $di\colon TS \to TM$ on sileä upotus. Erityisesti TS on sileän moniston TM sileä alimonisto.*

Todistus. Olkoon S k-monisto ja olkoon M n-monisto, $k \leqslant n$. Viipalekoordinaateissa $di_p(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial}{\partial x^i}$ kaikilla $1 \leqslant i \leqslant k$. Siis tangenttikimpun TM viipalekarttaa vastaavissa koordinaateissa di vastaa kuvausta $(x,y) \mapsto \big((x^1,\dots,x^k,0,\dots,0),(y^1,\dots,y^k,0,\dots,0)\big)$, joten di on sileä. Se on ilmiselvästi injektio ja topologinen upotus lineaarisen aliavaruuden osan inkluusiona euklidisessa avaruudessa. $\square$

Propositio 5.19. *Olkoon S sileän moniston M sileä alimonisto. Olkoon $p \in S$ ja olkoon $v \in T_pM$. Tällöin $v \in T_pS$, jos ja vain jos on sileä polku $\gamma\colon I \to M$, jolle $\dot\gamma(0) = v$ ja $\gamma(t) \in S$ kaikilla $t \in I$, jollain voimella välillä $I \subset \mathbb{E}^1$, joka sisältää pisteen* 0..

Todistus. Harjoitustehtävä 5.4. $\square$

Esimerkki 5.20. Olkoon $x_0 \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{E}^{n+1}$ ja olkoon $a \in x_0^\perp$. Olkoon $\gamma_a\colon \mathbb{E}^1 \to \mathbb{E}^{n+1}$,

$$\gamma_a(t) = x_0 \cos\big(\|a\|\,t\big) + \frac{a}{\|a\|}\sin\big(\|a\|\,t\big)\,.$$

Tällöin $\gamma_a(t) \in \mathbb{S}^n$ kaikilla $t \in \mathbb{E}^1$ ja yhtälön (3.5) nojalla

$$\dot\gamma_a(0) = \sum_{i=1}^{n+1} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{x_0}\,.$$

Siis

$$T_{x_0}\mathbb{S}^n = \Big\{\sum_{k=1}^{n+1} a^k \frac{\partial}{\partial x^k} : a \in x_0^\perp\Big\} \subset T_x\mathbb{E}^{n+1}\,.$$

Tämä vastaa differentiaalilaskennan tuttua tulosta, jonka mukaan $T\mathbb{S}^n$ samastetaan avaruuden $x_0^\perp$ kanssa.

Seuraava tulos antaa hieman erilaisen tavan tunnistaa alimoniston tangenttivektorit.

Propositio 5.21. *Olkoon S sileän moniston M sileä alimonisto. Olkoon $p \in S$. Olkoon $v \in T_pM$. Tällöin $v \in T_pS$, jos ja vain jos $vf = 0$ kaikille $f \in \mathfrak{F}(M)$, joille $f|_S = 0$.*

Todistus. Jos $f|_S = 0$ ja $v \in T_pS$, niin $vf = 0$ yhtälön (5.2) nojalla.

Oletetaan sitten, että $v \in T_pM$ ja $vf = 0$ kaikille $f \in C^\infty(M)$, joille $f|_S = 0$. Olkoon $k = \dim S < \dim M = n$. Viipalekoordinaateissa

$$T_pS = di_p(T_pS) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_p \right\rangle.$$

Olkoon $v \in T_pM$. Tällöin $v = \sum_{k=1}^n v^k \frac{\partial}{\partial x^k}|_p$. Olkoon $k+1 \leqslant j \leqslant n$. Tällöin $x^k(q) = 0$ kaikilla $q \in S \cap V$, joten

$$0 = v\,x^j = \sum_{k=1}^n v^k \frac{\partial x^j}{\partial x^k}\Big|_p = v^j\,.$$

Siis $v \in T_pS$. □

Kun tarkastellaan kuvauksia euklidisten avaruuksien alimonistojen välillä, kuvaus voidaan usein ajatella ympäröivän avaruuden kuvauksen rajoittumana. Tällöin differentiaalia voidaan tarkastella derivaattamatriisin eli Jacobin matriisin avulla. Erityisesti, jos laajennetun kuvauksen differentiaali on injektio jossain alimoniston pisteessä, niin differentiaalin rajoittuma alimoniston tangenttiavaruuteen on myös injektio.

Olkoot $1 \leqslant m < n$ luonnollisia lukuja. Lineaarikuvaus $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ on injektio, jos sitä vastaavan $n \times m$-matriisin[13] A *ranki* on m. Matriisin A ranki on m, jos sen rivit ovat lineaarisesti riippumattomia, mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että matriisilla A on m lineaarisesti riippumatonta riviä. Matriisin A ranki on siis m, jos sillä on nollasta poikkeava $m \times m$-alideterminantti. Katso esimerkiksi [Lan, V§3, VI§9].

Esimerkki 5.22. Olkoon $W\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3$, $W(x) = ((x^1x^2, x^1, (x^2)^2)$. Kuvauksen W derivaattamatriisi on

$$\begin{pmatrix} x^2 & x^1 \\ 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}.$$

Jos $x^2 \neq 0$, niin sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomia, esimerkiksi koska toisen ja kolmannen rivin muodostaman 2×2-matriisin determinantti on $x_2 \neq 0$. Jos $x^2 = 0$ ja $x^1 \neq 0$ päästään samaan lopputulokseen tarkastelemalla ensimmäisen ja toisen rivin muodostamaa 2×2-matriisia. Jos $x = 0$ niin toinen sarake on nollavektori. Siis $W|_{\mathbb{E}^3 - \{0\}}$ on sileä immersio mutta lineaarikuvauksen dW_0 kuvajoukko on 1-ulotteinen. Kuvauksen W kuvajoukko on *Whitneyn sateenvarjo.*

Harjoitustehtäviä

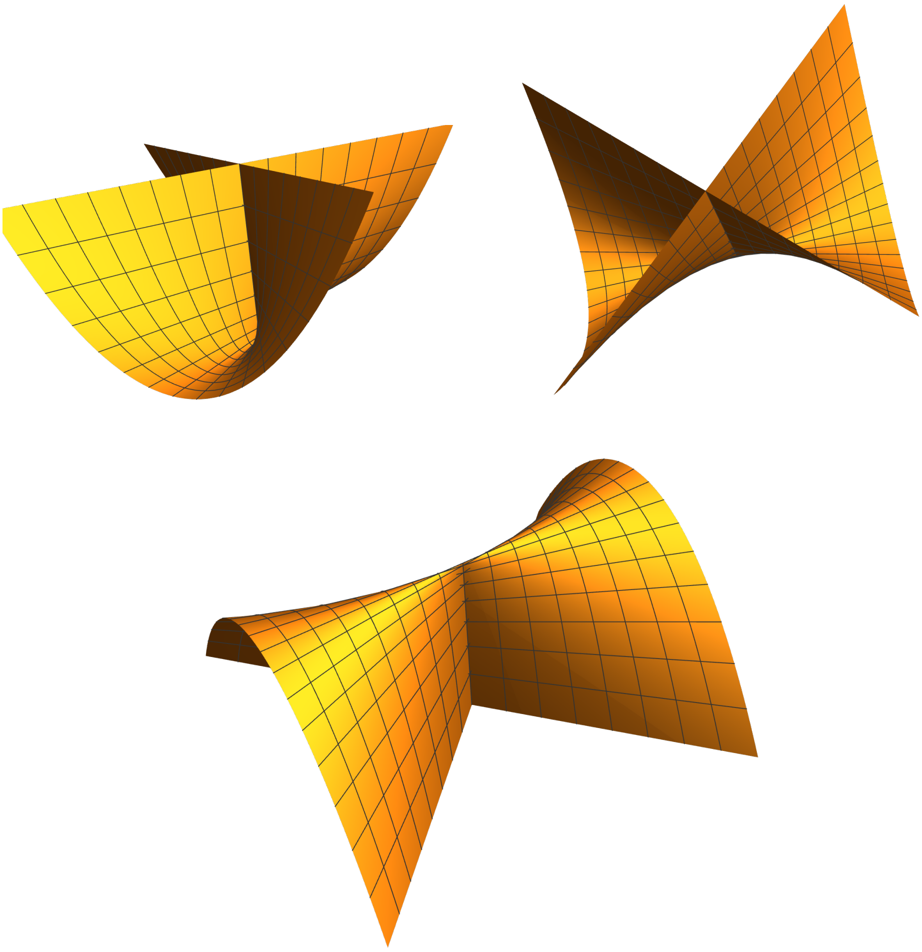
5.1. Todista Propositio 5.2.

5.2. Olkoon $\widetilde{f}\colon \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^1$, $f(y) = y_3$ kaikille $y \in \mathbb{E}^3$ euklidisen avaruuden standardikoordinaateissa. Osoita, että $f = \widetilde{f}|_{\mathbb{S}^2}\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{E}^1$ on sileä funktio. Määritä kuvauksen f kriittiset pisteet.

5.3. Olkoon M sileä monisto. Olkoon $f\colon M \to \mathbb{E}^1$ sileä funktio, jolla on lokaali maksimi pisteessä $p \in M$. Osoita, että p on funktion f kriittinen piste.[14]

[13] Tällaisessa matriisissa on n riviä ja m saraketta.

[14] Analyysin ja differentiaalilaskennan tuloksia saa käyttää.



Kuva 5.2 — Whitneyn sateenvarjo kolmesta eri suunnasta.

5.4. Todista Propositio 5.19.

5.5. Osoita, että kuvaus $\widetilde{G}\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3$,

$$\widetilde{G}(x) = \big((2 + \cos 2\pi x_1) \cos 2\pi x_2,\ (2 + \cos 2\pi x_1) \sin 2\pi x_2,\ \sin 2\pi x_1\big)$$

määrää toruksen $\mathbb{T}^2 = \mathbb{E}^2/\mathbb{Z}^2$ sileän upotuksen sileään monistoon $\mathbb{E}^3$.

5.6. Osoita, että kuvaus $\nu\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{E}^4$,

$$\nu([x]) = (x_1^2 - x_2^2,\ x_1x_2,\ x_1x_3,\ x_2x_3)$$

on sileä upotus.[15]

5.7. Osoita, että Harjoitustehtävän 1.12 kuvaus f_3 on immersio.

5.8. Osoita, että kuvaus $\nu\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{E}^3$,

$$\nu([x]) = (x_2x_3,\ x_1x_3,\ x_1x_2)$$

[15] Harjoitustehtävä 1.13

on sileä kuvaus mutta ei ole immersio. Osoita, että on äärellinen joukko $P \subset \mathbb{P}^2$ siten, että kuvauksen ν rajoittuma joukkoon $\mathbb{P}^2 - P$ on immersio.[16]

5.9. Olkoon $\tilde{\nu}\colon \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^6$,

$$\tilde{\nu}(x) = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, \sqrt{2}x_2x_3, \sqrt{2}x_1x_3, \sqrt{2}x_1x_2)\,.$$

(1) Osoita, että $\tilde{\nu}(\mathbb{S}^2) \subset \mathbb{S}^5$.

(2) Osoita, että $\tilde{\nu}|_{\mathbb{S}^2}\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^5$ on sileä immersio.

(3) Osoita, että kuvaus $\nu\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$,

$$\nu([x]) = [x_1^2 : x_2^2 : x_3^2 : \sqrt{2}x_2x_3 : \sqrt{2}x_1x_3 : \sqrt{2}x_1x_2]$$

on sileä upotus.

5.10. Olkoot X_1, X_2, X_3 vektorikenttiä monistolla $\mathbb{E}^4$,

$$\begin{aligned}
X_1(x) &= -x^2\frac{\partial}{\partial x^1} + x^1\frac{\partial}{\partial x^2} + x^4\frac{\partial}{\partial x^3} - x^3\frac{\partial}{\partial x^4}\,,\\
X_2(x) &= -x^3\frac{\partial}{\partial x^1} - x^4\frac{\partial}{\partial x^2} + x^1\frac{\partial}{\partial x^3} + x^2\frac{\partial}{\partial x^4}\,,\\
X_3(x) &= -x^4\frac{\partial}{\partial x^1} + x^3\frac{\partial}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial}{\partial x^3} + x^1\frac{\partial}{\partial x^4}\,.
\end{aligned}$$

(1) Osoita, että X_1, X_2, X_3 määrittelevät vektorikentät alimonistolla $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{E}^4$.

(2) Osoita, että $X_1(p), X_2(p), X_3(p)$ ovat lineaarisesti riippumattomia kaikilla $p \in \mathbb{S}^3$.

(3) Osoita, että $T\mathbb{S}^3$ on diffeomorfinen tulomoniston $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{E}^3$ kanssa.

[16] Katso kansikuvaa.

Osa II

Differentiaaligeometriaa monistoilla

Luku 6

Kotangenttikimppu

Tässä luvussa määrittelemme sileän moniston kotangenttikimpun, joka on moniston tangenttiavaruuksien duaalien erillinen yhdiste. Tangenttikimpun tapaan myös kotangenttikimppu on sileä monisto. Luvun aluksi tarkastelemme vektoriavaruuksien ja erityisesti tangenttiavaruuksien duaaleja.

6.1 Vektoriavaruuden duaali ja duaalikuvaus

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus. Lineaarikuvaus $\omega\colon V \to \mathbb{R}$ on *lineaarimuoto* eli *lineaarinen* 1*-muoto* eli *kovektori*. Vektoriavaruuden V *(algebrallinen) duaali* on

$$V^* = \{\omega\colon V \to \mathbb{R} \quad \text{kovektori}\}\,.$$

Lineaarialgebrasta tiedämme, että duaali on vektoriavaruus, kun se varustetaan tavanomaisilla funktioiden yhteenlaskulla ja vakiolla kertomisella.

Lemma 6.1. *Olkoon $(v_1, v_2, \dots v_n)$ vektoriavaruuden V kanta.*
(1) Jos $v = \sum_{i=1}^n a^i v_i$, niin $\omega(v) = \sum_{i=1}^n a^i \omega(v_i)$.
(2) Jokainen vektori $b = (b_1, b_2 \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ määrää lineaarimuodon $\omega_b \in V^*$, kun jokaiselle $v = \sum_{i=1}^n a^i v_i$ asetetaan $\omega_b(v) = \sum_{i=1}^n a^i b_i$.
(3) $\dim V^* = \dim V = n$.

Todistus. Harjoitustehtävä 6.1. □

Lemman 6.1 nojalla lineaarimuoto $\omega \in V^*$ määräytyy yksikäsitteisesti arvoista $\omega(v_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, kun $(v_1, v_2, \dots v_n)$ on vektoriavaruuden V kanta.

Propositio 6.2. *Olkoon $(E_1, E_2, \dots E_n)$ vektoriavaruuden V kanta. Olkoot $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n \in V^*$ siten, että*

$$\varepsilon^i(E_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1\,, & \text{kun } i = j\,, \\ 0\,, & \text{muuten} \end{cases}\,.$$

Tällöin $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ *on duaaliavaruuden* V^* *kanta.*

Todistus. Lemman 6.1 nojalla väitteeen ehto määrittelee lineaarimuodot $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ yksikäsitteisesti. Olkoon $\omega \in V^*$. Jokaiselle $v = \sum_{i=1}^n v^i E_i \in V$ pätee lineaarisuuden ja kuvauksen ε^j määritelmän nojalla

$$\varepsilon^i(v) = \sum_{j=1}^n v^j \varepsilon^i E_j = \sum_{j=1}^n v^j \delta^i_j = v^i$$

kaikille $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Siis

$$\omega\ v = \omega\Big(\sum_{i=1}^n v^i E_i\Big) = \sum_{i=1}^n v^i \omega(E_i) = \sum_{i=1}^n \omega(E_i)\, \varepsilon^i(v) = \Big(\sum_{i=1}^n \omega(E_i)\, \varepsilon^i\Big)(v)\,.$$

Siis $\omega = \sum_{i=1}^n \omega(E_i)\, \varepsilon^i \in \langle \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n \rangle$ kaikille $\omega \in V^*$. Lemman 6.1(3) nojalla $\dim V^* = n$, joten väite seuraa tästä. □

Olkoon $(v_1, v_2, \dots v_n)$ vektoriavaruuden V kanta. Olkoot $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n \in V^*$ siten, että

$$\varepsilon^i(E_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1\,, & \text{kun } i = j\ , \\ 0\,, & \text{muuten} \end{cases}\,.$$

Tällöin $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ on kannalle $(v_1, v_2, \dots v_n)$ *duaalinen* kanta.

Esimerkki 6.3. (1) Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ standardikannalle $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ duaalinen kanta $(\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n)$ on *duaaliavaruuden* $(\mathbb{R}^n)^*$ *standardikanta.*

(2) Olkoon $(E_1, E_2, \dots E_n)$ vektoriavaruuden V kanta. Jokainen $v \in V$ voidaan kirjoittaa yksikäsitteisesti muodossa

$$v = \sum_{i=1}^n v^i E_i = \sum_{i=1}^n \varepsilon^i(v) E_i\,.$$

Olkoot V ja W vektoriavaruuksia ja olkoon $L\colon V \to W$ lineaarikuvaus. Kuvaus $L^*\colon W^* \to V^*$,

$$L^*(\omega) = \omega \circ L$$

on kuvauksen L *duaalikuvaus* eli *transpoosi.*

Lemma 6.4. *(1) Lineaarikuvauksen duaalikuvaus on lineaarikuvaus.*
(2) Jos $L_1\colon V_1 \to V_2$ *ja* $L_2\colon V_2 \to V_3$ *ovat lineaarikuvauksia, niin* $(L_2 L_1)^* = L_1^* L_2^*$.

Todistus. Harjoitustehtävä 6.2. □

Vektoriavaruuden V duaalin duaali $V^{**} = (V^*)^*$ on vektoriavaruuden V *biduaali.*

Seuraava tulos on hyödyllinen luvussa 7, kun käsittelemme tensoreita.

Propositio 6.5. *Olkoon* V *äärellisulotteinen vektoriavaruus. Kuvaus* $\xi\colon V \to V^{**}$,

$$\xi(v)\omega = \omega v\,,$$

on lineaarinen isomorfismi

Todistus. Olkoon V vektoriavaruus ja olkoon $v \in V$. Kuvaus $\xi(v)\colon V^* \to \mathbb{R}$ on lineaarinen sillä kaikille $\omega_1, \omega_2 \in V^*$ ja kaikille $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ pätee duaaliavaruuden laskutoimituksia käyttämällä

$$\xi(v)(a_1\omega_1 + a_2\omega_2) = (a_1\omega_1 + a_2\omega_2)v = a_1\omega_1 v + a_2\omega_2 v = a_1\xi(v)\omega_1 + a_2\xi(v)\omega_2 \,.$$

Osoitetaan sitten, että ξ on lineaarikuvaus. Olkoot $v_1, v_2 \in V$ ja $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Tällöin kuvauksen $\omega \in V^*$ lineaarisuuden nojalla

$$\begin{aligned}\xi(a_1v_1 + a_2v_2)\omega &= \omega(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1\omega v_1 + a_2\omega v_2 = a_1\xi(v_1)\omega + a_2\xi(v_2)\omega \\ &= (a_1\xi(v_1) + a_2\xi(v_2))\omega \,,\end{aligned}$$

joten

$$\xi(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1\xi(v_1) + a_2\xi(v_2) \,.$$

Lemman 6.1(3) nojalla $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V < \infty$, joten ξ on isomorfismi, jos se on injektio. Olkoon $v \in V - \{0\}$. Olkoot $v_2, v_3, \ldots, v_n \in V - \{0\}$ siten, että $(v, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ on avaruuden V kanta. Olkoon $\omega_v \in V^*$ se (yksikäsitteisesti määrätty)lineaarimuoto, jolle pätee $\omega_v(v) = 1$ ja $\omega_v(v_2) = \omega_v(v_3) = \cdots = \omega_v(v_n)$. Tällöin

$$\xi(v)\omega_v = \omega_v(v) = 1 \,,$$

joten $\xi(v) \neq 0 \in V^{**}$. Siis $\ker \xi = \{0\}$, joten ξ on injektio. □

6.2 Kotangenttivektorit

Olkoon M sileä monisto ja olkoon $p \in M$. Duaaliavaruus $T_p^*(M)$ on moniston M *kotangenttiavaruus* pisteessä p. Kotangenttiavaruuden alkiot ovat *kotangenttivektoreita* p.[a]

[a] Joskus niitä kutsutaan *kovektoreiksi pisteessä p*.

Lemma 6.6. *Olkoon M sileä monisto. Sileä funktio $f \in \mathfrak{F}(M)$ määrää kotangenttivektorin $\mathbf{d}f|_p$asettamalla*

$$\mathbf{d}f|_p v_p = v_p f$$

kaikille $v_p \in T_pM$.

Todistus. Olkoot $v, w \in T_pM$ ja $a, b \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\mathbf{d}f|_p(av + bw) = (av + bw)f = a(vf) + b(wf) = a\,\mathbf{d}f|_p v + b\,\mathbf{d}f|_p w \,,$$

joten $\mathbf{d}f|_p \in T_p^*M$. □

Sileän funktion $f \in \mathfrak{F}(M)$ differentiaali df_p pisteessä $p \in M$ määriteltiin luvussa 3.2 asettamalla $df_p(v_p)g = v_p(g \circ f)$ kaikille $v_p \in T_pM$ ja kaikille $g \in \mathfrak{F}(\mathbb{E}^1)$.

Lemma 6.7. *Olkoon M sileä monisto ja olkoon $f \in \mathfrak{F}(M)$. Tällöin*

$$df_p(v_p) = \mathbf{d}f|_p\, v_p \,\frac{d}{dt}\Big|_{f(p)} \,.$$

Todistus. Kiinnitetään $v_p \in T_pM$. Koska $T_{f(p)}\mathbb{E}^1 = \left\langle \frac{d}{dt}\big|_{f(p)} \right\rangle$, on $a \in \mathbb{R}$, jolle

$$df_p(v_p) = a\frac{d}{dt}\big|_{f(p)} \tag{6.1}$$

Differentiaalin määritelmän ja yhtälön (6.1) nojalla

$$\mathbf{d}f|_p v_p = v_p(f) = v_p(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^1} \circ f) = df_p v_p \,\mathrm{id}_{\mathbb{E}^1} = a\,\frac{d}{dt}\Big|_{f(p)} \mathrm{id}_{\mathbb{E}^1} = a\,. \qquad \square$$

Tangenttiavaruus $T_{f(p)}\mathbb{E}^1$ samastetaan usein vektoriavaruuden $\mathbb{R}$ kanssa kuvauksella $a\frac{d}{dt}\big|_{f(p)} \mapsto a$. Tämän samastuksen jälkeen merkintä df_p tarkoittaa yleensä kotangenttivektoria $df_p \in T_p^*M$, jota merkitsimme edellä $\mathbf{d}f|_p$.

Olkoon (U, ϕ) sileä kartta sileällä monistolla M ja olkoon $p \in U$. Kuvauksen ϕ komponenttien $x^1, \dots, x^n$ differentiaalit $dx^1|_p, \dots, dx^n|_p$ ovat *kartan* (U, ϕ) *koordinaattiko(tangentti)vektorit* pisteessä p.

Käytämme kotangenttivektoreille yläindeksejä ja niiden komponenteille alaindeksejä.

Propositio 6.8. *Olkoon (U, ϕ) sileä kartta sileällä monistolla M ja olkoon $p \in U$. Tällöin $(dx^1|_p, \dots, dx^n|_p)$ on kotangenttiavaruuden T_p^*M kanta, joka on duaalinen tangenttiavaruuden T_p^*M kannan*[1] $(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$ *kanssa.*

Todistus. Määritelmän nojalla kaikille $1 \leqslant i, j \leqslant n = \dim M$ pätee

$$dx^i|_p \,\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p = \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p \,x^i = \delta^i_j\,. \tag{6.2}$$

Jos $\omega_p \in T_p^*M$,niin kaikille $1 \leqslant j \leqslant n$ pätee

$$\Big(\sum_{i=1}^n (\omega_p \,\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p) dx^i|_p\Big) \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p = \omega_p \,\frac{\partial}{\partial x^j}\,.$$

Koska kotangenttivektorit ω_p ja $\sum_{i=1}^n (\omega_p \,\frac{\partial}{\partial x^i}|_p) dx^i$ saavat samat arvot tangenttiavaruuden T_pM kantavektoreilla, päättelemme

$$\omega_p = \sum_{i=1}^n \big(\omega_p \,\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\big) dx^i\,.$$

Siis n koordinaattikovektoria virittää n-ulotteisen vektoriavaruuden T_p^*M, joten ne muodostavat kannan. $\square$

[1]Muista Seuraus 3.10.

6.3 Kotangenttikimppu

Olkoon M sileä monisto. Moniston M *kotangenttikimppu* on

$$T^*M = \bigsqcup_{p\in M} T_p^*M$$

varustettuna sileän moniston rakenteella, joka määritellään alla. Kotangenttikimpun T^*M *(kantapiste)projektio* on kuvaus $\pi = \pi_M \colon T^*M \to M$, $\pi(\omega, p) = p$.

Olkoon (U, ϕ) sileä kartta sileällä n-monistolla M ja olkoon $p \in U$. Proposition 6.8 nojalla jokaisella $\omega_p \in T_p^*U \subset T^*U \subset T^*M$ pätee

$$\omega_p = \sum_{k=1}^{n} c_k(\omega)\, dx^k|_p \tag{6.3}$$

joillain kertoimilla $c_1(v), c_2(v), \dots, c_n(v) \in \mathbb{R}$. Olkoon $c\colon T^*U \to \mathbb{E}^n$ kuvaus, jonka komponentit ovat $c_1(v), c_2(v), \dots, c_n(v)$. Olkoon $\Phi_U^*\colon T^*U \to \phi(U) \times \mathbb{E}^n$ kuvaus

$$\Phi_U^*(\omega_q) = (\phi(q), c(\omega))\,.$$

Valitaan joukkoon T^*U yksikäsitteisesti määritelty topologia, jolle Φ_U^* on homeomorfismi. Olkoon

$$\mathscr{B}^* = \{A \subset T^*M : A \subset T^*U \text{ on avoin jollain koordinaattiympäristöllä } U \subset M\}\,.$$

Valitaan joukkoon T^*M topologia, jonka kanta on $\mathscr{B}^*$ ja varustetaan T^*M kartastolla $\{(T^*U, \Phi_U^*) : (U, \phi) \text{ on sileä kartta}\}$.

Propositio 6.9. *Sileän moniston kotangenttikimppu on sileä monisto. Kantapisteprojektio on sileä kuvaus.*

Todistus. Todistetaan kuten Propositio 4.3. Harjoitustehtävä 6.4 □

Esimerkki 6.10. Jos monistolla M on globaali sileä kartta, niin T^*M on diffeomorfinen tuloavaruuden $M \times \mathbb{E}^n$ kanssa. Erityisesti $T^*\mathbb{E}^n$ on diffeomorfinen avaruuden $\mathbb{E}^{2n}$ kanssa.

6.4 Sileät 1-muodot

Olkoon M sileä monisto. Kuvaus $\omega\colon M \to T^*M$, jolle $\pi \circ \omega = \mathrm{id}_M$, on 1-*muoto* eli *kovektorikenttä* eli kotangenttikimpun T^*M *(globaali) leikkaus.*[a]

Olkoon [b]

$$\mathfrak{X}^*(M) = \{\omega\colon M \to T^*M : \omega \text{ on sileä 1-muoto}\}\,.$$

[a]Englanniksi *section.*

[b]Joissain lähteissä käytetään sileiden 1-muotojen avaruudelle merkintää $\Omega^1(M)$.

Käytämme merkintää

$$\omega_p = \omega(p)\,.$$

Monistolla M määritelty 1-muoto ω määrittelee kuvauksen moniston M vektorikenttien avaruudelta funktioiden avaruuteen luonnollisesti pisteittäisen toiminnan kautta.

Jos $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ ja $X \in \mathfrak{X}(M)$, niin

$$(\omega X)(p) = \omega_p X_p\,.$$

Luvussa 6.2 määritelty sileän funktion pisteittäinen differentiaali määrää 1-muodon.

Olkoon M sileä monisto. Funktion $f \in \mathfrak{F}(M)$ *differentiaali* df on kuvaus $df\colon M \to T^*M$, $p \mapsto df_p$.

Esimerkki 6.11. Olkoon M sileä monisto ja olkoon (U, ϕ) sileä kartta, jonka komponentit ovat $x^1, x^2, \ldots, x^n$. *Koordinaattimuodot* $dx^1, \ldots, dx^n$ ovat sileitä 1-muotoja joukossa U, sillä niiden esitys luonnollisessa kartassa $\Phi*_U$ on

$$\Phi^*_U \circ dx^k \circ \phi^{-1}(y) = (y, \mathbf{e}_k)\,.$$

Kovektorikenttien yhteenlasku ja vakiolla kertominen määritellään pisteittäin: Jos ω ja α ovat 1-muotoja ja $\lambda \in \mathbb{R}$, asetetaan

$$(\omega + \alpha)_p = \omega_p + \alpha_p \quad \text{ja} \quad (\lambda\omega)_p = \lambda\omega_p\,,$$

missä kotangenttivektorien yhteenlasku ja reaaliluvulla kertominen suoritetaan vektoriavaruuden T_p^*M laskutoimituksilla kaikilla $p \in M$.

Seuraavat differentiaalin ominaisuudet ovat käyttökelpoisia:

Propositio 6.12. *Olkoon M sileä monisto ja olkoot $f, g \in \mathfrak{F}(M)$. Tällöin*

(1) $d(af + bg) = adf + adg$ kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$.

(2) $d(fg) = f\,dg + g\,df$.

(3) jos $g(p) \neq 0$ kaikilla $p \in M$, niin

$$d\Big(\frac{f}{g}\Big) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}\,.$$

Todistus. (1) Olkoon $X \in \mathfrak{X}(M)$. Tällöin

$$d(af + bg)X = X(af + bg) = aXf + bXg = a\,df X + b\,dgX\,.$$

Loput väitteet todistetaan Harjoitustehtävässä 6.8. □

(Sileän) 1-muodon kertominen (sileällä) funktiolla määritellään pisteittäin: Jos $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ ja $f\colon M \to \mathbb{R}$, asetetaan

$$(f\omega)_p = f(p)\,\omega_p \tag{6.4}$$

kaikilla $p \in M$.

Lemma 6.13. *Olkoon M on sileä monisto ja olkoon $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$. Tällöin*

$$\omega(fX) = f\,\omega X$$

kaikille $f \in \mathfrak{F}(M)$ ja kaikille $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Todistus. Koska ω_p on lineaarikuvaus jokaisella $p \in M$, saamme

$$\omega(fX)(p) = \omega_p(f(p)X_p) = f(p)\,\omega_p X_p = (f\omega)_p X_p\,. \qquad \square$$

Jos $U \subset M$ on avoin koordinaattiympäristö, niin yhtälön (6.3) nojalla mikä tahansa 1-muoto $\omega\colon U \to T^*U$ voidaan ilmaista koordinaattimuotojen avulla: On funktiot $c_1, c_2, \ldots, c_n\colon U \to \mathbb{E}^1$, joille

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} c_k\, dx^k\,. \tag{6.5}$$

Propositio 6.14. *Olkoon M sileä monisto ja olkoon (U,ϕ) sileä kartta monistolla M. Olkoon $\omega\colon M \to T^*M$ 1-muoto. Tällöin ω on sileä 1-muoto joukossa U, jos ja vain jos sen kerroinfunktiot esityksessä* (6.5) *ovat sileitä.*

Todistus. Kovektorikentän ω esitys luonnollisissa koordinaateissa on $\widetilde{\omega}(y) = (y, c(y))$, joten ω on sileä, jos ja vain jos kerroinfunktiot $c_1, \ldots, c_n$ ovat sileitä. $\square$

Lemma 6.15. *Olkoon $f \in \mathfrak{F}(M)$ ja olkoon (U,x) sileä kartta. Tällöin*

$$df = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k}\, dx^k\,. \tag{6.6}$$

Todistus. Olkoon

$$X = \sum_{k=1}^{n} a^k \frac{\partial}{\partial x^k} \in \mathfrak{X}(M)\,.$$

Tällöin linearisuuden ja Lemman 6.13 nojalla

$$df\,X = \sum_{k=1}^{n} a^k \frac{\partial f}{\partial x^k}\,.$$

Toisaalta yhtälön (6.2) nojalla

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}\, dx^j\Big)X &= \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}\, dx^j\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} a^k \frac{\partial}{\partial x^k}\Big)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a^k \frac{\partial f}{\partial x^j}\, dx^j \frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a^k \frac{\partial f}{\partial x^j}\,\delta^j_k = \sum_{k=1}^{n} a^k \frac{\partial f}{\partial x^k}\,. \qquad \square\end{aligned}$$

Lemman 6.15 nojalla sileän funktion differentiaali vastaa differentiaalilaskennasta tuttua *gradienttia*.

Seuraus 6.16. *Sileän funktion differentiaali on sileä 1-muoto.*

Todistus. Seuraa Proposition 6.14 nojalla Lemmasta 6.15. $\square$

Propositio 6.17. *Olkoon M sileä monisto. Olkoon $\omega\colon M \to T^*M$ 1-muoto. Tällöin $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$, jos ja vain jos $\omega X \in \mathfrak{F}(M)$ kaikilla $X \in \mathfrak{X}(M)$.*[2]

Todistus. Olkoon $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ ja olkoon $X \in \mathfrak{X}(M)$. Olkoon (U,ϕ) sileä kartta. Propositioiden 4.8 ja 6.14 nojalla on funktiot $c_1^\omega,\dots,c_n^\omega,c_X^1,\dots,c_X^n \in \mathfrak{F}(U)$, joille

$$\omega = \sum_{i=1}^n c_i^\omega\, dx^i \qquad \text{ja} \qquad X = \sum_{j=1}^n c_X^j \frac{\partial}{\partial x^j}\,.$$

Tällöin

$$(\omega X)(q) = \Big(\sum_{i=1}^n c_i^\omega\, dx^i\Big)\Big(\sum_{j=1}^n c_X^j \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = \sum_{i,j=1}^n c_i^\omega\, c_X^j dx^i \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i,j=1}^n c_i^\omega\, c_X^j \delta_j^i = \sum_{i=1}^n c_i^\omega\, c_X^i\,,$$

joten ωX on sileä sileiden funktioiden äärellisenä summana.

Olkoon $\omega\colon M \to T^*M$ kuvaus, jolle $\pi \circ \omega = \mathrm{id}_M$. Oletetaan, että ωX on sileä kaikille $X \in \mathfrak{X}(M)$. Olkoon (U,ϕ) sileä kartta. Proposition 6.8 nojalla on funktiot $c_1^\omega,\dots,c_n^\omega\colon M \to \mathbb{E}^1$ siten, että

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^n c_i^\omega\, dx^i\,.$$

Olkoon $p \in U$. Koordinaattivektorikentät $\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}$ voidaan töyssyfunktiolla kertomalla jatkaa sileiksi vektorikentiksi $Z_1,\dots,Z_n \in \mathfrak{X}(M)$, joille $Z_i|_V = \frac{\partial}{\partial x^i}|_V$ jollain pisteen p avoimella ympäristöllä $V \subset U$ kaikille $1 \leqslant i \leqslant n$. Oletuksen mukaan funktiot ωZ_i ovat sileitä, joten joukossa V näemme, että

$$\omega Z_i = \Big(\sum_{k=1}^n c_i^\omega\, dx^i\Big)\frac{\partial}{\partial x^k} = c_k^\omega$$

on sileä jokaisella $1 \leqslant k \leqslant n$. Proposition 6.14 nojalla ω on sileä. □

Seurauksen 6.16 toinen todistus. Olkoon $f \in \mathfrak{F}(M)$ ja olkoon $X \in \mathfrak{X}(M)$. Tällöin määritelmän ja Proposition 4.14 nojalla näemme, että $df\, X = Xf \in \mathfrak{F}(M)$. Proposition 6.17 nojalla $df \in \mathfrak{X}^*(M)$. □

6.5 Sileän 1-muodon alkukuva

Olkoot M ja N sileitä monistoja ja olkoon $p \in M$. Sileän kuvauksen $F\colon M \to N$ differentiaalin dF_p duaalikuvaus $(dF_p)^*\colon T^*_{F(p)}N \to T^*_pM$,

$$(dF^*\omega_{F(p)})v = \omega(dF_p v)\,,$$

on kuvauksen F *kodifferentiaali* pisteessä $F(p)$.

Jos F on upotus, niin kodifferentiaalit $(dF_p)^*$ määräävä kuvauksen $F^*\colon T^*N \to T^*M$. Yleisessä tapauksessa pisteittäiset kodifferentiaalit eivät määrää kuvausta kotangenttiavaruuksien välillä mutta niiden avulla voidaan muodostaa moniston N vektorikentille alkukuvat:

[2] Vertaa Propositioon 4.14.

Jos $\omega \in \mathfrak{X}^*(N)$, niin yhtälöllä

$$(F^*\omega)_p = (dF_p)^*\omega_{F(p)} \tag{6.7}$$

määritelty 1-muoto $F^*\omega$ on sileän 1-muodon ω *alkukuva*[a] *kuvauksella* F.

[a] Englanniksi *pull-back*.

Jos $F\colon M \to N$, $\omega \in \mathfrak{X}^*(N)$ ja $X \in \mathfrak{X}(M)$, niin

$$(F^*\omega)X = \omega(dFX)\,. \tag{6.8}$$

Monissa lähteissä differentiaalia dF merkitään F_*. Tällöin yhtälö (6.8) saa muodon

$$(F^*\omega)X = \omega(F_*X)\,.$$

Propositio 6.18. *Olkoot M ja N sileitä monistoja ja olkoon $F\colon M \to N$ sileä kuvaus. Olkoot $\omega, \tau \in \mathfrak{X}^*(N)$ ja $f \in \mathfrak{F}(N)$. Tällöin*

(1) $F^*(\omega + \tau) = F^*(\omega) + F^*(\tau)$.

(2) $F^*(f\,\omega) = (f \circ F)\,F^*\omega$ ja

(3) $F^*df = d(f \circ F)$.

Todistus. (1) Harjoitustehtävä.

(2) Määritelmän nojalla ja koska dF_p^* on lineaarikuvaus, saamme

$$F^*(f\,\omega)_p = (dF_p)^*(f\,\omega)_{F(p)} = (dF_p)^*(f(F(p))\,\omega_{F(p)}) = f(F(p))dF_p^*(\omega_{F(p)}) = f\circ F(p)\,(F^*\omega)_p\,.$$

(3) Olkoon $X \in \mathfrak{X}(M)$. Tällöin

$$(F^*df)_pX_p = df_{F(p)}(dF_pX_p) = (dF_pX_p)f = X_p(f \circ F)$$

ja toisaalta

$$d(f \circ F)_pX_p = X_p(f \circ F)\,. \qquad \square$$

Yleisesti määritellään

$$F^*f = f \circ F$$

kaikille $f \in \mathfrak{F}(N)$, jos $F\colon M \to N$ on sileä kuvaus. Tällä merkinnällä Propositio 6.18 saadaan muotoon

$$F^*df = d(F^*f)$$

kaikille $f \in \mathfrak{F}(N)$. Siis *differentiaalioperaatio kommutoi alkukuvan kanssa.*

Propositio 6.19. *Olkoot M ja N sileitä monistoja ja olkoon $F\colon M \to N$ sileä kuvaus. Tällöin $F^*\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ kaikille $\omega \in \mathfrak{X}^*(N)$.*

Todistus. Olkoon (U, ϕ) sileä kartta monistolla M ja olkoon (V, ψ) sileä kartta monistolla N siten, että $F(U) \subset V$. Olkoot $(x^1, \ldots, x^m)$ ja $(y^1, \ldots, y^n)$ kuvausten ϕ ja ψ komponentit. Proposition 6.14 nojalla on sileät funktiot $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{F}(V)$, joille $\omega|_V = \sum_{k=1}^n a_k\, dy^k$.

Joukossa U pätee Proposition 6.18 kohtien (2) ja (3) ja Lemman 6.15 nojalla, koska $y^k \circ F = F^k \in \mathfrak{F}(M)$, pätee

$$\begin{aligned} F^*\omega &= F^*(\sum_{k=1}^n a_k\, dy^k) = \sum_{k=1}^n a_k \circ F\, F^* dy^k = \sum_{k=1}^n a_k \circ F\, d(y^k \circ F) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_k \circ F\, \frac{\partial F^k}{\partial x^j}\, dx^j\,. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Funktiot $a_k \circ F$ ja $y^k \circ F$ ovat sileitä, joten väite seuraa Proposition 6.14 nojalla. □

Propositio 6.20. *Olkoot $F_1 \colon M_1 \to M_2$ ja $F_2 \colon M_2 \to M_3$ sileitä kuvauksia ja olkoon $\omega \in \mathfrak{X}^*(M_3)$. Tällöin*

$$(F_2 \circ F_1)^*\omega = F_1^*(F_2^*\omega)\,.$$

Todistus. Harjoitustehtävä 6.11 □

6.6 Sileän 1-muodon rajoittuma alimonistolle

Olkoon S sileän moniston M säännöllinen alimonisto ja olkoon $i \colon S \to M$ inkluusiokuvaus. Moniston S tangenttiavaruus T_pS pisteessä $p \in S$ samastetaan avaruuden T_pM lineaarisen aliavaruuden $di_p(T_pS)$ kanssa.[3] Jokainen moniston M sileä 1-muoto $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ määrää sileän 1-muodon $i^*\omega$ monistolla S:

$$(i^*\omega)_p v = \omega_p(di_p v) = \omega_p v$$

kaikille $v \in T_pS$.

Esimerkki 6.21. Olkoon S sileän moniston M säännöllinen alimonisto. Oletetaan, että $s = \dim S < \dim M = n$ ja käytetään pisteessä $p \in S \subset M$ viipalekarttaa (U, x), jossa $x(S) = x(U) \cap \mathbb{E}^s \times \{(0, 0, \ldots, 0)\}$. Tällöin jokaiselle $s + 1 \leqslant k \leqslant n$ pätee Proposition 6.18(3) nojalla

$$i^*(dx^k) = d(x^k \circ i) = d\,0 = 0\,.$$

6.7 Laskelmia koordinaateissa

Olkoon M sileä monisto ja olkoon $p \in M$. Olkoot (U, ϕ) ja (V, ψ) sileitä karttoja pisteessä p. Luvussa 3.3 osoitimme, että kartan (U, ϕ) koordinaattitangenttivektorit saadaan kartan (V, ψ) koordinaattitangenttivektoreista lausekkeella

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\phi(p))\, \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p\,. \tag{6.10}$$

[3] Katso luku 5.4.

Jos

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_x^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \sum_{j=1}^{n} v_y^i \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p ,$$

niin yhtälön (6.10) nojalla

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_x^i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\phi(p)) \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} v_x^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\phi(p)) \Big) \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p .$$

Siis

$$v_y^j = \sum_{i=1}^{n} v_x^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\phi(p)) . \tag{6.11}$$

Yhtälö (6.9) antaa tapauksessa $F = \mathrm{id}$ muunnoskaavan

$$dy^j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\phi(p))\, dx^i . \tag{6.12}$$

Tämä yhtälö seuraa myös koordinaattivektorien ja koordinaattikovektorien duaalisuudesta Harjoitustehtävän 6.3 nojalla.

Sileän 1-muodon kertoimien muuntumisen saa helposti yhtälön (6.10) avulla: Jos

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^x dx^i = \sum_{j=1}^{n} \omega_j^y dy^j ,$$

niin

$$\begin{aligned} \omega_i^x(p) &= \omega_p(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p) = \omega(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\phi(p)) \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\phi(p))\, \omega_p(\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\phi(p))\, \omega_j^y(p) . \end{aligned} \tag{6.13}$$

Yhtälöiden (6.10) ja (6.13) mukaan kovektorien komponentit muuntuvat kartanvaihdossa samalla säännöllä kuin koordinaatti(tangentti)vektorit. Sen vuoksi kovektoreita on ollut tapana kutsua *kovarianteiksi vektoreiksi* ja vastaavasti tangenttivektoreita *kontravarianteiksi vektoreiksi*. Tämä on vakiintunut terminologia vaikka se on ristiriidassa kategoriateorian samojen sanojen käytön kanssa.

Esimerkki 6.22. Olkoot (r, θ) napakoordinaatit sileän moniston $\mathbb{E}^2$ avoimessa osajoukossa $\mathbb{E}^2 - \,]-\infty, 0] \times \{0\}$ kuten Esimerkissä 3.11. Kun kartanvaihdossa tarkastellaan 1-muodon lausekkeen muuntumista, lasketaan identtisen kuvauksen kodifferentiaalilla. Tällöin

$$dx^1 = \frac{\partial x^1}{\partial r} dr + -\frac{\partial x^1}{\partial \theta} d\theta = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta$$

ja

$$dx^2 = \frac{\partial x^2}{\partial r} dr + -\frac{\partial x^2}{\partial \theta} d\theta = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta .$$

Tällöin

$$\begin{aligned}\frac{x^1 dx^2 - x^2 dx^1}{\|x\|^2} &= \frac{r\cos\theta(r\cos\theta d\theta + \sin\theta dr) - r\sin\theta(-r\sin\theta d\theta + \cos\theta dr)}{r^2} \\ &= \frac{r^2\, d\theta}{r^2} = d\theta\,.\end{aligned}$$

Harjoitustehtäviä

6.1. Todista Lemma 6.1

6.2. Todista Lemma 6.4. Tarkasta myös, että duaalikuvaus on hyvin määritelty.

6.3. Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarikuvaus. Olkoon $(v_1, \dots, v_n)$ vektoriavaruuden V kanta ja olkoon $(w_1, \dots, w_m)$ vektoriavaruuden W kanta. Olkoot $(\bar{v}^1, \dots, \bar{v}^n)$ ja $(\bar{w}^1, \dots, \bar{w}^m)$ duaaliavaruuksien V^* ja W^* kannat, jotka ovat duaalisia kannoille $(v_1, \dots, v_n)$ ja $(w_1, \dots, w_m)$. Olkoon (a^i_j) lineaarikuvauksen L matriisi kantojen $(v_1, \dots, v_n)$ ja $(w_1, \dots, w_m)$ suhteen. Siis kaikille $1 \leqslant j \leqslant n$ pätee

$$Lv_j = \sum_{i=1}^{m} a^i_j w_i\,.$$

Osoita, että[4]

$$L^*\bar{w}^i = \sum_{j=1}^{n} a^i_j \bar{v}_j\,.$$

6.4. Todista Propositio 6.9.

Olkoon K on kommutatiivinen rengas. Epätyhjä osajoukko $\mathscr{I} \subset K$ on *ideaali*, jos

- $(\mathscr{I}, +)$ on additiivisen ryhmän $(K, +)$ aliryhmä ja
- $xa \in \mathscr{I}$ kaikilla $x \in R$ ja $a \in \mathscr{I}$.

Jos $\mathscr{I}, \mathscr{I}' \subset K$ ovat ideaaleja, niiden *tulo* on ideaali

$$\mathscr{I}\mathscr{I}' = \Big\{ \sum_{i=1}^{m} a_i b_i : a_i \in \mathscr{I},\, b_i \in \mathscr{I}',\, m \in \mathbb{N} \Big\}\,.$$

6.5. Olkoon M sileä monisto ja olkoon $p \in M$. Olkoon

$$\mathscr{I}_p = \{ f \in \mathfrak{F}(M) : f(p) = 0 \}\,.$$

Osoita, että $\mathscr{I}_p$ on renkaan $\mathfrak{F}(M)$ ideaali.

Olkoon $\Phi\colon \mathfrak{F}(M) \to T^*_pM$, $\Phi(f) = df_p$. Osoita, että[5] $\ker\Phi = (\mathscr{I}_p)^2$ ja $\Phi(\mathscr{I}_p) = T^*_pM$, joten Φ määrää vektoriavaruuksien isomorfismin $\mathscr{I}_p/(\mathscr{I}_p)^2 \cong T^*_pM$.

[4] Tehtävän lyhyt muotoilu on: Osoita, että lineaarikuvauksen transpoosin matriisi on lineaarikuvauksen matriisin transpoosi.

[5] Käytä Taylorin lausetta jäännöstermillä, [Lee1, Thm. C.15].

6.6. Olkoot $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{E}^2 - \{0\})$,

$$X_x = -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \qquad \text{ja} \qquad Y_x = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \,.$$

Etsi $\omega \in \mathfrak{X}^*\big(\mathbb{E}^2 - \{0\}\big)$, jolle $\omega(X) = 1$ ja $\omega(Y) = 0$.

6.7. Olkoon M sileä monisto, olkoon $f \in \mathfrak{F}(M)$ ja olkoon $g \in \mathfrak{F}(\mathbb{E}^1)$. Osoita, että sileille 1-muodoille pätee

$$d(g \circ f) = (\frac{d}{dt} g) \circ f \; df \,.$$

6.8. Todista Proposition 6.12 kohdat (2) ja (3).

6.9. Todista Propositio 6.18(1).

6.10. Tässä tehtävässä x ja y ovat euklidisten avaruuksien kanoniset koordinaatit.

(1) Olkoon $\exp\colon \mathbb{E}^1 \to]0, \infty[$, $\exp(x) = e^x$. Olkoon $\omega = \frac{dy}{y}$. Määritä $\exp^* \omega$.

(2) Olkoon $F\colon \{x \in \mathbb{E}^2 : \|x\| < 1\} \to \mathbb{E}^3 - \{0\}$,

$$F(x) = (x^1, x^2, \sqrt{1 - \|x\|^2})$$

ja olkoon $\omega \in \mathfrak{X}^*(\mathbb{E}^3 - \{0\})$,

$$\omega = (1 - (y^1)^2 - (y^2)^2) dy^3 \,.$$

Määritä $F^*\omega$.

(3)Määritä sileän 1-muodon $F^*\omega_2$ lauseke tason yksikkökiekon napakoordinaateissa.

6.11. Todista Propositio 6.20.

6.12. Olkoon M sileä monisto ja olkoon S funktion $f \in \mathfrak{F}(M)$ säännöllinen tasa-arvopinta. Osoita, että df määrää 1-muodon $0 \in \mathfrak{X}^*(S)$ alimonistolla S.

6.13. Olkoon $f\colon \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^1$, $f(x) = \|x\|^2$ ja olkoon $F = \mathscr{S}^{-1}\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3$ stereograafisen projektion käänteiskuvaus.[6] Laske F^*df ja $d(f \circ F)$.[7]

6.14. Olkoon $f\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^1$, $f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$ Laske df kanonisessa kartassa ja napakoordinaateissa.

[6] Katso Esimerkki 1.12(3).

[7] Proposition 6.18(3) nojalla laskuista pitäisi tulla sama tulos.

Luku 7

Multilineaarialgebraa

Tässä luvussa käsittelemme multilineaarialgebraa reaalisissa vektoriavaruuksissa. Tarkastelemme erityisesti alternoivia ja symmetrisiä tensoreita, joista etenkin alternoivat tensorit ovat keskeisessä osassa kurssin loppupuolella.

7.1 Vektoriavaruuden tensorit

Olkoot $V_1, V_2, \ldots, V_m$ ja W vektoriavaruuksia. Kuvaus $L\colon V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_m \to W$ on *multilineaarikuvaus*, jos kuvaus $v \mapsto L(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v, v_{k+1}, \ldots, v_m)$ on lineaarikuvaus kaikilla kiinnitetyillä $v_i \in V_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $i \neq k$.

Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus ja olkoot $r, s \in \mathbb{N}$. Multilineaarikuvaus $A\colon (V^*)^r \times V^s \to \mathbb{R}$ on vektoriavaruuden V (r,s)*-tensori*. Vektoriavaruuden V (r,s)-*tensorien vektoriavaruus* on

$$T^{(r,s)}(V) = \left\{A\colon (V^*)^r \times V^s \to \mathbb{R} \ \text{ multilineaarikuvaus}\right\}.$$

Esimerkki 7.1. (1) Lineaarikuvaukset ovat multilineaarikuvauksia.

(2) Reaalisen vektoriavaruuden V sisätulo on bilineaarikuvaus, siis multilineaarikuvaus. Se on $(0,2)$-tensori.

(3) Olkoon V äärellisulotteinen reaalinen vektoriavaruus. Proposition 6.5 nojalla jokainen vektori $v \in V$ määrää lineaarikuvauksen $\xi(v) \in V^{**}$, $\xi(v)\omega = \omega v$, joten *evaluaatiokuvaus* $E\colon V^* \times V \to \mathbb{R}$,

$$E(\omega, v) = \omega v\ ,$$

on $(1,1)$-tensori.

(4) Olkoon V n-ulotteinen vektoriavaruus. Kuvaus $\det\colon V^n \to \mathbb{R}$,

$$\det(v_1, \ldots, v_n) = \det(v^i_j)^n_{i,j=1}$$

on multilineaarikuvaus, $(0,n)$-tensori.

(5) Ristitulo $\cdot \times \cdot \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$u \times v = \left(u^2v^3 - u^3v^2, u^3v^1 - u^1v^3, u^1v^2 - u^2v^1\right),$$

on bilineaarikuvaus.

Jatkossa samastamme äärellisulotteiset vektoriavaruudet V ja V^{**} ja ajattelemme tarvittaessa vektoria $v \in V$ avaruuden V^{**} alkiona ilman eri mainintaa tai merkintää.

Tensorien muodostaminen lineaarikuvauksista ei ole vaikeaa.

Olkoot $V_1, \ldots, V_m$ vektoriavaruuksia. Lineaarikuvausten $L_k \in V_k^*$ *tensoritulo* on kuvaus $L_1 \otimes L_2 \otimes \cdots \otimes L_m \colon V_1 \times \cdots V_m \to \mathbb{R}$,

$$L_1 \otimes L_2 \otimes \cdots \otimes L_m(v_1, \ldots, v_m) = L_1(v_1)\, L_2(v_2) \cdots L_m(v_m)\,.$$

Lemma 7.2. *Reaaliarvoisten lineaarikuvausten tensoritulo on multilineaarikuvaus.* □

Todistus. Harjoitustehtävä 7.1. □

Esimerkki 7.3. Olkoon V vektoriavaruus. Jos $v_1, \ldots v_r \in V$ ja $\omega^1, \ldots, \omega^s \in V^*$, niin $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^s \in T^{(r,s)}(V)$.

Propositio 7.4. *Olkoon V n-ulotteinen reaalinen vektoriavaruus. Tällöin $T^{(r,s)}(V)$ on n^{r+s}-ulotteinen vektoriavaruus.*

Todistus. Harjoitustehtävässä 7.3 tarkastetaan, että (r, s)-tensorit muodostavat vektoriavaruuden, joten osoitettavaksi jää avaruuden dimensio. Olkoon $(E_1, \ldots, E_n)$ avaruuden V kanta ja olkoon $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ avaruuden V^* kanta, joka on duaalinen kannalle $(E_1, \ldots, E_n)$. Osoitamme, että vektorit $E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{j_s}$, $1 \leqslant i_k, j_\ell \leqslant n$, muodostavat avaruuden $T^{(r,s)}(V)$ kannan.

Olkoot $\theta^1, \ldots \theta^r \in V^*$ ja $w_1, \ldots, w_s \in V$. Tällöin $\theta^i = \sum_{j_i=1}^n \theta^i_{j_i} \varepsilon^{j_i}$ ja $w_k = \sum_{\ell_k=1}^n w_k^{\ell_k} E_{\ell_k}$ joillain kertoimilla $\theta^i_{j_i}, w_k^{\ell_k} \in \mathbb{R}$. Olkoon $A \in T^{(r,s)}(V)$. Tällöin multilineaarisuudesta seuraa

$$A(\theta^1, \ldots, \theta^r, v_1, \ldots, v_s) = \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_r,\\ \ell_1,\ldots,\ell_s=1}}^n \theta^1_{j_1} \cdots \theta^r_{j_r}\, w_1^{\ell_1} \cdots w_s^{\ell_s}\, A(\varepsilon^{j_1}, \ldots, \varepsilon^{j_r}, E_{\ell_1}, \ldots, E_{\ell_s})\,.$$

Toisaalta tensoritulon määritelmän, multilineaarisuuden ja duaalisuuden nojalla

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{j_1,\ldots,j_r,\\ \ell_1,\ldots,\ell_s=1}}^n A(\varepsilon^{j_1}, \ldots, \varepsilon^{j_r}, E_{\ell_1}, \ldots, E_{\ell_s}) E_{j_1} \otimes \cdots \otimes E_{j_1} \otimes \varepsilon^{\ell_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{\ell_s}(\theta^1, \ldots, \theta^r, v_1, \ldots, v_s) \\
&\qquad = \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_r,\\ \ell_1,\ldots,\ell_s=1}}^n A(\varepsilon^{j_1}, \ldots, \varepsilon^{j_r}, E_{\ell_1}, \ldots, E_{\ell_s})\, \theta^1_{j_1} \cdots \theta^r_{j_r}\, w_1^{\ell_1} \cdots w_s^{\ell_s}\,.
\end{aligned}$$

Siis

$$A = \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_r,\\ \ell_1,\ldots,\ell_s=1}}^n A(\varepsilon^{j_1}, \ldots, \varepsilon^{j_r}, E_{\ell_1}, \ldots, E_{\ell_s})\, E_{j_1} \otimes \cdots \otimes E_{j_1} \otimes \varepsilon^{\ell_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{\ell_s}\,,$$

joten tensorit $E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{j_s}$, $1 \leqslant i_k, j_\ell \leqslant n$, virittävät avaruuden $T^{(r,s)}(V)$.

Tensorien $E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{j_s}$ lineaarinen riippumattomuus seuraa tarkastelemalla, miten ne kuvaavat alkiot $(\varepsilon^{k_1}, \ldots, \varepsilon^{k_r}, E_{\ell_1}, \ldots, E_{\ell_s})$. □

Esimerkki 7.5. Euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^n$ standardisisätulo on $\sum_{i=1}^n \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^i$:[1]

$$\Big(\sum_{i=1}^n \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^i\Big)(x, y) = \sum_{i=1}^n x^i y^i = (x \,|\, y)\,.$$

Vastaavalla tavalla voidaan määritellä vektoriavaruuden V tensorien tensoritulo. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi määrittelemme kahden tensorin tensoritulon, jota iteroimalla saadaan useamman tensorin tensoritulot.

Olkoon V vektoriavaruus. Tensorien $A_1 \in T^{(r_1,s_1)}(V)$ ja $A_2 \in T^{(r_2,s_2)}(V)$ *tensoritulo* on $A_1 \otimes A_2 \colon (V^*)^{r_1+r_2} \times V^{s_1+s_2} \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(A_1 \otimes A_2)&(\omega^1, \ldots, \omega^{r_1+r_2}, v_1, \ldots, v_{s_1+s_2})\\ &= A_1(\omega^1, \ldots, \omega^{r_1}, v_1, \ldots, v_{s_1})\, A_s(\omega^{r_1+1}, \ldots, \omega^{r_1+r_2}, v_{s_1+1}, \ldots, v_{s_1+s_2})\,.\end{aligned}$$

Lemma 7.6. *Olkoon V vektoriavaruus. Olkoot $A_1, A_2 \in T^{(r_1,s_1)}(V)$, $B_1, B_2 \in T^{(r_2,s_2)}(V)$ ja $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Tällöin*

$$(a_1A_1 + a_2A_2) \otimes (b_1B_1 + b_2B_2) = a_1b_1A_1 \otimes B_1 + a_1b_2A_1 \otimes B_2 + a_2b_1A_2 \otimes B_1 + a_2b_2A_2 \otimes B_2\,.$$

Todistus. Harjoitustehtävä 7.5. □

Tensoritulon määritelmästä seuraa välittömästi hyödyllinen laskusääntö: Jos $A_1, \ldots, A_n$ ovat tensoreita ja $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, niin

$$a_1A_1 \otimes a_2A_2 \otimes \cdots \otimes a_nA_n = \Big(\prod_{k=1}^n a_k\Big)\, A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n\,. \tag{7.1}$$

7.2 Symmetriset ja alternoivat tensorit

Jokainen permutaatio $\sigma \in S_n$ voidaan kirjoittaa vaihtojen[2] tulona

$$\sigma = (i_1j_1)(i_2j_2)\cdots(i_mj_m)\,,$$

missä $1 \leqslant i_k, j_k \leqslant n$ kaikilla $1 \leqslant k \leqslant m$. Permutaation $\sigma \in S_n$ *merkki* on ryhmähomomorfismi $\operatorname{sign}\colon S_n \to \{\pm 1\}$,

$$\operatorname{sign}\big((i_1j_1)(i_2j_2)\cdots(i_mj_m)\big) = (-1)^m\,.$$

[1] Esimerkki 6.3(1).

[2] Vaihtoja kutsutaan usein transpositioiksi. Permutaatioita käsitellään ryhmäteorian kurssilla, katso esimerkiksi [Par3].

Olkoon V vektoriavaruus. Olkoon $A \in T^{(0,k)}(V)$ ja olkoon $\sigma \in S_k$ permutaatio. Määritellään tensori $\sigma \cdot A$ asettamalla

$$(\sigma \cdot A)(v_1, \ldots, v_k) = A(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$$

kaikille $v_1, \ldots, v_k \in V$.

Lemma 7.7. *Jos $A \in T^{(0,s)}(V)$ ja $\sigma, \tau \in S_k$, niin $\tau \cdot (\sigma \cdot A) = (\tau\sigma) \cdot A$*

Todistus. Käyttämällä laskussa merkintöjä $w_1 = v_{\sigma(1)}, \ldots, w_k = v_{\sigma(k)}$ saamme kaikille $v_1, \ldots, v_k \in V$

$$\begin{aligned}(\tau \cdot (\sigma \cdot A))(v_1, v_2, \ldots, v_s) &= \sigma \cdot A(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau_k)}) \\ &= \sigma \cdot A(w_1, \ldots, w_k) \\ &= A(w_{\sigma(1)}, \ldots, w_{\sigma(k)}) \\ &= A(v_{\tau(\sigma(1))}, \ldots, w_{\tau(\sigma(k))}) \\ &= A(v_{\tau\sigma(1)}, \ldots, v_{\tau\sigma(k)}) = (\tau\sigma) \cdot A(v_1, \ldots, v_k)\,. \end{aligned}$$ □

Olkoon V vektoriavaruus ja olkoon $k \geqslant 1$. Olkoon $A \in T^{(0,k)}(V)$. Jos $\sigma \cdot A = A$ kaikille permutaatioille $\sigma \in S_k$, niin A on *symmetrinen* tensori. Vektoriavaruuden V *symmetristen tensorien avaruus* on[a]

$$S^k(V) = \left\{\alpha \in T^{(0,k)}(V) : \sigma \cdot \alpha = \alpha\right\}.$$

[a]Lee [Lee2] käyttää merkintää $\Sigma(V)$ tälle avaruudelle.

Esimerkki 7.8. Sisätulo on symmetrinen $(0,2)$-tensori.

Propositio 7.9. *Äärellisulotteisen vektoriavaruden V $(0,k)$-tensori on symmetrinen, jos ja vain jos $\tau \cdot A = A$ jokaiselle vaihdolle $\tau \in S_k$.*

Todistus. Harjoitustehtävä 7.6. □

Olkoon V vektoriavaruus ja olkoon $k \geqslant 1$. Olkoon $A \in T^{(0,k)}(V)$. Jos $\sigma \cdot A = \mathrm{sign}(\sigma)A$ kaikille permutaatioille $\sigma \in S_k$, niin A on *alternoiva* tensori.[a] Alternoiva $(0,k)$-tensori on *k-kovektori* ja *multikovektori*. Vektoriavaruuden V k-kovektorien avaruus on

$$A^k(V) = \left\{\alpha \in T^{(0,k)}(V) : \sigma \cdot \alpha = \mathrm{sign}(\sigma)\alpha\right\}.$$

Määritellään lisäksi $A^0(V) = \mathbb{R}$.

[a]Alternoivaa tensoria voi kutsua myös *antisymmetriseksi tensoriksi.*

Tällä kurssilla emme käsittele symmetrisiä tai alternoivia $(k,0)$-tensoreita vaan keskitymme yleisemmin esiintyviin $(0,k)$-tensoreihin. Sekatensoreille ei yleensä yritetäkään määritellä symmetrisyyden tai antisymmetrisyyden käsitettä.

Esimerkki 7.10. (1) Olkoon $\det\colon (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$,

$$\det(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) v^1_{\sigma(1)} v^2_{\sigma(2)} \cdots v^n_{\sigma(n)}\,,$$

missä $v_j = \sum_{k=1}^n v_j^k \mathbf{e}_k$ kaikille $1 \leqslant j \leqslant n$. Harjoitustehtävässä 7.13 osoitetaan, että det on alternoiva $(0,k)$-tensori.

(2) $A^1(V) = S^1(V) = T^{(0,1)}(V) = V^*$, koska ryhmässä $S_1 = \{\mathrm{id}\}$ ei ole parittomia permutaatioita.

Lemma 7.11. *Olkoon V reaalinen vektoriavaruus ja olkoon $k \geqslant 2$. Tällöin*

$$A^k(V) \cap S^k(V) = \{0\}\,.$$

Todistus. Olkoon $\alpha \in A^k(V) \cap S^k(V)$. Tällöin kaikille $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ symmetrisyyden ja antisymmetrisyyden nojalla pätee

$$\alpha(v_1, v_2, \ldots, v_k) = (12) \cdot \alpha(v_1, v_2, \ldots, v_k) = -\alpha(v_1, v_2, \ldots, v_k)\,.$$

joten $\alpha(v_1, v_2, \ldots, v_k) = 0$. □

Propositio 7.12. *Olkoon A äärellisulotteisen vektoriavaruden V $(0,k)$-tensori. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(1) A on alternoiva.

(2) $\tau \cdot A = -A$ jokaiselle vaihdolle $\tau \in S_k$.

(3) Jos $v_1, \ldots, v_k \in V$ ovat lineaarisesti riippuvia, niin $A(v_1, \ldots, v_k) = 0$.

(4) Jos $v_1, \ldots, v_k \in V$ ja $v_i = v_j$ joillain $1 \leqslant i, j \leqslant k$, $i \neq j$, niin $A(v_1, \ldots, v_k) = 0$.

Todistus. Todistamme eri kohtien väliset yhteydet seuraavan kaavion mukaan:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, bend left] \arrow[dr] & 2 \arrow[l, bend left] \\
3 \arrow[r, bend left] & 4 \arrow[l, bend left] \arrow[u, bend right]
\end{tikzcd}$$

Ehto (2) seuraa triviaalisti ehdosta (1). Se, että ehto (2) seuraa ehdosta (1), seuraa Lemmasta 7.7 ja siitä, että vaihdot virittävät permutaatioiden ryhmät, yksityiskohtainen todistus tehdään Harjoitustehtävässä 7.6.

Jos A on alternoiva ja $v_i = v_j$ kuten kohdassa (4), niin

$$A(v_1, \ldots, v_k) = \operatorname{sign}(ij) A(v_1, \ldots, v_k) = -A(v_1, \ldots, v_k)\,,$$

joten $A(v_1, \ldots, v_k) = 0$. Siis ehto (4) seuraa ehdosta (1). Samoin ehto (4) seuraa triviaalisti ehdosta (3).

Oletetaan sitten, että ehto (4) on voimassa. Olkoot $1 \leqslant i, j \leqslant k$ siten, että $i \neq j$. Ehdosta (4) seuraa bilineaarisuutta käyttämällä, että

$$\begin{aligned}
0 &= A(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_k) \\
&= A(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + A(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) \\
&\qquad + A(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + A(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_k) \\
&= A(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) + A(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k) \\
&= (A + (ij) \cdot A)(v_1, \ldots, v_k)\,.
\end{aligned}$$

Siis ehto (2) seuraa ehdosta (4).

Oletetaan edelleen, että ehto (4) on voimassa. Jos vektorit $v_1, \ldots, v_k \in V$ ovat lineaarisesti riippuvia, niin jokin niistä voidaan esittää toisten lineaarikombinaationa, Voimme olettaa, että $v_k = \sum_{j=1}^{k-1} v_j$. Tällöin ehdosta (4) seuraa.

$$A(v_1, \ldots, v_k) = A(v_1, \ldots, v_{k-1}, \sum_{j=1}^{k-1} v_j) = \sum_{j=1}^{k-1} (v_1, \ldots, v_{k-1}, v_j) = 0$$

Siis ehto (3) seuraa ehdosta (4) ja kaikkien ehtojen yhtäpitävyys on todistettu. □

Multilineaarisuus ja Proposition 7.12 ehto (4) ovat *k-ulotteisen tilavuuden* ominaisuuksia, joten alternoivaa $(0, k)$-tensoria voidaan ajatella k-ulotteisen *merkillisen tilavuuden* mittarina.[3] Tunnetusti $|\det(v_1, \ldots, v_n)|$ on vektorien $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{E}^n$ virittämän n-ulotteisen suuntaissärmiön n-ulotteinen tilavuus euklidisessa avaruudessa $\mathbb{E}^n$.

7.3 Symmetrointi ja alternointi

Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus. Kuvaus $\mathrm{Sym}\colon T^{(0,m)}(V) \to T^{(0,m)}(V)$,

$$\mathrm{Sym}\, A = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \sigma \cdot A$$

on *symmetrointi*. Kuvaus $\mathrm{Alt}\colon T^{(0,m)}(V) \to T^{(0,m)}(V)$,

$$\mathrm{Alt}\, A = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \mathrm{sign}(\sigma)\, \sigma \cdot A$$

on *alternointi*.

Esimerkki 7.13. (1) $S_2 = \{\mathrm{id}, (12)\}$. Jokaiselle $\omega \in T^{(0,2)}(V)$ pätee

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}\, \omega &= \frac{1}{2}(\omega + (12) \cdot \omega)\,, \\ \mathrm{Alt}\, \omega &= \frac{1}{2}(\omega + \mathrm{sign}(12)\,(12) \cdot \omega)\,, \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}\, \omega(v_1, v_2) &= \frac{1}{2}(\omega(v_1, v_2) + \omega(v_2, v_1))\,, \\ \mathrm{Alt}\, \omega(v_1, v_2) &= \frac{1}{2}(\omega(v_1, v_2) - \omega(v_2, v_1))\,. \end{aligned}$$

Erityisesti pätee $\omega = \mathrm{Sym}\, \omega + \mathrm{Alt}\, \omega$. Harjoitustehtävässä 7.9 ja yleisemmin Esimerkissä 7.29 näemme, että vastaava väite ei päde korkeammissa dimensioissa.

[3] Merkillinen tilavuus voi olla myös negatiivinen.

(2) $S_3 = \{\mathrm{id}, (12), (13), (23), (123) = (12)(23), (132) = (13)(23)\}$. Siis

$$\begin{aligned}\mathrm{Sym}(\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^3) = \frac{1}{6}\big(&\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^3 + \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^3 + \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^2 \\ &+ \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^2\big)\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\mathrm{Alt}(\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^3) = \frac{1}{6}\big(&\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^3 - \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^3 - \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^2 \\ &- \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^2\big)\,.\end{aligned}$$

Propositio 7.14. *(1)* Alt *ja* Sym *ovat lineaarikuvauksia.*
(2) $\mathrm{Alt}\, A \in A^k(V)$ *ja* $\mathrm{Sym}\, A \in \mathrm{Sym}^k(V)$ *kaikilla* $A \in T^{(0,k)}(V)$.
(3) Olkoon $\alpha \in T^{(0,k)}(V)$*. Tällöin* $\mathrm{Sym}\,\alpha = \alpha$*, jos ja vain jos* $\alpha \in S^k(V)$.
(4) Olkoon $\alpha \in T^{(0,k)}(V)$*. Tällöin* $\mathrm{Alt}\,\alpha = \alpha$*, jos ja vain jos* $\alpha \in A^k(V)$.

Todistus. Kohdat (1), (3) ja (4) tehdään Harjoitustehtävässä 7.7.
(2) Olkoon $A \in T^{(0,k)}(V)$ ja olkoon $\tau \in S_k$. Tällöin Lemman 7.7 nojalla

$$\tau \cdot \mathrm{Sym}\, A = \tau \cdot (\frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \sigma \cdot A) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} (\tau\sigma) \cdot A = \mathrm{Sym}(A)\,,$$

koska vasen siirto alkiolla τ on permutaatioiden joukon bijektio itselleen. Vastaavasti

$$\begin{aligned}\tau \cdot \mathrm{Alt}\, A &= \tau \cdot (\frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \mathrm{sign}(\sigma)\ \sigma \cdot A) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \mathrm{sign}(\sigma)\ (\tau\sigma) \cdot A \\ &= \mathrm{sign}(\tau)\, \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \mathrm{sign}(\tau\sigma)\ (\tau\sigma) \cdot A = \mathrm{sign}(\tau)\ \mathrm{Alt}(A)\,,\end{aligned}$$

koska sign on homomorfismi. □

Seuraus 7.15. *Olkoon* V *äärellisulotteinen vektoriavaruus. Tällöin* $S^k(V)$ *ja* $A^k(V)$ *ovat vektoriavaruuksia. Lisäksi*

$$S^k(V) = \mathrm{Sym}(T^{(0,k)}(V))$$

ja

$$A^k(V) = \mathrm{Alt}(T^{(0,k)}(V))\,.$$

Jos $k \geqslant 2$*, niin* $\mathrm{Sym}(A^k(V))) = \{0\} = \mathrm{Alt}(S^k(V))$.

Todistus. Harjoitustehtävä 7.8. □

7.4 Ulkoista algebraa

Alternoivat tensorit ovat tärkeitä tällä kurssilla.Tässä luvussa määrittelemme ulkoisen tulon, joka antaa laskutoimituksen vektoriavaruuden kaikkien multikovektorien avaruuteen.[4]

[4]Katso luku 7.6.

Olkoot $k, \ell \geqslant 1$. Alternoivien tensorien $\omega \in A^k(V)$ ja $\eta \in A^\ell(V)$ *ulkoinen tulo*[a] eli *väkätulo*[b] on

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!}\,\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta) \in A^{k+\ell}(V)\,.$$

Lisäksi reaaliluvulle $c \in \mathbb{R}$ määritellään

$$c \wedge \omega = c\omega\,.$$

[a] external product
[b] wedge product

Esimerkki 7.16. Olkoot $\omega, \eta \in A^1(V)$. Tällöin

$$\omega \wedge \eta = \frac{2}{1}\frac{1}{2}(\omega \otimes \eta - \eta \otimes \omega) = (\omega \otimes \eta - \eta \otimes \omega)\,.$$

Erityisesti $\omega \wedge \omega = 0$.

Propositio 7.17. *(1) Olkoot $\omega \in A^k(V)$, $\alpha, \beta \in A^\ell(V)$ ja olkoot $a, b \in \mathbb{R}$. Tällöin*

$$\omega \wedge (a\alpha + b\beta) = a\omega \wedge \alpha + b\omega \wedge \beta$$

ja

$$(a\alpha + b\beta) \wedge \omega = a\alpha \wedge \omega + b\beta \wedge \omega\,.$$

(2) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell}\beta \wedge \alpha$ kaikille $\alpha \in A^k(V)$ ja $\beta \in A^\ell(V)$.

Todistus. (1) Väite seuraa tensoritulon bilineaarisuudesta, Lemma 7.6.
(2) Olkoon $\sigma = (1\,2 \cdots k+\ell)$. Huomataan ensin, että

$$\alpha \otimes \beta(v_1, \ldots, v_{k+\ell}) = (\sigma^k \cdot (\beta \otimes \alpha))(v_1, \ldots, v_{k+\ell})\,.$$

Syklin σ merkki on $(-1)^{k+\ell+1}$, joten $\mathrm{sign}(\sigma^k) = (-1)^{k(k+\ell+1)} = (-1)^{k\ell}$. Siis

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \beta &= \frac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!}\,\mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta) = \frac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!}\,\mathrm{Alt}(\sigma^k \cdot (\beta \otimes \alpha)) \\
&= \frac{1}{k!\,\ell!}\sum_{\tau \in S_{k+\ell}} \mathrm{sign}(\tau)\;\tau \cdot (\sigma^k \cdot (\beta \otimes \alpha)) \\
&= \frac{1}{k!\,\ell!}\,\mathrm{sign}(\sigma^k)\sum_{\tau \in S_{k+\ell}} \mathrm{sign}(\tau\sigma^k)\;(\tau\sigma^k) \cdot (\beta \otimes \alpha) \\
&= \frac{1}{k!\,\ell!}(-1)^{k\ell}\sum_{\tau \in S_{k+\ell}} \mathrm{sign}(\tau)\;\tau \cdot (\beta \otimes \alpha) \\
&= (-1)^{k\ell}\frac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!}\,\mathrm{Alt}(\beta \otimes \alpha)) = (-1)^{k\ell}\beta \wedge \alpha\,.
\end{aligned}$$

Viides yhtäsuuruus seuraa siitä, että oikea siirto permutaatiolla σ^k on ryhmän $S_{++\ell}$ bijektio itselleen □

Seuraus 7.18. *Jos $A \in T^{(0,k)}$ ja k on pariton, niin $A \wedge A = 0$.* □

Lemma 7.19. *Olkoot $S \in T^{(0,k)}(V)$ ja $T \in T^{(0,\ell)}(V)$. Tällöin*

$$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}\, S \otimes T) = \mathrm{Alt}(S \otimes T) = \mathrm{Alt}(S \otimes \mathrm{Alt}\, T)\,.$$

Todistus. Todistamme väitteen ensimmäisen yhtälön. Olkoon

$$G = \{\sigma \in S_{k+\ell} : \sigma(k+j) = k+j \text{ kaikilla } 1 \leqslant j \leqslant \ell\} < S_{k+\ell}\,.$$

Määritelmän ja Lemman 7.7 nojalla

$$\begin{aligned}
\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}\, S \otimes T) &= \frac{1}{(k+\ell)!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \mathrm{sign}(\sigma)\, \sigma \cdot (\mathrm{Alt}\, S \otimes T) \\
&= \frac{1}{(k+\ell)!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \mathrm{sign}(\sigma)\, \sigma \cdot \Big(\frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} \mathrm{sign}(\tau)\, \tau \cdot S \otimes T\Big) \\
&= \frac{1}{(k+\ell)!\, k!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \mathrm{sign}(\sigma)\, \sigma \cdot \Big(\sum_{\tau \in S_k} \mathrm{sign}(\tau)\, \tau \cdot (S \otimes T)\Big) \\
&= \frac{1}{(k+\ell)!\, k!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \sum_{\tau \in G} \mathrm{sign}(\sigma)\, \sigma \cdot \Big(\mathrm{sign}(\tau)\, \tau \cdot (S \otimes T)\Big) \\
&= \frac{1}{(k+\ell)!\, k!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \sum_{\tau \in G} \mathrm{sign}(\sigma\tau)\, \sigma\tau \cdot (S \otimes T) \\
&= \frac{1}{(k+\ell)!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \mathrm{sign}(\sigma)\, \sigma \cdot (S \otimes T) = \mathrm{Alt}(S \otimes T)\,,
\end{aligned}$$

Viimeisessä yhtäsuuruudessa käytämme sitä, että oikea siirto permutaatiolla $\tau \in G$ on ryhmän $S_{k+\ell}$ bijektio itselleen. Siis tarkasteltavassa kaksinkertaisessa summassa lasketaan $k! = \#G = \#S_k$ kertaa summa yli ryhmän $S_{k+\ell}$.

Väitteen jälkimmäinen yhtälö todistetaan samaan tapaan. □

Propositio 7.20. *Jos $\omega \in A^k(V)$, $\alpha \in A^\ell(V)$ ja $\beta \in A^m(V)$, niin*

$$(\omega \wedge \alpha) \wedge \beta = \frac{(k+\ell+m)!}{k!\, \ell!\, m!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \alpha \otimes \beta) = \omega \wedge (\alpha \wedge \beta)\,.$$

Todistus. Määritelmien ja Lemman 7.19 nojalla

$$\begin{aligned}
&(\omega \wedge \alpha) \wedge \beta = \frac{(k+\ell+m)!}{(k+\ell)!\, m!} \mathrm{Alt}((\omega \wedge \alpha) \otimes \beta) \\
&= \frac{(k+\ell+m)!}{(k+\ell)!\, m!} \mathrm{Alt}(\frac{(k+\ell)!}{k!\, \ell!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \alpha) \otimes \beta) \\
&= \frac{(k+\ell+m)!}{k!\, \ell!\, m!} \mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\omega \otimes \alpha) \otimes \beta) = \frac{(k+\ell+m)!}{k!\, \ell!\, m!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \alpha \otimes \beta)\,.
\end{aligned}$$

Yhtälö $\omega \wedge (\alpha \wedge \beta) = \mathrm{Alt}(\omega \otimes \alpha \otimes \beta)$ todistetaan samalla tavalla. □

Proposition 7.20 nojalla ulkoisen tulon merkintä $\omega \wedge \alpha \wedge \beta$ on yksiselitteinen ja voimme jättää sulut merkitsemättä tällaisissa lausekkeissa.

Seuraus 7.21. *Olkoot* $\omega^1, \dots \omega^k \in A^1(V)$. *Jos* $\omega^i = \omega^j$ *joillain indekseillä* $1 \leqslant i, j \leqslant k$, $i \neq j$, *niin* $\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k = 0$.

Todistus. Harjoitustehtävä 7.11 ☐

Seuraus 7.22. *Olkoon* V n*-ulotteinen vektoriavaruus. Kovektorit* $\omega^1, \dots, \omega^k \in V^*$ *ovat lineaarisesti riippumattomia, jos ja vain jos* $\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k \neq 0$.

Todistus. Harjoitustehtävä 7.12 ☐

Propositio 7.23. *Jos* $\omega^1, \dots, \omega^k \in T^{(0,1)}(V)$ *ja* $v_1, \dots, v_k \in V$, *niin*

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^k(v_1, v_2, \dots, v_k) = \det(\omega^i v_j))_{i,j=1}^k .$$

Todistus. Ulkoisen tulon ja determinantin määritelmistä saamme yhtälöketjun

$$\begin{aligned}
&\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^k\,(v_1, v_2, \dots, v_k) \\
&= k!\,\mathrm{Alt}(\omega^1 \otimes \omega^2 \otimes \cdots \otimes \omega^k)(v_1, v_2, \dots, v_k) \\
&= \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sign}(\sigma)\,(\omega^1 \otimes \omega^2 \otimes \cdots \otimes \omega^k)(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sign}(\sigma)\,\omega^1 v_{\sigma(1)}\,\omega^2 v_{\sigma(2)} \cdots \omega^k v_{\sigma(k)} = \det(\omega^i v_j))_{i,j=1}^k .
\end{aligned}$$ ☐

7.5 Alternoivien tensorien kanta

Propositio 7.24. *Olkoon* V n*-ulotteinen vektoriavaruus ja olkoon* $(\omega^1, \dots, \omega^n)$ *duaaliavaruuden* V^* *kanta. Tällöin* k*-kovektorien joukko*

$$\mathscr{A}_k = \left\{\omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_k} : 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n\right\}$$

muodostaa avaruuden $A_k(V)$ *kannan.*

Todistus. Proposition 7.4 todistuksessa näimme, että tensorit $\omega^{i_1} \otimes \omega^{i_2} \otimes \cdots \otimes \omega^{i_k}$ virittävät avaruuden $T^{(0,k)}(V)$. Proposition 7.14 nojalla Alt on lineaarikuvaus ja $A^k(V) = \mathrm{Alt}(A^k(V)) = \mathrm{Alt}(T^{(0,k)}(V))$, joten k-kovektorit

$$\mathrm{Alt}(\omega^{i_1} \otimes \omega^{i_2} \otimes \cdots \otimes \omega^{i_k}) = \frac{1}{k!}\,\omega^{i_1} \wedge \omega^{{\text{‘}}i_2} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_k} ,$$

$1 \leqslant i_j \leqslant n$ kaikilla $1 \leqslant j \leqslant k$ virittävät avaruuden $A_k(V)$.

Jos $\{i_1, \dots, i_k\} = \{j_1, \dots, j_k\}$, niin Proposition 7.17(2) nojalla

$$\omega^{i_1} \wedge \omega^{{\text{‘}}i_2} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_k} = \pm\omega^{j_1} \wedge \omega^{j_2} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_k}$$

ja $\omega^{i_1} \wedge \omega^{{\text{‘}}i_2} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_k} = 0$, jos $i_r = i_s$ joillain $1 \leqslant r < s \leqslant n$. Siis joukko $\mathscr{A}_k$ virittää avaruuden $A^k(V)$.

Olkoon $(v_1, \dots v_k)$ avaruuden V kanta, joka on duaalinen kannan $(\omega^1, \dots, \omega^n)$ kanssa. Oletetaan, että

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} a_{i_1 i_2 \cdots i_k} \omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_k} = 0 .$$

Olkoot $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n$. Tällöin Proposition 7.23 nojalla

$$\begin{aligned}
0 &= \Big(\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{n} a_{i_1 i_2 \cdots i_k} \omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_k} \Big)(v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_k}) \\
&= a_{j_1 j_2 \cdots j_k} \omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_k}(v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_k}) \\
&= a_{j_1 j_2 \cdots j_k} \det(\omega^{i_a} v_{j_b})_{a,b=1}^{k} = a_{j_1 j_2 \cdots j_k} \det(\delta^{i_a}_{j_b})_{a,b=1}^{k} = a_{j_1 j_2 \cdots j_k} \,.
\end{aligned}$$

Joukko $\mathscr{A}$ on lineaarisesti riippumaton, koska kaikki kertoimet summassa ovat nollia. □

Seuraus 7.25. *Jos V on n-ulotteinen vektoriavaruus, niin $A^k(V)$ on $\binom{n}{k}$-ulotteinen vektoriavaruus.* □

Seuraus 7.26. *Jos $\omega \in A^n(\mathbb{R}^n)$, niin $\omega = c \det$ jollain $c \in \mathbb{R}$.*

Todistus. Vektoriavaruus $A^n(\mathbb{R}^n)$ on 1-ulotteinen Seurauksen 7.25 nojalla, joten n-kovektori $\det \in A^n(\mathbb{R}^n) - \{0\}$ virittää sen. □

Käytämme seuraavaa tulosta luvussa 9 sileiden n-muotojen alkukuvien tarkastelussa, katso Lause 9.12.

Propositio 7.27. *Olkoon $(v_1, \ldots, v_n)$ vektoriavaruuden V kanta, olkoon $A = \big(a_i^j\big)$ reaalinen $n \times n$-matriisi ja olkoot $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j v_j$, kaikilla $1 \leqslant i \leqslant n$. Olkoon $\omega \in A^n(\mathbb{R}^n)$. Tällöin*

$$\omega(w_1, \ldots, w_n) = \det A \, \omega(v_1, \ldots, v_n) \,.$$

Todistus. Kuvaus $\eta \colon (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$,

$$\eta(u_1, \ldots, u_n) = \omega\Big(\sum_{j=1}^{n} u_1^j v_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} u_n^j v_j \Big) \,.$$

on alternoiva n-tensori. Seurauksen 7.26 nojalla $\eta = c \det$ jollain $c \in \mathbb{R}$. Vakio c voidaan määrittää laskemalla muodon ω arvo sopivasti valituilla vektoreilla. Huomaamme, että

$$\omega(v_1, \ldots, v_n) = \eta(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = c \det(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = c \,, \tag{7.2}$$

väite seuraa valitsemalla $u_i = (a_i^1, \ldots, a_i^n)$ jokaisella $1 \leqslant i \leqslant n$. Yhtälön (7.2) nojalla

$$\begin{aligned}
\omega(w_1, \ldots, w_n) &= \omega\Big(\sum_{j=1}^{n} a_1^j v_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_n^j v_j \Big) = \eta(a_1, \ldots, a_n) \\
&= c \det A = \omega(v_1, \ldots, v_n) \det A \,.
\end{aligned}$$

□

Emme tarvitse seuraavaa tulosta tällä kurssilla.

Lause 7.28. *Jos V on n-ulotteinen vektoriavaruus, niin $\dim S^k(V) = \binom{n+k-1}{k}$.*

Todistus. Todistuksessa tarvittavat kombinatoriset ainekset esitetään esimerkiksi lähteessä [Sta, luku 1.2]. □

Esimerkki 7.29. Proposition 7.4, Seurauksen 7.25 ja Lauseen 7.28 nojalla

$$\dim T^{(0,3)}(\mathbb{E}^3) = 3^3 = 27 > 21 = \mathrm{Sym}^3(\mathbb{E}^3) + \dim \mathrm{Alt}^3(\mathbb{E}^3) \,.$$

Siis on kovariantteja 3-tensoreita, jotka eivät ole symmetristen ja alternoivien tensorien summia. Harjoitustehtävässä 7.9 osoitetaan, että $\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^3 \in T^{(0,3)}(\mathbb{E}^3)$ on esimerkki tällaisesta tensorista.

7.6 Grassmannin algebra $A(V)$

Seuraus 7.30. *Olkoon V n-ulotteinen vektoriavaruus. Jos $k > n$, niin $A^k(V) = \{0\}$.* $\square$

Äärellisulotteisen vektoriavaruuden V *ulkoinen algebra* eli *Grassmannin algebra* on

$$A(V) = \Lambda(V^*) = \bigoplus_{k=0}^{\dim V} A^k(V)\,,$$

jossa kertolasku on ulkoinen tulo $\wedge$.
Jos $a \in A^k(V) \subset A(V)$, niin muodon a *aste* on k.

Vektoriavaruuksien *suora summa* $\bigoplus_{k=0}^n A^k(V)$ on vektoriavaruus $A^0(V) \times \cdots \times A^n(V)$. Merkintää käytetään, koska algebran $A(V)$ alkiot on tapana kirjoittaa summana muodoista, joiden asteet eivät välttämättä ole samoja, esimerkiksi $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \in A(\mathbb{R}^3)$.

Seuraus 7.31. *Olkoon V ja olkoon $(\omega^1, \dots, \omega^n)$ duaaliavaruuden V^* kanta. Tällöin k-kovektorien joukko $\bigcup_{k=0}^n \mathscr{A}_k$ muodostaa avaruuden $A(V)$ kannan.* $\square$

Seuraus 7.32. *(1) Ulkoinen tulo on Grassmannin algebran assosiatiivinen laskutoimitus, joka on distributiivinen yhteenlaskun suhteen.*
(2) $A^k(V) \wedge A^\ell(V) \subset A^{k+\ell}(V)$, missä $A^{k+\ell}(V) = \{0\} \subset A(V)$, jos $k + \ell > \dim V$.[5]

Todistus. Seuraa Propositioista 7.17 ja 7.20. $\square$

Lemma 7.33. *Jos $\dim V = n$, niin $\dim A(V) = 2^n$.*

Todistus. Seurauksen 7.25 ja tunnetun binomikertoimien yhteenlaskutuloksen nojalla

$$\dim A(V) = \sum_{k=0}^n \dim A^k(V) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n\,.$$ $\square$

Harjoitustehtäviä

7.1. Todista Lemma 7.2.

7.2. Esitä Esimerkin 7.1(3) evaluaatiotensori $E \in T^{(1,1)}(\mathbb{R}^n)$,

$$E(\omega, v) = \omega v\,,$$

vektoreiden ja lineaaristen 1-muotojen tensoritulon avulla.

7.3. Osoita, että $T^{(r,s)}(V)$ on vektoriavaruus.

7.4. Osoita, että tensorit $\varepsilon^i \otimes \varepsilon^j$, $1 \leqslant i, j \leqslant 3$ virittävät avaruuden $T^{(0,2)}(\mathbb{R}^3)$. Käy läpi Proposition 7.4 laskut yksityiskohtaisesti.

7.5. Todista Lemma 7.6.

[5] Algebra $A(V)$ on *astealgebra*, englanniksi *graded algebra*.

7.6. Olkoon $A \in T^{(0,k)}(V)$. Osoita, että
(1) A on symmetrinen, jos ja vain jos $\tau \cdot A = A$ jokaiselle vaihdolle $\tau \in S_k$ ja
(2) A on alternoiva, jos ja vain jos $\tau \cdot A = -A$ jokaiselle vaihdolle $\tau \in S_k$.

7.7. Todista Proposition 7.14 kohdat (1), (3) ja (4).

7.8. Todista Seuraus 7.15.

7.9. Osoita, että tensori $\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^3 \in T^{(0,3)}(\mathbb{E}^3)$ ei ole symmetrisen ja antisymmetrisen tensorin summa.

7.10. Anna esimerkki 2-kovektorista $\omega \in A(\mathbb{R}^4)$, jolle $\omega \wedge \omega \neq 0$.

7.11. Todista Seuraus 7.21.

7.12. Todista Seuraus 7.22.

7.13. Osoita, että Esimerkissä 7.10 määritelty determinantti det on alternoiva $(0,k)$-tensori. Osoita, että

$$\det(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) v_1^{\sigma(1)} v_2^{\sigma(2)} \cdots v_n^{\sigma(n)} .$$

Luku 8

Tensorikimput ja tensorikentät

Tässä luvussa tarkastelemme tensorikenttiä, jotka yleistävät vektorikentän ja 1-muodon käsitteet sileän moniston M tangenttiavaruuksien T_pM, $p \in M$, multilineaarikuvauksien tilanteeseen. Osoitamme myös, että tensorikenttien avaruus samastuu luonnollisella tavalla vektorikenttien $\mathfrak{F}(M)$-modulin $\mathfrak{X}(M)$ tensorien $\mathfrak{F}(M)$-modulin kanssa.

8.1 Tensorikimput ja tensorikentät

Seuraava määritelmä yleistää tangentti- ja kotangenttikimpun määritelmät.

Olkoon M sileä monisto. Moniston M (r,s)*-tensorikimppu* on[a]

$$T^{(r,s)}M = \bigsqcup_{p \in M} T^{(r,s)}(T_pM)$$

varustettuna sileän moniston rakenteella, joka määritellään kuten tangentti- ja kotangenttikimpuille käyttämällä jokaisessa moniston M sileässä kartassa (U,ϕ) Proposition 7.4 antamaa avaruuden $T^{(r,s)}(T_pM)$ kantaa, kun $E_i = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ ja $\varepsilon^i = dx^i_p$ jokaiselle $p \in U$.

Tensorikimpun $T^{(r,s)}M$ *(kantapiste)projektio* on kuvaus $\pi = \pi_M \colon T^{(r,s)}M \to M$, $\pi(A_p) = p$ kaikille $A_p \in T^{(r,s)}(T_pM)$.

[a] Lee [Lee2] käyttää tensorikimpulle merkintää $T^{(r,s)}(TM)$ ja erilaisia merkintöjä ko- ja kontravarianttien tensorien kimpuille.

Propositio 8.1. *Sileän moniston tensorikimput ovat sileitä monistoja. Kantapisteprojektiot ovat sileitä kuvauksia.*

Todistus. Todistetaan kuten Propositio 4.3. □

Esimerkki 8.2. $T^{(1,0)}M = TM$ ja $T^{(0,1)}M = T^*M$.

Olkoon M sileä monisto. Kuvaus $A\colon M \to T^{(r,s)}M$, jolle $\pi \circ A = \mathrm{id}_M$, on *tensorikenttä* tai *tensorikimpun $T^{(r,s)}M$ (globaali) leikkaus.*

Olkoon
$$\Gamma\big(T^{(r,s)}M\big) = \{A\colon M \to T^{(r,s)}M : A \text{ on sileä}\}\,.$$

Käytämme merkintää
$$A_p = A(p)\,.$$

Olkoon M sileä monisto. Tensorikenttien $A, B \in \Gamma\big(T^{(r,s)}M\big)$ *summa* on $A + B \in T^{(r,s)}M$, jolle
$$(A + B)_p = A_p + B_p\,.$$
Jos $f \in \mathfrak{F}(M)$, niin $fA \in \Gamma\big(T^{(r,s)}M\big)$ on tensori
$$(fA)_p = f(p)A_p\,.$$
Tensorikenttien $A \in \Gamma\big(T^{(r,s)}M\big)$ ja $B \in \Gamma\big(T^{(t,u)}M\big)$ *tensoritulo* on $A \otimes B \in T^{(r+t,s+u)}M$, jolle
$$(A \otimes B)_p = A_p \otimes B_p\,.$$

Proposition 7.4 nojalla jokainen tensorikenttä $A \in \Gamma(T^{(r,s)}M)$ voidaan kirjoittaa lokaaleissa koordinaateissa muodossa
$$A_p = \sum_{\substack{j_1,\dots,j_r,\\ \ell_1,\dots,\ell_s=1}}^{n} A^{j_1,\dots,j_r}_{\ell_1,\dots,\ell_s}(p)\, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\Big|_p \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_r}}\Big|_p \otimes dx_p^{\ell_1} \otimes \cdots \otimes dx_p^{\ell_s}\,. \tag{8.1}$$

Propositio 8.3. *Olkoon M sileä monisto ja olkoon (U, ϕ) sileä kartta monistolla M. Olkoon $A\colon M \to T^{(r,s)}M$ kuvaus, jolle $\pi \circ \omega = \mathrm{id}_M$. Tällöin A on sileä tensorikenttä joukossa U, jos ja vain jos sen kerroinfunktiot esityksessä* (8.1) *ovat sileitä.*

Todistus. Todistetaan kuten Propositio 4.8. □

Olkoon M sileä monisto ja olkoon $p \in M$. Olkoot (U, x) ja (V, y) sileitä karttoja pisteessä p. Luvuissa 3.3 ja 6.7 osoitimme, että kartan (U, x) koordinaattivektorit ja -muodot saadaan kartan (V, y) koordinaattivektoreista ja -muodoista lausekkeilla
$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} \tag{8.2}$$
ja
$$dx^j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial y^i}\, dy^i\,. \tag{8.3}$$
Jos
$$\begin{aligned} A_p &= \sum_{\substack{j_1,\dots,j_r,\\ \ell_1,\dots,\ell_s=1}}^{n} A^{j_1,\dots,j_r}_{\ell_1,\dots,\ell_s}(p)\, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\Big|_p \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_r}}\Big|_p \otimes dx_p^{\ell_1} \otimes \cdots \otimes dx_p^{\ell_s} \\ &= \sum_{\substack{j_1,\dots,j_r,\\ \ell_1,\dots,\ell_s=1}}^{n} \widetilde{A}^{j_1,\dots,j_r}_{\ell_1,\dots,\ell_s}(p)\, \frac{\partial}{\partial y^{j_1}}\Big|_p \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{j_r}}\Big|_p \otimes dy_p^{\ell_1} \otimes \cdots \otimes dy_p^{\ell_s}\,, \end{aligned}$$

niin käyttämällä yhtälöitä (8.2) ja (8.3) ja tensoritulon multilineaarisuutta saadaan

$$\widetilde{A}^{a_1,\dots,a_r}_{b_1,\dots,b_s} = \sum A^{j_1,\dots,j_r}_{\ell_1,\dots,\ell_s} \frac{\partial y^{a_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial y^{a_r}}{\partial x^{j_r}} \frac{\partial x^{\ell_1}}{\partial y^{b_1}} \cdots \frac{\partial x^{\ell_s}}{\partial y^{b_s}} \tag{8.4}$$

Klassisessa differentiaaligeometriassa ja Riemannin geometriassa (r,s)-tensori on *jokaiseen lokaaliin koordinaattiin liittyvä* n^{r+s} *sileän funktion indeksoitu kokoelma, joka muuntuu kartanvaihdossa yhtälön* (8.4) *mukaisesti.*

Tensorikentällä $A \in \Gamma\big(T^{(r,s)}M\big)$ on r *kontravarianttia* ja s *kovarianttia* muuttujaa.
Jos A on $(0,s)$-tensorikenttä, niin A on *kovariantti* s-tensorikenttä.
Jos A on $(r,0)$-tensorikenttä, niin A on *kontravariantti* r-tensorikenttä.
Jos A on (r,s)-tensorikenttä ja $r \neq 0 \neq s$, niin A on *sekatensorikenttä.*

Esimerkki 8.4. (1) Sileät vektorikentät ovat kontravariantteja 1-tensorikenttiä ja sileät 1-muodot ovat kovariantteja 1-tensorikenttiä:

$$\mathfrak{X}(M) = \Gamma\big(T^{(1,0)}M\big) \quad \text{ja} \quad \mathfrak{X}^*(M) = \Gamma\big(T^{(0,1)}M\big)\,.$$

(2) Lauseke $\sum_{k=1}^n dx^k \otimes dx^k$ on kovariantti 2-tensori sileällä monistolla $\mathbb{E}^n$.

8.2 Kovariantin tensorikentän alkukuva

Olkoot M_1 ja M_2 sileitä monistoja ja olkoon $A \in \Gamma\big(T^{(0,m)}(M_2)\big)$. Olkoon $F\colon M_1 \to M_2$ sileä kuvaus. Kovariantin tensorikentän $A \in$ *alkukuva*[a] on kuvaus $F^*A\colon M_1 \to T^{(0,k)}(M_1)$, jolle pätee

$$(F^*A)_p(v_1,\dots,v_k) = A(dF_p v_1,\dots,dF_p v_k)$$

kaikille $v_1,\dots,v_k \in T_pM_1$ kaikille $p \in M_1$.

[a] Englanniksi *pullback.*

Kovariantin tensorin alkukuvan perusominaisuudet todistetaan samaan tapaan kuin 1-muotojen alkukuvalle tehtiin luvussa 6.5.

Propositio 8.5. *Olkoot M ja N sileitä monistoja ja olkoon $F\colon M \to N$ sileä kuvaus. Tällöin*
(1) $F^*(A+B) = F^*(A) + F^*(B)$ *kaikilla* $A, B \in \Gamma(T^{(0,k)}(N))$.
(2) $F^*(A \otimes B) = F^*(A) \otimes F^*(B)$ *kaikilla* $A \in \Gamma(T^{(0,k)}(N))$ *ja* $B \in \Gamma(T^{(0,m)}(N))$.
(3) $F^*(f\,A) = (f \circ F)\,F^*(A)$ *kaikilla* $A \in \Gamma(T^{(0,k)}(N))$ *ja* $f \in \mathfrak{F}(N)$.

Todistus. Kohdat (1) ja (2) todistetaan Harjoitustehtävässä 8.1.
(3) Olkoon $p \in M$ ja olkoot $v_1,\dots,v_k \in T_pM$. Alkukuvan määritelmän nojalla ja koska $dF_pv_1,\dots,dF_pv_k \in T_{F(p)}N$,

$$\begin{aligned}(F^*(fB))_p(v_1,\dots,v_k) &= (fB)_{F(p)}(dF_pv_1,\dots,dF_pv_k)\\ &= f(F(p))\,B_{F(p)}(dF_pv_1,\dots,dF_pv_k)\\ &= (f\circ F)(p)\,F^*B(v_1,\dots,v_k)\,.\end{aligned}$$ □

Propositio 8.6. *Olkoon M sileä monisto.*
(1) Jos $A \in \Gamma\big(T^{(r,s)}M\big)$ ja $B \in \Gamma\big(T^{(t,u)}M\big)$, niin $A \otimes B \in \Gamma\big(T^{(r+t,s+u)}M\big)$.
(2) Olkoon $F\colon M \to N$ sileä kuvaus ja olkoon $A \in \Gamma\big(T^{(0,s)}(N)\big)$. Tällöin $F^*A \in \Gamma\big(T^{(0,s)}(M)\big)$

Todistus. (1) Harjoitustehtävä 8.2.
(2) Olkoon (U, ϕ) sileä kartta monistolla M ja olkoon (V, ψ) sileä kartta monistolla N siten, että $F(U) \subset V$. Olkoot $(x^1, \dots, x^m)$ ja $(y^1, \dots, y^n)$ kuvausten ϕ ja ψ komponentit. Proposition 8.3 nojalla on sileät funktiot $A_{\ell_1,\dots,\ell_s} \in \mathfrak{F}(V)$, joille

$$A = \sum_{\ell_1,\dots,\ell_s=1}^{n} A_{\ell_1,\dots,\ell_s}\, dy^{\ell_1} \otimes \cdots \otimes dy^{\ell_s}\,.$$

Joukossa U pätee Proposition 8.5 nojalla

$$\begin{aligned} F^*A &= F^*\Big(\sum_{\ell_1,\dots,\ell_s=1}^{n} A_{\ell_1,\dots,\ell_s}\, dy^{\ell_1} \otimes \cdots \otimes dy^{\ell_s}\Big) \\ &= \sum_{\ell_1,\dots,\ell_s=1}^{n} A_{\ell_1,\dots,\ell_s} \circ F\; F^*dy^{\ell_1} \otimes \cdots \otimes F^*dy^{\ell_s} \\ &= \sum_{\ell_1,\dots,\ell_s=1}^{n} A_{\ell_1,\dots,\ell_s} \circ F\; d(y^{\ell_1} \circ F) \otimes \cdots \otimes d(y^{\ell_s} \circ F)\,. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Funktiot $A_{\ell_1,\dots,\ell_s} \circ F$ ja $y^k \circ F$ ovat sileitä, joten väite seuraa Seurauksen 6.16 ja Proposition 8.3 nojalla. □

Yhtälössä (8.5) esiintyvät differentiaalit voi tarvittaessa vielä avata Lemman 6.15 avulla kuten 1-muodoille tehtiin yhtälössä (6.9).

Propositio 8.7. *Olkoot $F_1\colon M_1 \to M_2$ ja $F_2\colon M_2 \to M_3$ sileitä kuvauksia ja olkoon B sileä kovariantti tensorikenttä monistolla M_3. Tällöin*

$$(F_2 \circ F_1)^*B = F_1^*(F_2^*B)\,.$$

Todistus. Harjoitustehtävä 8.13 □

Olkoon $S \subset M$ sileän moniston M upotettu alimonisto ja olkoon $i\colon S \to M$ inkluusiokuvaus. Kovariantin tensorin $A \in \Gamma(T^{(0,k)}(M))$ *rajoittuma* alimonistolle S on i^*A,

$$(i^*A)_p(v_1, \dots, v_k) = A_p(di(v_1), \dots, di(v_k)) = A_p(v_1, \dots, v_k)$$

kaikille $v_1, \dots, v_k \in T_pS$ kaikilla $p \in S$.

8.3 Riemannin metriikka

Olkoon M sileä monisto. Symmetrinen kovariantti 2-tensorikenttä $g \in \Gamma(T^{(0,2)}M)$ on *positiividefiniitti*, jos g_p on positiividefiniitti jokaisella $p \in M$.

Symmetrinen positiividefiniitti kovariantti 2-tensorikenttä g monistolla M on *Riemannin metriikka* eli *metrinen tensori*. Pari (M, g) on *Riemannin monisto*.

Riemannin metriikka kirjoitetaan lokaaleissa koordinaateissa usein ilman tensoritulon merkkiä

$$g = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i dx^j\,.$$

Muodollisesti

$$dx^i dx^j = \mathrm{Sym}(dx^i \otimes dx^j) = \frac{1}{2}(dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i)$$

on $(0,1)$-tensorikenttien dx^i ja dx^j *symmetrinen tulo*.[1]

Esimerkki 8.8. Euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^n$ luonnollinen Riemannin metriikka on kanonisissa koordinaateissa

$$g_{\mathbb{E}} = \sum_{I=1}^{n} dx^i \otimes dx^i = \sum_{I=1}^{n} (dx^i)^2\,.$$

Näissä koordinaateissa $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$.

(2) Riemannin metriikka

$$g_{\mathbb{H}} = \frac{1}{(x^n)^2} \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2$$

ylemmässä puoliavaruudessa $\{x \in \mathbb{R}^n : x^n > 0\}$ määrää *hyperbolisen avaruuden*

$$\mathbb{H}^n = \big(\{x \in \mathbb{R}^n : x^n > 0\}, g_{\mathbb{H}}\big),$$

tai tarkemmin *hyperbolisen avaruuden puoliavaruusmallin*.

(3) Olkoon (M,g) Riemannin monisto ja olkoon $f \in \mathfrak{F}(M)$, $f > 0$. Tällöin (M, fg) on Riemannin monisto, joka on saatu Riemannin monistosta (M,g) *metriikan konformisella muunnoksella*. Kohdan (2) hyperbolinen metriikka saadaan kertomalla euklidinen Riemannin metriikka funktiolla $f \in \mathfrak{F}\big(\{x \in \mathbb{R}^n : x^n > 0\}\big)$, $f(x) = (x^n)^{-2}$.

Propositio 8.9. *Olkoon S sileä monisto ja olkoon (M,g) Riemannin monisto. Olkoon $F\colon S \to M$ immersio. Tällöin F^*g on Riemannin metriikka.*

Todistus. Harjoitustehtävä 8.3. □

Esimerkki 8.10. Propositiossa 5.9 osoitimme, että upotetun alimoniston inkluusiokuvaus on upotus, erityisesti siis se on immersio. Esimerkiksi Euklidisen avaruuden $\mathbb{E}^{n+1}$ Riemannin metriikan rajoittuma monistolle $\mathbb{S}^n$ määrää Riemannin metriikan sileällä monistolla $\mathbb{S}^n$. Tämä on pallonpinnan $\mathbb{S}^n$ *tavallinen Riemannin metriikka* tai *pyöreä Riemannin metriikka.*

Lause 8.11. *Jokaisella sileällä monistolla on Riemannin metriikka.*

Todistus. Whitneyn upotuslauseen[2] nojalla jokainen sileä monisto voidaan upottaa sileäksi alimonistoksi euklidiseen avaruuteen. Väite seuraa Whitneyn upotuslauseesta ja Propositiosta 8.9. □

[1] Symmetrinen tulo on luvussa 7.4 määritellyn ulkoisen tulon vastine symmetristen tensorien ja tensorikenttien tilanteessa.

[2] Lause 5.16

Esimerkki 8.12. Euklidisen tason Riemannin metriikan lauseke napakoordinaateissa saadaan Esimerkin 3.11, yhtälön (8.5) ja Lemman 6.15 avulla

$$\begin{aligned} g &= dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 = d(r\cos\theta) \otimes d(r\cos\theta) + d(r\sin\theta) \otimes d(r\sin\theta) \\ &= (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) \otimes (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) + (\sin\theta dr + r\sin\theta d\theta) \otimes (\sin\theta dr + r\sin\theta d\theta) \\ &= dr \otimes dr + r^2\, d\theta \otimes d\theta = dr^2 + r^2 d\theta^2\,. \end{aligned}$$

8.4 Modulin $\mathfrak{X}(M)$ tensorit

Tensorit voidaan määritellä myös $\mathfrak{F}(M)$-modulille $\mathfrak{X}(M)$ laajentamalla määritelmä rengaskertoimisten modulien lineaarialgebran käsitteillä samaan tapaan kuin vektorikentille tehtiin Luvussa 4.4.

Propositio 8.13. *Jos M on sileä monisto, niin $\mathfrak{X}^*(M)$ on reaalinen vektoriavaruus ja $\mathfrak{F}(M)$-moduli.*

Todistus. Harjoitustehtävä 8.7. □

Olkoon K kommutativinen rentas ja olkoot M_1 ja M_2 K-moduleja. Kuvaus $L\colon M_1 \to M_2$ on *K-lineaarikuvaus*, jos

$$L(am + bn)aL(m) + bL(n)$$

kaikille $a, b \in K$ ja kaikille $m, n \in M_1$.

Lemman 6.13 mukaan jokainen sileä 1-muoto $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ määrää $\mathfrak{F}(M)$-*lineaarisen kuvauksen* $X \mapsto \omega X$ modulilta $\mathfrak{X}(M)$ renkaaseen $\mathfrak{F}(M)$.

Olkoot V ja W R-moduleja. Kuvaus $L\colon V \to W$ on *R–lineaarikuvaus*, jos

$$L(ru + sv) = rL(u) + sL(v)$$

kaikille $r, s \in R$ ja $u, v \in V$.

Olkoot $V_1, \dots, V_n$ ja W R-moduleja. Kuvaus $A\colon \prod V_i \to W$ on *R-multilineaarinen*, jos kuvaus

$$v \mapsto A(v_1, v_2, \dots, v_{s-1}, v, v_{s+1}, \dots, v_n)$$

on lineaarinen kaikille $1 \leqslant s \leqslant n$ ja kaikille $v_i \in V_i$, $i \neq s$.

R-modulin V *duaali* V^* on R-lineaarikuvausten $L\colon V \to R$ R-moduli.

Jos $A\colon (V^*)^r \times V^s \to R$ on R-multilineaarikuvaus, niin se on (r, s)–*tensori* modulilla V.

Proposition 4.13 nojalla $\mathfrak{X}(M)$ on $\mathfrak{F}(M)$-moduli.

Propositio 8.14. *Olkoon M sileä monisto. Vektorikenttien modulin $\mathfrak{X}(M)$ (r, s)-tensorit muodostavat $\mathfrak{F}(M)$-modulin $\mathfrak{T}^{(r,s)}(M)$.*

Todistus. Harjoitustehtävä 8.8. □

Kun osoitetaan kuvaus $A\colon (\mathfrak{X}^*(M))^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{F}(M)$ modulin $\mathfrak{X}(M)$ tensoriksi, tulee näyttää, että A on $\mathfrak{F}(M)$-lineaarinen jokaisessa muuttujassaan. Yleensä käyttäytyminen yhteenlaskun suhteen on selvää, joten tarkastettavaksi jää vain *voidaanko funktiot siirtää oletetusta tensorista ulos* eli päteekö esimerkiksi kuvaukselle $B\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$

$$B(f_1 X_1, f_2 X_2) = f_1 f_2 B(X_1, X_2)$$

kaikille $f_1, f_2 \in \mathfrak{F}(M)$ ja kaikille $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

Esimerkki 8.15. (1) Lemman 6.13 nojalla sileät 1-muodot ovat modulin $\mathfrak{X}(M)$ kovariantteja 1-tensoreita. Duaalisuudesta seuraa, että sileä vektorikenttä määrää kontravariantin 1-tensorin.
(2) Evaluaatiokuvaus $E\colon \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$, joka määritellään asettamalla

$$E(\omega, X) = \omega(X)$$

on vektorikenttien modulin $(1,1)$-tensori, sillä kaikille $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ ja $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ pätee Lemman 6.13 nojalla

$$E(f\omega, gX) = f\omega(gX) = fg\,\omega X$$

(3) Olkoon $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$. Kuvaus $B\colon \mathfrak{X}(M)^2 \to \mathfrak{F}(M)$, joka määritellään asettamalla $B(V, W) = V\omega(W)$ ei ole modulin $\mathfrak{X}(M)$ tensori. Tarkastellaan jälkimmäistä muuttujaa. Olkoon $f \in \mathfrak{F}(M)$. Tällöin muodon ω $\mathfrak{F}(M)$-lineaarisuuden ja Leibnitzin säännön nojalla

$$X\,\omega(fY) = X\,(f\omega Y) = (Xf)\omega Y + fX\,\omega Y\,.$$

Funktio $(Xf)\,\omega Y$ ei kuitenkaan yleensä ole nollafunktio, joten B ei ole tensori.

8.5 Modulin $\mathfrak{X}(M)$ tensorin arvo pisteessä

Tässä luvussa osoitamme, että modulin $\mathfrak{X}(M)$ tensorit vastaavat luonnollisella tavalla moniston M tensorikenttiä.

Lemma 8.16. *Olkoon $A \in \mathfrak{T}^{(r,s)}(M)$. Jos p on 1-muodon θ^i tai vektorikentän X_j nollakohta jollain $1 \leqslant i \leqslant r$ tai $1 \leqslant j \leqslant s$, niin $A(\theta^1, \theta^2, \dots \theta^r, X_1, X_2, \dots, X_s)(p) = 0$.*

Todistus. Tarkastellaan tilannetta, jossa A on $(1,1)$–tensori, yleisessä tapauksessa ei ole mitään oleellisesti erilaista.[3]

Olkoon $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ ja olkoon $X \in \mathfrak{X}(M)$. Olkoon $p \in M$ ja olkoon $(U, x) \ni p$ lokaali koordinaatti. Yhtälön (4.4) nojalla on funktiot $X_i \in \mathfrak{F}(U)$, joille $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ympäristössä U. Olkoon $f \in \mathfrak{F}(M)$ sileä töyssyfunktio pisteessä p. Tällöin saadaan luonnollisella tavalla määriteltyä $fX^i \in \mathfrak{F}(M)$ ja $f\frac{\partial}{\partial x^1} \in \mathfrak{X}(M)$[4]. Käyttämällä tensorin A $\mathfrak{F}(M)$-lineaarisuutta muuttujan X suhteen saadaan

$$f^2 A(\theta, X) = A(\theta, f^2 X) = A\Big(\theta, \sum_i fX^i f\frac{\partial}{\partial x^1}\Big) = \sum_i fX^i A\Big(\theta, f\frac{\partial}{\partial x^1}\Big)\,.$$

Jos $X^i(p) = 0$ kaikilla i, niin yhtälössä oikealla oleva summa on 0, joten $A(\theta, X)(p) = 0$. Tapaus, jossa p on 1-muodon nollakohta käsitellään samaan tapaan. $\square$

[3] Katso yleisen tapauksen todistus esimerkiksi lähteestä [Lee2, Lemma 12.24].

[4] Töyssyfunktio f otetaan tässäkin käyttöön, jotta koordinaattien avulla saatu vektorikentän lauseke laajenee koko monistolle.

Propositio 8.17. *Olkoon M sileä monisto ja olkoon $p \in M$. Olkoon $A \in \mathfrak{T}^{(r,s)}(M)$. Olkoot θ^i, ω^i, $1 \leqslant i \leqslant r$, 1-muotoja ja olkoot X_j, Y_j, $1 \leqslant j \leqslant s$, vektorikenttiä siten, että $\theta^i|_p = \omega^i|_p$ ja $X_j|_p = Y_j|_p$ kaikilla $1 \leqslant i \leqslant r$ ja $1 \leqslant j \leqslant s$. Tällöin*

$$A(\theta^1, \theta^2, \dots \theta^r, X_1, X_2, \dots, X_s) = A(\omega^1, \omega^2, \dots \omega^r, X_1, X_2, \dots, X_s) .$$

Todistus. Kun A on $(1,1)$–tensori, saadaan multilineaarisuuden ja Lemman 8.16 nojalla

$$A(\theta, X)(p) - A(\omega, Y)(p) = A(\theta - \omega, X)(p) + A(\omega, X - Y)(p) = 0 + 0 = 0 .$$

Yleinen tapaus todistetaan samaan tapaan. □

Proposition 8.17 nojalla jokainen modulin $\mathfrak{X}(M)$ tensori $A \in \mathfrak{T}^{(r,s)}(M)$ määrää kuvauksen $A_p \colon (T_pM)^r \times (T_p^*M)^s \to \mathbb{R}$ asettamalla jokaiselle $X_{1,p}, \dots, X_{r,p} \in T_pM$ ja $\omega_p^1, \dots, \omega_p^s \in T_p^*M$

$$A_p(X_{1,p}, \dots, X_{r,p}, \omega_p^1, \dots, \omega_p^s) = A(X_1, \dots, X_r, \omega^1, \dots, \omega^s) ,$$

missä $X_k \in \mathfrak{X}(M)$ ja $\omega^j \in \mathfrak{X}^*(M)$ siten, että $X_k(p) = X_{k,p}$ ja $\omega^j(p) = \omega_p^j$ kaikilla $1 \leqslant k \leqslant r$ ja $1 \leqslant j \leqslant s$. On helppo tarkastaa, että $A_p \in T^{(r,s)}(T_pM)$. Tensori $A_p \in T^{(r,s)}(T_pM)$ on tensorin $A \in \mathfrak{T}^{(r,s)}(M)$ *arvo pisteessä p*.

Kuvaus $p \mapsto A_p$ määrää tensorikentän. Tämän havainnon avulla saadaan tulos, joka osoittaa, että modulien avulla määritelty tensorien käsite on todellakin sama kuin tensorikimpun leikkausten avulla annettu määritelmä.

Seuraus 8.18. *Jokainen tensori $A \in \mathfrak{T}^{(r,s)}(M)$ määrää kanonisesti yksikäsitteisen sileän tensorikentän $A \in \Gamma(T^{(r,s)}M)$. Jokainen sileä tensorikenttä $A \in \Gamma(T^{(r,s)}M)$ määrää kanonisesti yksikäsitteisen tensorin $A \in \mathfrak{T}^{(r,s)}M$.*

Todistus. Harjoitustehtävä 8.12. □

Seurauksen 8.18 nojalla sileän moniston tensorikentät ja $\mathfrak{F}(M)$-modulin $\mathfrak{X}(M)$ tensorit samastetaan jatkossa ja merkinnällä $\mathfrak{T}^{(r,s)}(M)$ voidaan viitata kumpaan tahansa.

Propositio 8.19. *(1) $\mathfrak{X}^*(M) = \mathfrak{T}^{(0,1)}(M) = \mathfrak{X}(M)^*$.*
(2) $\mathfrak{X}(M) = \mathfrak{T}^{(1,0)}(M)$. □

8.6 Yleistetyt tensorit

Jos $A \colon \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{X}(M)$ on $\mathfrak{F}(M)$-multilineaarikuvaus, niin sen avulla muodostettu kuvaus $\bar{A} \colon \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{F}(M)$,

$$\bar{A}(\theta, X_1, X_2, \dots, X_s) = \theta A(X_1, X_2, \dots, X_s)$$

on $(1,s)$-tensorikenttä. Tämän yhteyden perusteella kuvausta A voidaan kutsua *yleistetyksi tensorikentäksi.*

Esimerkki 8.20. Kaikki tällä kurssilla tarkasteltavat vektorikenttien keskeiset operaatiot eivät määrää tensorikenttiä edes tässä yleistetyssä mielessä. Tangenttivektoreiden $X_p, Y_p \in T_pM$ *Lien tulo* määritellään asettamalla

$$[X_p, Y_p]h = X_pY_ph - Y_pX_ph$$

kaikille $h \in \mathfrak{F}(M)$. Se määrää kuvauksen $[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, joka ei ole tensorikenttä yleistetyssä mielessä: Jos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ja $g \in \mathfrak{F}(M)$, niin

$$[X, gY] = g[X, Y] + (Xg)Y,$$

joten kuvaus ei ole $\mathfrak{F}(M)$-bilineaarinen. [5]

Harjoitustehtäviä

8.1. Todista Proposition 8.5 kohdat (1) ja (2).

8.2. Todista Proposition 8.6 kohta (1).

8.3. Todista Propositio 8.9.

8.4. Olkoon g sileän moniston $\mathbb{S}^2$ tavallinen Riemannin metriikka, jonka euklidisen avaruuden Riemannin metriikka määrää alimonistolle $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{E}^3$. Määritä $(\mathscr{S}^{-1})^*g$.

8.5. Määritä Riemannin moniston $\mathbb{S}^2$ tavallisen Riemannin metriikan lauseke pallokoordinaateissa.[6]

8.6. Kuvaus $F\colon B^n(0,1) \to \mathbb{H}^n$,[7]

$$F(x) = -\mathbf{e}_n + 2\frac{x + \mathbf{e}_n}{\|x + \mathbf{e}_n\|^2}$$

on diffeomorfismi.[8] Määritä $F^*g_{\mathbb{H}}$. Halutessasi voit rajoittua tapaukseen $n = 2$.

8.7. Todista Propositio 8.13.

8.8. Todista Propositio 8.14.

8.9. Todista Proposition 8.17 väite $(1,2)$-tensoreille.

8.10. 1-muodon $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ *ulkoinen derivaatta* $d\theta$ määritellään asettamalla

$$d\theta(X, Y) = X\theta Y - Y\theta X - \theta[X, Y]$$

kaikille $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Osoita, että $d\theta$ on kovariantti 2-tensorikenttä.

8.11. Määritä tensorikentän $E\colon \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$,

$$E(\omega, X) = \omega(X)$$

esitys lokaaleissa koordinaateissa.

[5] Katso Harjoitustehtävät 4.9-4.12.
[6] Katso Harjoitustehtävä 3.5. Nyt $r = 1$.
[7] Katso määritelmät Esimerkistä 8.8.
[8] Kuvaus F saadaan rajoittamalla yksikköpalloon inversio pallonpinnassa, jonka keskipiste on $-\mathbf{e}_n$ ja säde on $\sqrt{2}$.

8.12. Todista Seuraus 8.18.[9]

8.13. Todista Propositio 8.7

[9] Katso Propositio 6.17.

Luku 9

Sileät differentiaalimuodot

Tässä luvussa siirrymme tarkastelemaan sileitä tensorikenttiä, joiden arvot ovat alternoivia $(0, k)$-tensoreita. Määrittelemme differentiaalimuotojen ulkoisen derivaatan ja osoitamme, että jokaisella sileällä monistolla on yksikäsitteinen ulkoinen derivaatta. Luvun lopuksi tarkastelemme lyhyesti suljettuja ja eksakteja muotoja.

9.1 Sileät k-muodot

Olkoon M sileä n-monisto ja olkoon $k \geqslant 0$. Sileä tensorikenttä $\omega \in \Gamma(T^{(0,k)}M) = \mathfrak{T}^{(0,k)}(M)$ on *sileä k-muoto*, jos $\omega_p \in A^k(T_pM)$ jokaisella $p \in M$. Tällöin luku k on k-muodon ω *aste*. Kaikki k-muodot ovat *differentiaalimuotoja*. Sileän moniston M *sileiden k-muotojen avaruus* on $\Omega^k(M) \subset \Gamma(T^{(0,k)}M) = \mathfrak{T}^{(0,k)}(M)$, kun $k \geqslant 1$ ja $\Omega^0(M) = \mathfrak{F}(M)$. Kaikkien *sileiden differentiaalimuotojen avaruus* on[a]

$$\Omega(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M) .$$

Differentiaalimuotojen $\alpha, \omega \in \Omega(M)$ *ulkoinen tulo*[b] $\alpha \wedge \omega$ määritellään pisteittäin

$$(\alpha \wedge \omega)_p = \alpha_p \wedge \omega_p .$$

[a]Lee [Lee2, Ch. 14] käyttää tälle avaruudelle merkintää $\Omega^*(M)$.
[b]Katso luku 7.4.

Funktion $f \in \mathfrak{F}(M) = \Omega^0(M)$ ja k-muodon $\omega \in \Omega^k(M)$ ulkoinen tulo on luvun 7.4 määritelmien mukaisesti sama kuin muodon kertominen funktiolla

$$f \wedge \omega = \omega \wedge f = f\omega .$$

Lemma 9.1. *Olkoon M sileä monisto. Tällöin $\Omega^k(M) = \{0\}$ kaikille $k > \dim M$.*

Todistus. Väite seuraa määritelmästä ja Seurauksesta 7.30 nojalla. □

Sileiden differentiaalimuotojen avaruus $\Omega(M)$ on vektoriavaruus ja astealgebra, jonka kertolasku on sileiden muotojen väkätulo $\wedge$ samoilla sopimuksilla kuin Grassmannin algebroissa $A(T_pM)$, $p \in M$.

Sileiden differentiaalimuotojen perusominaisuudet seuraavat suoraviivaisesti yhtäältä alternoivien muotojen ja toisaalta sileiden tensorikenttien perusominaisuuksista.

Propositio 9.2. *Olkoon M sileä monisto ja olkoot $k, \ell \in \mathbb{N}$.*

(1) Olkoot $\omega \in \Omega^k(M)$, $\alpha, \beta \in \Omega^\ell(M)$ ja olkoot $a, b \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\omega \wedge (a\alpha + b\beta) = a\omega \wedge \alpha + b\omega \wedge \beta$$

ja

$$(a\alpha + b\beta) \wedge \omega = a\alpha \wedge \omega + b\beta \wedge \omega\,.$$

(2) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell}\beta \wedge \alpha$ kaikille $\alpha \in \Omega^k(M)$ ja $\beta \in \Omega^\ell(M)$.

Todistus. Seuraa Propositiosta 7.17. □

Olkoon (U, x) sileä kartta sileällä monistolla M ja olkoon $A\colon M \to T^{(0,k)}M$ kuvaus,[1] jolle $A_p \in A^k(T_pM)$ jokaisella $p \in M$ ja $\pi \circ \omega = \mathrm{id}_M$. Proposition 7.24 nojalla on funktiot $A_{i_1 i_2 \cdots i_k}\colon U \to \mathbb{R}$, joille

$$A = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} A_{i_1 i_2 \cdots i_k}\, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\,. \tag{9.1}$$

Propositio 9.3. *Olkoon M sileä monisto ja olkoon (U, ϕ) sileä kartta monistolla M. Olkoon $A\colon M \to T^{(0,k)}M$ kuvaus, jolle $A_p \in A^k(T_pM)$ jokaisella $p \in M$ ja $\pi \circ \omega = \mathrm{id}_M$. Tällöin A on sileä k-muoto joukossa U, jos ja vain jos sen kerroinfunktiot esityksessä* (9.1) *ovat sileitä.*

Todistus. Seuraa Propositiosta 8.3. □

Propositio 9.4. *Olkoon $F\colon M \to N$ sileä kuvaus.*

(1) Jos $\alpha \in \Omega^k(N)$, niin $F^*\alpha \in \Omega^k(M)$.

(2) Jos lisäksi $\omega \in \Omega^\ell(N)$, niin $F^*(\alpha \wedge \omega) = F^*\alpha \wedge F^*\omega$.

Todistus. Harjoitustehtävä 9.1 □

Differentiaalimuotojen esittämisessä on joskus kätevä käyttää *multi-indeksimerkintää*: Jos $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, niin sovimme, että $dx^I = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$. Tällöin, jos ω on k-muoto, tulkitsemme

$$\omega = \sum_I \omega_I\, dx^J = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \omega_{i_1 i_2 \cdots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\,.$$

[1] Tässä emme oleta, että A on sileä.

9.2 Ulkoinen derivaatta

Lineaarikuvausten perhe $d\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$, $k \in \mathbb{N}$, on *ulkoinen derivaatta,*[a] jos
(1) Kaikille $\omega \in \Omega^k(M)$ ja $\tau \in \Omega^\ell(M)$ pätee

$$d(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge d\tau\,,$$

(2) $d \circ d = 0$ ja
(3) $df \in \Omega^1(M) = \mathfrak{X}^*(M)$ on funktion f differentiaali kaikille $f \in \Omega^0(M) = \mathfrak{F}(M)$.

[a]Englanniksi *exterior derivative* tai *exterior differentiation.*

Sen osoittaminen, että jokaisella sileällä monistolla on ulkoinen derivaatta, on hieman työlästä. Aloitamme tarkastelemalla tilannetta koordinaattiympäristössä.

Propositio 9.5. *Olkoon (U, ϕ) sileä kartta n-ulotteisella sileällä monistolla M. Lauseke*

$$d\Big(\sum \omega_J \, dx^J\Big) = \sum_J d\omega_J \wedge dx^J = \sum_J \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_J}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^J \tag{9.2}$$

määrittelee ulkoisen derivaatan avoimessa joukossa U.

Todistus. Kuvauksen d lineaarisuus seuraa Propositioista 6.12 ja 9.2 ja määritelmän kohta (3) on suoraan määritelmä funktioiden tapauksessa.
(1) Lineaarisuuden nojalla riittää todistaa väite muodoille $\omega = f dx^I$ ja $\tau = g dx^J$. Lausekkeen (9.2), Proposition 6.12(2), jälleen lausekkeen (9.2) ja Proposition 9.2(2) nojalla

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \tau) &= d(fg \, dx^I \wedge dx^J) = d(fg) \, dx^I \wedge dx^J \\ &= gdf \wedge dx^I \wedge dx^J + f dg \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= d\omega \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge dg \wedge dx^J \\ &= d\omega \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge d\tau\,. \end{aligned}$$

(2) Lineaarisuuden nojalla riittää osoittaa väite differentiaalimuodoille $\omega = f dx^I$. Lausekkeen (9.2) ja Lemman 6.15 nojalla

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d(df \wedge dx^I) = d(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^I} dx^i \wedge dx^I) \\ &= \Big(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i \Big) \wedge dx^I\,. \end{aligned}$$

Ulkoisen tulon antisymmetrisyyden[2] nojalla saadaan

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i =$$
$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2} dx^i \wedge dx^i + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i + \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i = 0\,,$$

joten $d(d\omega) = 0 \wedge dx^I = 0$. ☐

[2]Propositio 9.2(2).

Propositio 9.6. *Olkoon (U, ϕ) sileä kartta sileällä monistolla M. Jos $\mathbf{D}$ on ulkoinen derivaatta joukossa U, niin*

$$\mathbf{D}\Big(\sum \omega_J\, dx^J\Big) = \sum_J d\omega_J \wedge dx^J$$

Todistus. Olkoon $\omega = \sum_I \omega_I dx^I$. Ulkoisen derivaatan lineaarisuuden ja ominaisuuden (1) nojalla

$$\mathbf{D}\omega = \mathbf{D}\sum_I \omega_I dx^I = \sum_I \mathbf{D}(\omega_I dx^I) = \sum_I \mathbf{D}\omega_I \wedge dx^I + \sum_I \omega_I \mathbf{D} dx^I\,.$$

Ominaisuuden (3) nojalla $dx^I = \mathbf{D}x^I$, joten

$$\mathbf{D}\omega = \sum_I d\omega_I \wedge dx^I + \sum_I \omega_I \mathbf{D} dx^I\,.$$

Väitteen todistamiseksi riittää siis osoittaa, että $\mathbf{D}(\mathbf{D}x^I) = 0$. Osoitetaan tämä induktiolla asteen suhteen. Oletuksen (2) nojalla $\mathbf{D}\mathbf{D}x^j = 0$ kaikilla $1 \leqslant j \leqslant n$. Oletetaan, että väite pätee $(k-1)$-muodoille. Tällöin ulkoisen derivaatan ominaisuuksien (3) ja (2) ja induktio-oletuksen nojalla

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{D}x^{i_1} &\wedge \mathbf{D}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{D}x^{i_k})\\ &= \mathbf{D}(\mathbf{D}x^{i_1}) \wedge (\mathbf{D}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{D}x^{i_k}) - \mathbf{D}x^{i_1} \wedge \mathbf{D}(\mathbf{D}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{D}x^{i_k})\\ &= 0 \wedge \mathbf{D}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{D}x^{i_k} - \mathbf{D}x^{i_1} \wedge 0 = 0\,.\end{aligned}$$ □

Lause 9.7. *Sileällä monistolla M on yksikäsitteinen ulkoinen derivaatta.*

Todistus. Proposition 9.5 nojalla moniston M jokaisessa kartassa voidaan määritellä ulkoinen derivaatta. Olkoot (U, x) ja (V, y) karttoja pisteessä $p \in M$. Olkoon $\omega \in \Omega^k(M)$. Tällöin on sileät funktiot ω_I^U ja ω_J^V, joille

$$\omega = \sum_I \omega_I^U dx^I = \sum_I \omega_J^V dx^J$$

pisteen p avoimessa karttaympäristössä $U \cap V$. Olkoon $\mathbf{D}$ ulkoinen derivaatta joukossa $U \cap V$. Propositioiden 9.5 ja 9.6 nojalla

$$\sum_I d\omega_I^U dx^I = D\omega = \sum_I d\omega_J^V dx^J\,.$$

Yksikäsitteisyys todistetaan kuten Propositiossa 9.6. □

Esimerkki 9.8. Propositioiden 9.5 ja 9.6 nojalla monistolla $\mathbb{E}^3$ on yksikäsitteinen ulkoinen derivaatta. Differentiaalimuodon $\omega \in \Omega^k(\mathbb{E}^3)$ ulkoinen derivaatta $d\omega$ voi olla nollasta poikkeava, kun $k \in \{0, 1, 2\}$.

(1) Olkoon $f \in \Omega^0(\mathbb{E}^3) = \mathfrak{F}(\mathbb{E}^3)$. Lemmassa 6.15 näimme, että

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3}dx^3\,.$$

(2) Olkoon $\omega \in \Omega^1(\mathbb{E}^3)$. Tällöin $\omega = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2 + \omega_3 dx^3$, joten

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{k=1}^{3} d\omega_k \wedge dx^k = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \omega_k}{\partial x^j}\, dx^j \wedge dx^k \\
&= \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2}\, dx^2 \wedge dx^1 + \frac{\partial \omega_1}{\partial x^3}\, dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^1}\, dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^3}\, dx^3 \wedge dx^2 \\
&\quad + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^1}\, dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^2}\, dx^2 \wedge dx^3 \\
&= \Big(\frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2}\Big) dx^1 \wedge dx^2 + \Big(\frac{\partial \omega_3}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x^3}\Big) dx^2 \wedge dx^3 + \Big(\frac{\partial \omega_1}{\partial x^3} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x^1}\Big) dx^3 \wedge dx^1
\end{aligned}$$

(3) Olkoon $\omega \in \Omega^2(\mathbb{E}^3)$. Tällöin $\omega = \omega_3 dx^1 \wedge dx^2 + \omega_1 dx^2 \wedge dx^3 + \omega_2 dx^3 \wedge dx^1$, joten

$$\begin{aligned}
d\omega &= \frac{\partial \omega_3}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 \\
&= \Big(\frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^3}\Big) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \,.
\end{aligned}$$

Kohdan (1) perusteella funktion $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{E}^3)$ ulkoinen derivaatta vastaa funktion gradienttia ∇f. Kohtien (2) ja (3) laskujen perusteella 2-muodon $\omega \in \Omega^2(\mathbb{E}^3]$ ulkoinen derivaatta vastaa vektorifunktion $\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)\colon \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ *roottoria*[3]

$$\nabla \times \underline{\omega} = \Big(\frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2}, \frac{\partial \omega_3}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x^3}, \frac{\partial \omega_1}{\partial x^3} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x^1}\Big)$$

ja 3-muodon ω ulkoinen derivaatta vastaa vektoriarvoisen kuvauksen $\underline{\omega}$ *divergenssiä*

$$\operatorname{div} \underline{\omega} = \nabla \cdot \omega = \frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^3} \,.$$

Tämä yhteys toimii motivaationa ulkoisen derivaatan määritelmälle.

Seuraus 9.9. *$F\colon M \to N$ sileä kuvaus. Olkoon $\omega \in \Omega^k(N)$. Tällöin*

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega) \,.$$

Todistus. Funktioille väite on Propositio 6.18(3). Olkoon $k \geqslant 1$ ja olkoon $\omega \in \Omega^k(N)$. Tarkastellaan yleistä tapausta lokaaleissa koordinaateissa. Olkoon (U, ϕ) sileä kartta monistolla M ja olkoon (V, ψ) sileä kartta monistolla N siten, että $F(U) \subset V$. Olkoot $(x^1, \dots, x^m)$ ja $(y^1, \dots, y^n)$ kuvausten ϕ ja ψ komponentit. Tällöin on sileät funktiot $\omega_I \in \mathfrak{F}(V)$, joille

$$\omega = \sum_I \omega_I \, dy^I \,.$$

Proposition 9.4(2) nojalla $F^*\omega = \sum_I F^*\omega_I \, F^* dy^I$, joten ulkoisen derivaatan lausekkeen (9.2) nojalla

$$dF^*\omega = \sum_I dF^*\omega_I \wedge F^* dy^I \,.$$

Toisaalta ulkoisen derivaatan lausekkeen (9.2), Proposition 9.4(2) ja Proposition 6.18(3) nojalla

$$F^* d\omega = F^*\big(\sum_I d\omega_I \wedge dy^I\big) = \sum_I F^* d\omega_I \wedge F^* dy^I = \sum_I dF^*\omega_I \wedge F^* dy^I \,,$$

joten väite on todistettu. □

[3]Englanniksi *curl*.

Seuraus 9.10. *Olkoon M sileä monisto ja olkoon $U \subset M$ avoin. Olkoon $\omega \in \Omega^k(M)$. Tällöin $d(\omega|_U) = (d\omega)|_U$.*

Todistus. Olkoon $i\colon U \to M$ inkluusio. Seurauksen 9.9 nojalla

$$d(\omega|_U) = d(i^*\omega) = i^* d\omega = (d\omega)|_U . \qquad \square$$

Esimerkki 9.11. (1) Seurauksen 9.9 ja Proposition 9.4 nojalla sileän 2-muodon $\omega = dx^1 \wedge dx^2 \in \Omega^2(\mathbb{E}^2)$ lauseke napakoordinaateissa on

$$\begin{aligned}\omega &= d(r\cos\theta) \wedge d(r\sin\theta) = (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) \wedge (\sin\theta d\theta + r\cos\theta d\theta)\\ &= r\cos^2\theta dr \wedge d\theta - r\sin^2\theta d\theta \wedge dr = rdr \wedge d\theta .\end{aligned}$$

(2) Olkoon $\omega \in \Omega^1(\mathbb{E}^2)$, $\omega = x^1 dx^2 - x^2 dx^1$. Esimerkin 6.22 laskut osoittavat, että napakoordinaateissa $\omega = r^2 d\theta$. Ulkoiset derivaatat ovat

$$\begin{aligned}d\omega &= dx^1 \wedge dx^2 - dx^2 \wedge dx^1 = 2dx^1 \wedge dx^2\\ &= (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) \wedge (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) = 2rdr \wedge d\theta\end{aligned}$$

kuten pitääkin.

Lause 9.12. *Olkoot M ja N sileitä n-monistoja ja olkoon $F\colon M \to N$ sileä. Olkoon (U, x) sileä kartta pisteessä $p \in M$ ja olkoon (V, y) sileä kartta pisteessä $F(p) \in N$. Olkoon $g \in \mathfrak{F}(V)$. Tällöin*

$$F^*(g\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n) = g \circ F \ \det \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right)_{i,j=1}^n dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n .$$

Todistus. Proposition 6.18, alkukuvan määritelmän, yhtälön (3.2) ja Proposition 7.23 nojalla

$$\begin{aligned}&F^*(g\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n)(p)\Big(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p\Big)\\ &= g \circ F(p)\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n\big|_{F(p)}\Big(dF_p\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \ldots, dF_p\frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p\Big)\\ &= g \circ F(p)\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n\big|_{F(p)}\Big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial F^j}{\partial x^1}(p)\,\frac{\partial}{\partial y^j}, \ldots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial F^j}{\partial x^n}(p)\,\frac{\partial}{\partial y^j}\Big)\\ &= g \circ F(p) \ \det\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right)_{i,j=1}^n\\ &= g \circ F(p) \ \det\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right)_{i,j=1}^n dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n\big|_p\Big(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p\Big) .\end{aligned}$$

Koska $A^n(T_pM)$ on 1-ulotteinen, tästä seuraa väite pisteessä p. $\square$

Seuraus 9.13. *Olkoon M sileä n-monisto. Olkoot (U, x) ja (V, y) sileitä karttoja pisteessä $p \in M$. Tällöin*

$$dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_{i,j=1}^n dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n . \qquad \square$$

9.3 Suljetut ja eksaktit muodot

Tässä luvussa tutustume lyhyesti de Rhamin kohomologiaryhmään, joka on algebrallisen topologian tärkeä käsite.

Olkoon M sileä monisto. Muoto $\omega \in \Omega^k(M)$ on *suljettu muoto*, jos $d\omega = 0$ ja *eksakti muoto*, jos $\omega = d\eta$ jollain $\eta \in \Omega^{n-1}(M)$.
Olkoot $Z^k(M)$ *suljettujen k-muotojen avaruus* ja $B^k(M)$ *eksaktien k-muotojen avaruus.*

Lemma 9.14. *Kaikki n-ulotteisen sileän moniston M sileät n-muodot ovat suljettuja.*

Todistus. Jos $\omega \in \Omega^n(M)$, niin $dw \in \Omega^{n+1}(M) = \{0\}$. □

Lemma 9.15. *Olkoon M sileä monisto.*
(1) Eksaktit muodot ovat suljettuja.
(2) $Z^k(M)$ ja $B^k(M)$ ovat vektoriavaruuden $\Omega^k(M)$ aliavaruuksia.

Todistus. (1) Olkoon $\omega \in \Omega^k(M)$ eksakti. Tällöin $\omega = d\eta$ jollain $\eta \in \Omega^{n-1}(M)$. Ulkoisen derivaatan määritelmän nojalla $d\omega = dd\eta = 0$, joten ω on suljettu.
(2) Seuraa siitä, että d on lineaarikuvaus ja $Z^k(M) = \ker\big(d\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)\big)$ ja $B^k(M) = d\big(\Omega^{k-1}(M)\big)$. □

Seuraus 9.16. *Olkoon $F\colon M \to N$ sileä kuvaus. Tällöin*
(1) Jos $\omega \in Z^k(N)$, niin $F^*\omega \in Z^k(M)$.
(2) Jos $\omega \in B^k(N)$, niin $F^*\omega \in B^k(M)$.

Todistus. Seuraa Propositiosta 9.9. □

Vektoriavaruus V on määritelmänsä nojalla additiivinen ryhmä, jonka laskutoimitus on vektorien yhteenlasku. Jokainen vektorialiavaruus $H \subset V$ on ryhmän $(V, +)$ aliryhmä ja koska vektorien yhteenlasku on kommutatiivinen, H on normaali aliryhmä ja voidaan muodostaa tekijäryhmä V/H. Itse asiassa ryhmällä V/H on myös reaalisen vektoriavaruuden rakenne.

Sileän moniston M k:s *de Rhamin kohomologiaryhmä* on

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M) = Z^k(M)/B^k(M)\,.$$

Seuraus 9.17. *Jos F on diffeomorfismi, niin kohomologiaryhmät $H^k_{dR}(M)$ ja $H^k_{dR}(N)$ ovat isomorfisia.*

Todistus. Harjoitustehtävä 9.6. □

Lause 9.18. $H^p_{dR}(\mathbb{E}^n) = \{0\}$ *kaikille $n, p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$.*

Todistus. Katso [Lee2, Cor. 17.16]. □

Lemma 9.19. *Olkoon M kompakti monisto. Olkoon $\omega \in \Omega^1(M)$ 1-muoto, jolla ei ole nollakohtia. Tällöin ω ei ole eksakti muoto.*

Todistus. Harjoitustehtävä 9.7. □

Esimerkki 9.20. Esimerkissä 6.22 tarkastellun 1-muodon

$$d\theta = \frac{x^1 dx^2 - x^2 dx^1}{\|x\|^2} \in \mathfrak{X}^*(\mathbb{E}^2 - \{0\}) = \Omega^1(\mathbb{E}^2 - \{0\})$$

rajoittuma ympyrälle $\mathbb{S}^1$ on suljettu Lemman 9.14 nojalla. Lemman 9.19 nojalla se ei ole eksakti. Siis $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{S}^1) \neq \{0\}$. Itse asiassa esimerkiksi kirjan [Lee2] luvussa 17 osoitetaan, että $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$.

Harjoitustehtäviä

9.1. Todista Propositio 9.4.

9.2. Määritä muodon $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ lauseke pallokoordinaateissa.[4]

9.3. Olkoon $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^1$ 4-ulotteinen *avarusaika*, jossa vektorin (x, t) ensimmäinen 3-ulotteinen komponentti x kuvaa *paikkaa* ja neljäs komponentti t *aikaa*. Olkoon $\mathbf{E}\colon \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^1 \to \mathbb{E}^3$ *sähkökenttä* ja olkoon $\mathbf{B}\colon \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^1 \to \mathbb{E}^3$ *magneettikenttä. Maxwellin yhtälöt* tyhjiössä, jossa ei ole varauksia eikä virtaa, ovat

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,, \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\,, \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0\,, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0\,. \tag{9.3}$$

Näissä yhtälöissä roottori ja divergenssi muodostetaan tavanomaiseen tapaan osittaisderivaatoista paikkakoordinaattien suhteen. Maxwellin yhtälöt voidaan muotoilla ulkoisen derivaatan avulla, kun määritellään sähkökentän komponenttien avulla 1-muoto

$$E = E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3$$

ja magneettikentän komponenttien avulla 2-muoto

$$B = B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2\,,$$

ja määritellään 2-muoto

$$F = E \wedge dt + B\,.$$

Yhtälö $dF = 0$ vastaa kahta Maxwellin yhtälöistä (9.3). Mitkä nämä yhtälöt ovat?

9.4. Osoita, että sileä 2-muoto

$$\omega = \frac{x^1 dx^2 \wedge dx^3 + x^2 dx^3 \wedge dx^1 + x^3 dx^1 \wedge dx^2}{\big((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\big)^{3/2}} \in \Omega^2(\mathbb{E}^3 - \{0\})\,.$$

on suljettu.

9.5. Olkoon M sileä monisto. Olkoon $\omega \in \Omega^k(M)$ eksakti muoto ja olkoon $\tau \in \Omega^\ell(M)$ suljettu muoto. Osoita, että $\omega \wedge \tau$ on eksakti muoto.

[4] Katso Harjoitustehtävä 3.5.

9.6. Todista Seuraus 9.17.

9.7. Todista Lemma 9.19.

9.8. (1) Osoita, että moniston $\mathbb{E}^3$ koordinaattimuotojen rajoittumat alimonistolle $\mathbb{S}^2$ toteuttavat yhtälön $x^1dx^1 + x^2dx^2 + x^3dx^3 = 0$.[5]

(2) Olkoon $\omega = x^1dx^2 \wedge dx^3 + x^2dx^3 \wedge dx^1 + x^3dx^1 \wedge dx^2 \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$. Osoita, että

$$\omega = \begin{cases} \dfrac{dx^2 \wedge dx^3}{x^1}, & \text{kun } x^1 \neq 0 \\ \dfrac{dx^3 \wedge dx^1}{x^2}, & \text{kun } x^2 \neq 0 \\ \dfrac{dx^1 \wedge dx^2}{x^3}, & \text{kun } x^3 \neq 0 \end{cases}$$

[5] Harjoitustehtävästä 6.12 voi olla hyötyä.

Luku 10

Suunnistus ja integrointi monistoilla

Kurssin viimeisessä luvussa tarkastelemme sileiden 1-muotojen integraaleja polkujen yli ja sileiden n-muotojen integrointia n-ulotteisella sileällä monistolla. Käsittelemme myös lyhyesti moniston suunnistusta ja ykkösen ositusta, joita tarvitaan korkeimman asteen sileiden muotojen integraalin määrittelyssä.

10.1 Polkuintegraalit sileällä monistolla

Tässä luvussa osoitamme, että sileän 1-muodon integraali polun yli voidaan määritellä luonnollisella tavalla niin, että se ei riipu koordinaattien valinnasta. Integraali voitaisiin määritellä huomattavasti vähemmän säännöllisillekin 1-muodoille mutta yksinkertaisuuden vuoksi pitäydymme edelleen sileisiin muotoihin.

Sileän 1-muodon $\omega = f\,dt \in \mathfrak{X}^*(\mathbb{E}^1) = \Omega^1(\mathbb{E}^1)$ *integraali välin* $[a,b]$*,* $a < b$*, yli on*

$$\int_{[a,b]} \omega = \int_a^b f(t)dt\,.$$

Propositio 10.1. *Olkoon* $\omega = f\,dt \in \mathfrak{X}^*(\mathbb{E}^1)$ *ja olkoon* $h\colon [c,d] \to [a,b]$ *kasvava diffeomorfismi. Tällöin*

$$\int_{[c,d]} h^*\omega = \int_{[a,b]} \omega\,.$$

Todistus. Olkoon s kanoninen koordinaatti välillä $[c,d]$. Yhtälön (6.9) nojalla

$$(h^*\omega)_s = (f \circ h)(s)dh(s) = (f \circ h)(s)\,\frac{dh}{ds}(s)ds\,,$$

joten väite seuraa yhden muuttujan analyysin muuttujanvaihtolauseesta:

$$\int_{[c,d]} h^*\omega = \int_{[c,d]} (f \circ h)(s)\,\frac{dh}{ds}(s)ds = \int_{h(a)}^{h(b)} f(t)dt = \int_{[a,b]} \omega\,. \qquad \square$$

Alkukuvan määritelmän nojalla monistolla M määritellyn 1-muodon integraali sileän polun yli voidaan palauttaa reaalilukuvälillä määritellyn muodon integrointiin. Näin saatava integraali ei riipu polun parametrisoinnista.

Olkoon $\gamma\colon [a,b] \to M$ sileä polku[a] ja olkoon $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$. Sileän 1-muodon ω *integraali polun γ yli* on

$$\int_\gamma \omega = \int_{[a,b]} \gamma^*\omega\,.$$

[a] γ on jollain välin $[a,b]$ sisältävällä avoimella välillä määritellyn sileän polun rajoittuma välille $[a,b]$.

Propositio 10.2. *Olkoon $\gamma\colon [a,b] \to M$ sileä polku ja olkoon $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$. Olkoon $h\colon [c,d] \to [a,b]$ kasvava diffeomorfismi. Tällöin*

$$\int_{\gamma\circ h} \omega = \int_\gamma \omega\,.$$

Todistus. Määritelmän ja Propositioiden 6.20 ja 10.1 nojalla

$$\int_{\gamma\circ h} \omega = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} (\gamma\circ h)^*\omega = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} h^*\gamma^*\omega = \int_a^b \gamma^*\omega\,. \qquad \square$$

Propositio 10.3. *Olkoon $\gamma\colon [a,b] \to M$ sileä polku ja olkoon $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$. Tällöin*[1]

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,dt\,.$$

Todistus. Olkoon $t_0 \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$(\gamma^*\omega)_{t_0}\frac{d}{dt}\Big|_{t_0} = \omega_{\gamma(t_0)}(d\gamma)_{t_0}\frac{d}{dt}\Big|_{t_0} = \omega_{\gamma(t_0)}\dot\gamma(t_0) = \omega_{\gamma(t_0)}\dot\gamma(t_0)dt_{t_0}\frac{d}{dt}\Big|_{t_0}\,,$$

joten väite seuraa, koska $\frac{d}{dt}\big|_{t_0}$ virittää tangenttiavaruuden $T_{t_0}\mathbb{E}^1$. $\square$

Esimerkki 10.4. Olkoon $\omega = \frac{x^1dx^2 - x^2dx^1}{\|x\|^2} = d\theta \in \mathfrak{X}^*\big(\mathbb{E}^2 - \{0\}\big)$ Esimerkeissä 6.22 ja 9.20 tarkasteltu sileä 1-muoto. Olkoon $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{E}^2$, $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Peittämällä monisto $\mathbb{E}^2 - \{0\}$ kahdella napakoordinaatilla saadaan

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\,.$$

Kanonisissa koordinaateissa polkuintegraalin määritelmän nojalla lasku on hieman pidempi mutta lopulta aivan sama:

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} (\cos t d(\sin t) - \sin t d(\cos t))dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\,.$$

Propositio 10.5. *Jos $\gamma\colon [a,b] \to M$ sileä polku ja olkoon $f \in \mathfrak{F}(M)$, niin*

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))\,.$$

[1] Muista, että $\dot\gamma(t)$ on polun γ nopeusvektori hetkellä t, katso luku 3.4.

Todistus. Proposition 10.3, differentiaalin määritelmän, nopeusvektorin määritelmän ja jälleen differentiaalin määritelmän nojalla saamme

$$\int_\gamma df = \int_a^b df(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,dt = \int_a^b \dot\gamma(t) f\,dt = \int_a^b d\gamma(t)\frac{d}{dt} f\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)\,dt\,,$$

josta väite seuraa analyysin peruslauseen nojalla. □

Propositio 10.6. *Olkoon M sileä monisto. Jos 1-muoto $\omega \in \Omega^1(M)$ on eksakti, niin $\int_\gamma \omega = 0$ kaikille suljetuille sileille poluille $\gamma\colon I \to M$.*

Todistus. Olkooin $f \in \mathfrak{F}(M)$ ja olkoon $\gamma\colon [0,1] \to M$ suljettu polku. Proposition 10.5 nojalla

$$\int_\gamma df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = 0\,.$$ □

Esimerkki 10.7. Esimerkeissä 6.22 ja 9.20 tarkasteltu muoto $d\theta \in \Omega^1(\mathbb{E}^2 - \{0\}$ on suljettu, sillä

$$d\Big(\frac{x^1dx^2 - x^2dx^1}{\|x\|^2}\Big) = \frac{((x^2)^2 - (x^1)^2)dx^1 \wedge dx^2 + ((x^2)^2 - (x^1)^2)dx^2 \wedge dx^1}{\|x\|^4} = 0\,.$$

Olkoon $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{E}^2 - \{0\}$ sileä suljettu polku $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Esimerkissä 10.4 laskimme integraalin $\int_\gamma d\theta = 2\pi \neq 0$. Proposition 10.6 nojalla muodot $d\theta \in \Omega^1(\mathbb{E}^2 - \{0\})$ ja $d\theta \in \Omega^1(\mathbb{S}^1)$ eivät ole eksakteja. Siis monistojen $\mathbb{E}^2 - \{0\}$ ja $\mathbb{S}^1$ ensimmäinen de Rhamin kohomologiaryhmä[2] ei ole triviaali.

10.2 Korkeimman asteen muotojen integrointi euklidisessa avaruudessa

Olkoon $U \subset \mathbb{E}^n$. Olkoon $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \in \Omega^n(U)$. Muodon ω *integraali* kompaktin joukon $B \subset U$ yli on

$$\int_B \omega = \int_B f dx^1 \cdots dx^n\,.$$

Propositio 10.8. *Olkoot $U, V \subset \mathbb{E}^n$ avoimia joukkoja ja olkoon $F\colon U \to V$ diffeomorfismi siten, että kuvauksen F Jacobin determinantin merkki $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ on vakio. Tällöin jokaiselle kompaktille joukolle $K \subset V$ ja jokaiselle $\omega \in \Omega^n(U)$ pätee*

$$\int_{F^{-1}(K)} F^*\omega = \varepsilon \int_K \omega\,.$$

[2]Katso luku 9.3.

Todistus. Olkoon $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Seurauksen 9.13 ja Lebesguen integraalin muuttujanvaihtokaavan nojalla

$$\begin{aligned}\int_{F^{-1}(K)} F^*(f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) &= \int_{F^{-1}(K)} f \circ F \det\left(\tfrac{\partial F^i}{\partial x^j}\right)_{i,j=1}^n dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \varepsilon \int_{F^{-1}(K)} f \circ F \left|\det\left(\tfrac{\partial F^i}{\partial x^j}\right)_{i,j=1}^n\right| dx^1 \cdots dx^n \\ &= \varepsilon \int_K f dx^1 \cdots dx^n = \int_K f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \,. \qquad \square\end{aligned}$$

Olkoot $U, V \subset \mathbb{E}^n$ avoimia joukkoja ja olkoon $F\colon U \to V$ diffeomorfismi. Kuvaus F *säilyttää suunnistuksen*, jos sen Jacobin determinantti on positiivinen.

Seuraus 10.9. *Olkoon M sileä monisto. Olkoot (U, ϕ) ja (V, ψ) karttoja, joille $\phi \circ \psi^{-1}$ on suunnistuksen säilyttävä, ja olkoon $\omega \in \Omega^n(M)$ siten, että* $\operatorname{supp}\omega \subset U \cap V$. *Tällöin*

$$\int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*\omega = \int_{\psi(V)} (\psi^{-1})^*\omega \,.$$

Todistus. Propositioiden 10.8 ja 8.7 nojalla

$$\int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*\omega = \int_{(\phi\circ\psi^{-1})\circ\psi(V)} (\phi \circ \psi^{-1})^*(\phi^{-1})^*\omega = \int_{\psi(V)} (\psi^{-1})^*\omega \,. \qquad \square$$

10.3 Suunnistus

Seuraus 10.9 antaa vihjeen siitä, miten korkeimman asteen muotojen integrointi sileällä monistolla saadaan määriteltyä karttojen valinnasta riippumattomalla tavalla.

Sileän moniston M sileä kartasto $\mathscr{U}$ on *suunnistettu kartasto*, jos sen kaikki kartanvaihtokuvaukset ovat suunnistuksen säilyttäviä. Jos monistolla M on suunnistettu kartasto, niin M on *suunnistuva monisto.*

Sileän moniston M maksimaalinen suunnistettu kartasto on *suunnistus.* Jos $\mathscr{U}$ on moniston M suunnistus, niin pari $(M, \mathscr{U})$ on *suunnistettu monisto.*

Jos $\mathscr{U}$ on moniston M suunnistus ja $(U, \phi) \in \mathscr{U}$, niin $(U, \phi) \in \mathscr{U}$ on *positiivisesti suunnistettu kartta.*

Propositio 10.10. *Jokainen suunnistettu kartasto sisältyy yksikäsitteiseen suunnistukseen.*

Todistus. Todistetaan kuten Propositio 1.13. Harjoitustehtävä 10.3. $\square$

Olkoon M suunnistettu monisto. Olkoon $\omega \in \Omega^n(M)$ siten, että on positiivisesti suunnistettu kartta (U, ϕ), jolle $\operatorname{supp}\omega \subset U$. Muodon ω *integraali* on

$$\int_M \omega = \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*\omega \,.$$

Jos korkeimman asteen sileän muodon kantaja sisältyy yhteen koordinaattiympäristöön, niin sen integraalin määritelmä on riippumaton positiivisesti suunnistetun kartan valinnasta Seurauksen 10.9 nojalla.

Monet tällä kurssilla ja johdatuskurssilla käsitellyt sileät monistot ovat suunnistuvia.

Esimerkki 10.11. (1) Euklidisen avaruuden yhdestä kartasta koostuva kanoninen kartasto $\{(\mathbb{E}^n, \mathrm{id})\}$ on suunnistettu kartasto, joten $\mathbb{E}^n$ on suunnistuva monisto.

(2) Harjoitustehtävässä 10.4 osoitetaan, että $\mathbb{S}^n$ on suunnistuva monisto.

(3) Säännöllinen tasa-arvohyperpinta[3] on suunnistuva, katso [Lee2, Prop. 15.21].

(4) Harjoitustehtävässä 10.6 osoitetaan, että n-torus $\mathbb{T}^n$ on suunnistuva.

(5) Projektiivinen avaruus $\mathbb{P}^n$ on suunnistuva, jos ja vain jos n on pariton. Katso Propositio 10.23.

Propositio 10.12. *Olkoon M sileä monisto. Tällöin monistot TM ja T^*M ovat suunnistuvia.*

Todistus. Olkoot (U, ϕ) ja (V, ψ) sileitä karttoja monistolla M ja olkoot Φ ja Ψ luvussa 4.1 määritellyt kartat tangenttikimpulla TM. Yhtälön (4.2) nojalla kartanvaihdon $\Psi \circ \Phi^{-1}$ Jacobin determinantti toteuttaa

$$\begin{aligned} \det D(\Psi \circ \Phi^{-1})(y, w) &= \det \begin{pmatrix} D(\psi \circ \phi^{-1})(y) & * \\ 0 & D(\psi \circ \phi^{-1})(y) \end{pmatrix} \\ &= \big(\det D(\psi \circ \phi^{-1})(y)\big)^2 > 0 \,, \end{aligned}$$

koska derivaattamatriisi on lohkokolmiomatriisi ja kartanvaihto $\psi \circ \phi^{-1}$ on sileä diffeomorfismi.

Kotangenttikimpun tapaus käsitellään samaan tapaan, Harjoitustehtävä 10.8. □

10.4 Ykkösen ositus

Laajennamme integraalin määritelmän sellaisillekin korkeimman asteen muodoille, joiden kantajat eivät välttämättä sisälly suunnistetun moniston yhteen koordinaattiympäristöön. Tässä luvussa todistettava Lause 10.15 on oleellinen apuväline n-muotojen integraalin määrittelyssä.

Olkoon $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ sileän moniston M lokaalisti äärellinen avoin peite.[a] Olkoon $\rho_\alpha \in \mathfrak{F}(M)$ siten, että $\rho_\alpha \geqslant 0$, $\operatorname{supp} \rho_\alpha \subset U_\alpha$ kaikilla $\alpha \in A$ ja

$$\sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha = 1 \,.$$

Tällöin $(\rho_\alpha)_{\alpha \in A}$ on *peitteen $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ kanssa yhteensopiva sileä ykkösen ositus.*

[a] Määritelmä on luvussa 1.3.

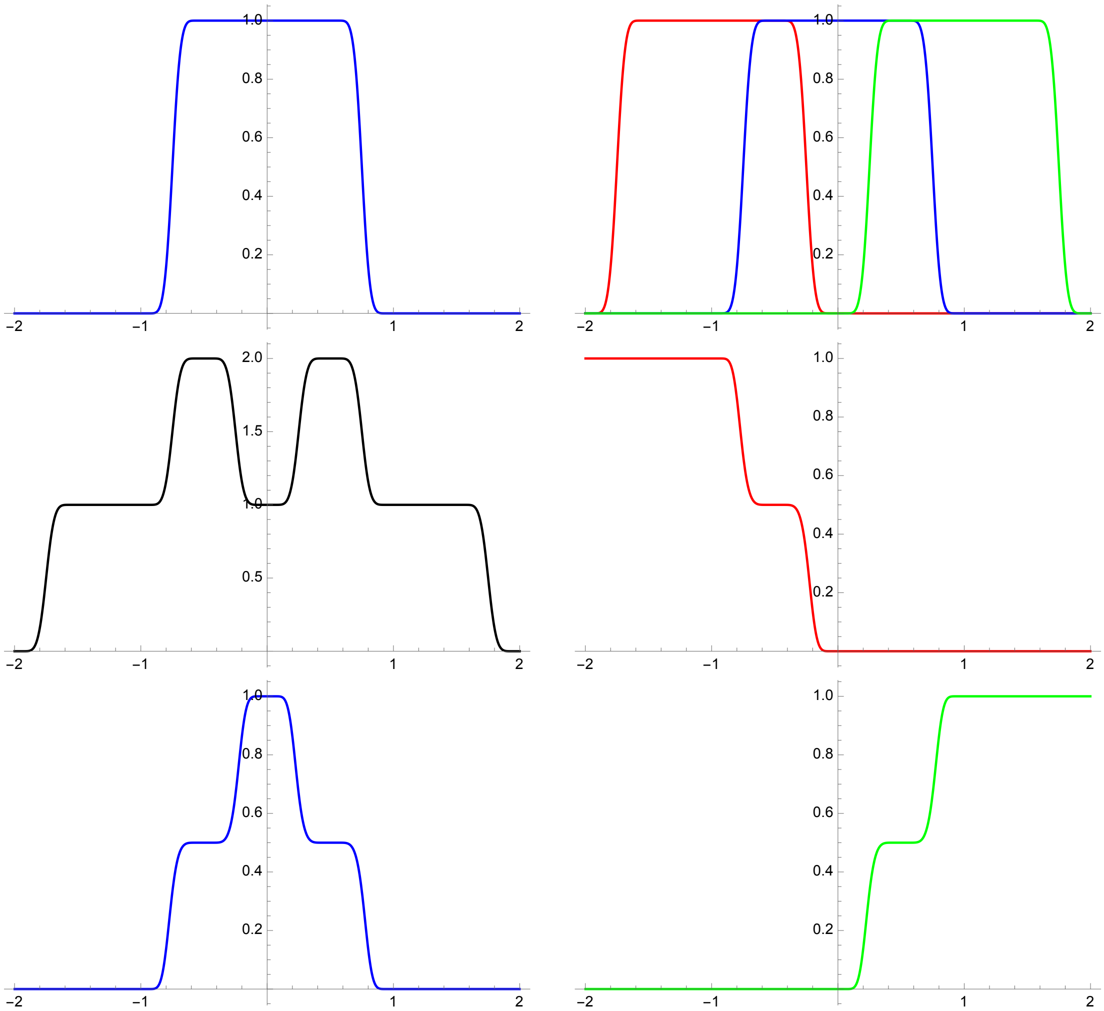
Ykkösen osituksen määritelmässä oleva summa $\sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha(p)$ on äärellinen jokaisella $p \in M$, koska peite $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ on lokaalisti äärellinen.

[3] Katso luku 5.2.

Esimerkki 10.13. Olkoon $h_{a,b} \in \mathfrak{F}(\mathbb{E}^1)$ yhtälössä (2.1) määritelty sileä positiivinen funktio, jolle pätee $h_{a,b}|_{]-\infty,a]} = 0$ ja $h_{a,b}|_{[b,\infty[} = 1$. Jos $a < b < c < d$, niin funktio $f_{a,b,c,d} \in \mathfrak{F}(\mathbb{E}^1)$,

$$\rho_{a,b,c,d}(t) = h_{a,b}(t) + h_{-d,-c}(-t),$$

on töyssyfunktio, jonka kantaja sisältyy väliin $]a, d[$. Kuvassa 10.13 esitetään kolmen töyssyfunktion avulla tehty ykkösen ositus välillä $]-2, 2[$.



Kuva 10.1 — Ylimmällä rivillä vasemmalla töyssyfunktio $\rho_{-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1}$ ja oikealla kolme töyssyfunktiota, joiden kantajat peittävät avoimen välin $]-2, 2[$. Toisella rivillä vasemmalla kolmen töyssyfunktion summa ja sen jälkeen summafunktiolla skaalattujen töyssyfunktioiden kuvaajat.

Näimme luvussa 2.5 esimerkkejä sileistä positiivisista töyssyfunktioista, joiden kantajat sisältyvät tarkasteltaviin koordinaattiympäristöihin.

Olkoon M sileä monisto. Koordinaattipallo $B \subset M$ *säännöllinen koordinaattipallo*, jos on moniston M sileä kartta (U, ϕ), jossa $B = \phi^{-1}(B(0, r))$ jollain $r > 0$ ja on $r' > r$ siten, että $B(0, r') \subset \phi(U)$.

Lemma 10.14. *Säännölliset koordinaattipallot muodostavat sileän moniston topologian kannan.*

Todistus. Harjoitustehtävä 10.7. □

Lause 10.15. *Olkoon $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ sileän moniston M peite koordinaattiympäristöillä. Tällöin on peitteen $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ kanssa yhteensopiva ykkösen ositus.*

Todistus. Lauseen 1.9 ja Lemman 10.14 nojalla on peitteen $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ lokaalisti äärellinen hienonnus $(B_i)_{i\in I}$ siten, että joukot B_i ovat säännöllisiä koordinaattipalloja. Tällöin jokaisella $B_i \subset U_\alpha$ on suurempi koordinaattipallo $B_i' \subset U_\alpha$ siten, että palloilla B_i ja B_i' on sama keskipiste joukon U_α koordinaateissa. Olkoon ρ_i^0 sileä töyssyfunktio,[4] jolle $\operatorname{supp}\rho_i^0 = \overline{B}_i$. Sulkeumien kokoelma $(\overline{B}_i)_{i\in I}$ on lokaalisti äärellinen,[5] joten funktio $\rho = \sum_{i\in I}\rho_i^0$ on sileä. Lisäksi $\rho(p) > 0$ jokaisella $p \in M$, koska joukot B_i muodostavat peitteen. Olkoot $\rho_i = \frac{\rho_i^0}{\rho}$ kaikilla $i \in I$. Tällöin $\sum_{i\in I}\rho = 1$. □

10.5 Korkeimman asteen sileän muodon integraali

Jos $(\rho_\alpha)_{\alpha\in A}$ on ykkösen ositus sileällä n-ulotteisella monistolla M ja $\omega \in \Omega^n(M)$, niin

$$\omega = \sum_{\alpha\in A}\rho_\alpha\omega\,.$$

Määrittelemme muodon ω integraalin tämän yhtälön ohjaamana:

Olkoon M suunnistettu n-monisto ja olkoon $\omega \in \Omega^n(M)$ kompaktikantajainen sileä n-muoto. Olkoon $\big((U_\alpha,\phi_\alpha)\big)_{\alpha\in A}$ äärellinen kokoelma positiivisesti suunnistettuja karttoja siten, että $\operatorname{supp}\omega \subset \bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$. Olkoon $(\rho_\alpha)_{\alpha\in A}$ peitteen $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ kanssa yhteensopiva sileä ykkösen ositus. Muodon ω *integraali* on

$$\int_M \omega = \sum_{\alpha\in A}\int_M \rho_\alpha\omega\,. \tag{10.1}$$

Lause 10.16. *Olkoon M suunnistettu n-monisto ja olkoon $\omega \in \Omega^n(M)$ kompaktikantajainen muoto. Muodon ω integraali on riippumaton positiivisesti suunnistettujen karttojen ja niiden kanssa yhteensopivan ykkösen osituksen valinnasta.*

Todistus. Olkoot $\big((U_\alpha,\phi_\alpha)\big)_{\alpha\in A}$ ja $\big((V_\beta,\psi_\beta)\big)_{\beta\in B}$ muodon ω kantajan peittäviä äärellisiä kokoelmia positiivisesti suunnistettuja karttoja ja olkoot $(\rho_\alpha)_{\alpha\in A}$ ja $(\chi_\beta)_{\beta\in B}$ näiden peitteiden kanssa kanssa yhteensopivia ykkösen osituksia Tällöin

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in A}\int_M \rho_\alpha\omega &= \sum_{\alpha\in A}\int_M\Big(\sum_{\beta\in B}\chi_\beta\Big)\rho_\alpha\omega\\ &= \sum_{\alpha\in A,\ \beta\in B}\int_M \chi_\beta\rho_\alpha\omega = \sum_{\beta\in B}\int_M\Big(\sum_{\alpha\in A}\rho_\alpha\Big)\chi_\beta\omega = \sum_{\beta\in B}\int_M\chi_\beta\omega\,.\end{aligned}$$

[4]Katso Lemma 2.16.

[5]Jos avoin joukko leikkaa toisen joukon sulkeumaa, se leikkaa myös itse joukkoa.

Laskun keskimmäisen summan muodon $\chi_\beta\rho_\alpha\omega$ kantaja sisältyy koordinaattiympäristöön $U_\alpha \cap V_\beta$ jokaisella $\alpha \in A$ ja $\beta \in B$. Siis integraali $\int_M \chi_\beta\rho_\alpha\omega$ on riippumaton karttakuvauksen valinnasta. □

Integraalin käsite voidaan laajentaa myös muodoille, joiden kantaja on rajoittamaton tai jotka ovat vähemmän säännöllisiä kuin avaruuden $\Omega^n(M)$ muodot. Integraalin laskeminen niin, että integraali jaetaan osiin ykkösen osituksen avulla ei ole käytännöllistä, koska integroitavat lausekkeet ovat niin hankalia töyssyfunktioilla kertomisen vuoksi. Käytännössä laskut tehdään jakamalla monisto sopiviin erillisiin paloihin, joissa lasku tehdään ilman ykkösen ositusta. Se, että näin voi tehdä, perustellaan esimerkiksi Leen kirjassa, katso [Lee2, Proposition 16.8].

Esimerkki 10.17. Olkoon[6]

$$\omega = x^1 dx^2 \wedge dx^3 + x^2 dx^3 \wedge dx^1 + x^3 dx^1 \wedge dx^2 \in \Omega^2(\mathbb{E}^3)\,.$$

Pallokoordinaateissa[7]

$$x^1 dx^2 \wedge dx^3 + x^2 dx^3 \wedge dx^1 + x^3 dx^1 \wedge dx^2 = -\sin\theta_2\, d\theta_1 \wedge d\theta_2$$

kun $-\pi < \theta_1 < \pi$ ja $0 < \theta_2 < \pi$. Napakoordinaattikuvauksen Jacobin determinantti on $-\sin\theta_2 < 0$, joten jättämällä huomioimatta pallon pinnan nollamittainen joukko, jossa napakoordinaatteja ei ole määritelty, saamme

$$\int_{\mathbb{S}^2} \omega = 2\pi \int_0^\pi \sin\theta_2\, d\theta_2 = 4\pi\,.$$

Helppo lasku osoittaa, että

$$d\omega = 3\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3\,,$$

joten

$$\int_{B(0,1)} d\omega = 3\,\mathrm{vol}(B(0,1)) = 4\pi = \int_{\mathbb{S}^2} \omega\,. \tag{10.2}$$

Yhtälö (10.2) on erikoistapaus *Stokesin lauseesta*, katso [Lee2, Theorem 16.11].

10.6 Suunnistusmuoto

Olkoon M sileä monisto. Jos $\omega \in \Omega^n(M)$ on sileä n-muoto, jolla ei ole nollakohtia, niin se on sileän moniston M *suunnistusmuoto*.[a]

[a] Joskus suunnistusmuotoa kutsutaan *tilavuusmuodoksi*.

Esimerkki 10.18. (1) $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ on sileän moniston $\mathbb{E}^n$ suunnistusmuoto.
(2) Olkoon $N = \sum_{k=1}^{n+1} x^k \frac{\partial}{\partial x^k} \in \mathfrak{X}(\mathbb{E}^{n+1})$ ja olkoon $\omega \in \Omega^{n+1}(\mathbb{E}^{n+1})$ kuten kohdassa (1). Asetetaan kaikille $v_1, v_2, \ldots, v_n \in T_x(M) = p^\perp$ kaikilla $p \in \mathbb{S}^n$

$$\sigma_p(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \omega_p(N_p, v_1, v_2, \ldots, v_n)\,.$$

[6] Itse asiassa ω on pallon pinnan $\mathbb{S}^2$ pyöreää Riemannin metriikkaa vastaava pinta-alamuoto, katso [Lee2, sivu 388-].

[7] Katso Harjoitustehtävä 3.5.

Tällöin $\sigma \in \Omega^n(\mathbb{S}^n)$ ja Proposition 7.23 nojalla

$$\sigma_p(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \det(N_p, v_1, v_2, \ldots, v_n) \neq 0\,,$$

kun tangenttivektorit $v_1, v_2, \ldots, v_n$ muodostavat avaruuden $T_p(\mathbb{S}^n)$ kannan. Siis σ on suunnistusmuoto.

Lause 10.19. *Sileä monisto M on suunnistuva, jos ja vain jos sillä on suunnistusmuoto.*

Todistus. Olkoon M suunnistettu monisto. Olkoon $(\rho_\alpha)_{\alpha\in A}$ ykkösen ositus, jonka kantajat sisältyvät moniston M positiivisesti suunnistettuihin sileisiin karttoihin (U_α, x_α), $\operatorname{supp}\rho_\alpha \in U_\alpha$. Muoto

$$\omega = \sum_{\alpha\in A} \rho_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n$$

on hyvin määritelty, koska ykkösen ositus on lokaalisti äärellinen. Se on sileä, koska se on sileiden muotojen äärellinen summa. Oletuksen nojalla kaikkien kartanvaihtojen Jacobin determinantit ovat positiivisia, joten Seurauksen 9.13 nojalla jokaisessa kartassa (U_α, x_α) pätee $\omega = f dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n$ positiivisella $f \in \mathfrak{F}(U_\alpha)$.

Oletetaan, että monistolla M on suunnistusmuoto. Harjoitustehtävässä 10.11 osoitetaan, että

$$\mathscr{U} = \{(U, \phi) \text{ kartta, jossa } \ \omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \text{ jollain } f > 0\}\,.$$

on suunnistus. ☐

Ykkösen osituksen avulla voidaan myös todistaa että jokaisella sileällä monistolla on Riemannin metriikka käyttämättä Whitneyn upotuslausetta.

Lauseen 8.11 toinen todistus. Käytetään Lauseen 10.19 ykkösen ositusta. Olkoon $g_\mathbb{E}$ euklidinen Riemannin metriikka. On helppo tarkastaa, että

$$g = \sum_{\alpha\in A} \rho_\alpha (x_\alpha^{-1})^* g_\mathbb{E}$$

on Riemannin metriikka. ☐

Lause 10.20. *Yhtenäisellä sileällä monistolla on 0 tai 2 suunnistusta.*

Todistus. Olkoon M yhtenäinen sileä n-monisto. Olkoon $f \in \mathfrak{F}(M)$, $f > 0$ ja olkoon ω muoto, jolla ei ole nollakohtia. Lauseen 10.19 todistuksessa nähdään, että muodot ω ja $f\omega$ määräävät saman suunnistuksen. Jos taas $f < 0$, niin muodot ω ja $f\omega$ määräävät eri suunnistukset. Muita suunnistuksia ei ole, koska $\dim A^n(T_p(M)) = 1$ kaikilla $p \in M$. ☐

Propositio 10.21. *Olkoon $F\colon M \to N$ sileä lokaali diffeomorfismi. Olkoon ω suunnistusmuoto monistolla N. Tällöin $F^*\omega$ on suunnistusmuoto.*

Todistus. Harjoitustehtävä 10.12. ☐

Jos M ja N ovat suunnistettuja monistoja ja $F\colon M \to N$ on sileä lokaali diffeomorfismi, niin F on *suunnistuksen säilyttävä*, jos sen Jacobin determinantti on positiivinen positiivisissa kartoissa.

Propositio 10.22. *Olkoon ω_M suunnistusmuoto monistolla M ja olkoon ω_N suunnistusmuoto monistolla N. Lokaali diffeomorfismi $F\colon M \to N$ on suunnistuksen säilyttävä, jos $F^*\omega_N = f\omega_M$ jollain positiivisella funktiolla $f \in \mathfrak{F}(M)$.*

Todistus. Väite seuraa Lauseesta 9.12. □

Propositio 10.23. *Projektiivinen avaruus $\mathbb{P}^n$ on suunnistuva, jos ja vain jos n on pariton.*

Todistus. Olkoon n parillinen. Oletetaan, että $\mathbb{P}^n$ on suunnistuva. Olkoon $\omega \in \Omega^n(\mathbb{P}^n)$ suunnistusmuoto. Olkoon $\pi\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ peitekuvaus kuten Esimerkissä 1.23. Proposition 10.21 nojalla $\pi^*\omega$ on suunnistusmuoto monistolla $\mathbb{S}^n$. Kuitenkin $\pi\circ(-\operatorname{id}) = \pi$, joten $(-\operatorname{id})^*\pi^*\omega = \pi^*\omega$. Tämä on mahdotonta, koska Harjoitustehtävän 10.5 nojalla $-\operatorname{id}\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ei ole suunnistuksen säilyttävä, kun n on parillinen.

Parittomat ulottuvuuden käsitellään Leen kirjan [Lee2] esimerkissä 15.37. □

Harjoitustehtäviä

10.1. (1) Olkoot

$$\begin{aligned}\omega &= dx^3 \in \Omega^1(\mathbb{S}^2)\,,\\ \eta &= x^2x^3dx^1 + x^1x^3dx^2 + x^1x^2dx^3 \in \Omega^1(\mathbb{S}^2)\end{aligned}$$

ja olkoon $\gamma\colon [-1,1] \to \mathbb{S}^2$,

$$\gamma(t) = \left(\sqrt{1-t^2}\cos(t), \sqrt{1-t^2}\sin(t), t\right).$$

Määritä $\int_\gamma \omega$ ja $\int_\gamma \eta$.

10.2. Olkoon $V \in \mathfrak{F}(\mathbb{E}^2)$,

$$V(x) = (x^1)^2((x^1)^2 - 1) + (x^2)^2$$

ja olkoon $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{E}^2$,

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)\cos(t))\,.$$

(1) Osoita, että $V(\gamma(t)) = 0$ kaikilla $t \in [0,2\pi]$.

(2) Määritä $\int_\gamma dV$.[8]

(3) Olkoon

$$\omega = -2x^2dx^1 + (4(x^1)^2 - 2x^1)dx^2 \in \Omega^1(\mathbb{E}^2)$$

Laske $\int_\gamma \omega$.

10.3. Todista Propositio 10.10.

10.4. Anna esimerkki pallon pinnan $\mathbb{S}^n$ suunnistetusta kartastosta.[9]

[8] Harjoitustehtävästä 6.12 voi olla apua, mutta yksi kohta vaatii huolellisuutta.

[9] Esimerkissä 1.12 (3) tarkastellut stereograafiset projektiot pohjois- ja etelänavalta muodostavat kahdesta kartasta koostuvan sileän kartaston.

10.5. (1) Osoita, että kuvaus $-\mathrm{id}\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ on suunnistuksen säilyttävä, jos ja vain jos n on parillinen.

(2) Osoita, että kuvaus $-\mathrm{id}\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ on suunnistuksen säilyttävä, jos ja vain jos n on pariton.[10]

10.6. Osoita, että n-torus $\mathbb{T}^n$ on suunnistuva.[11]

10.7. Todista Lemma 10.14.

10.8. Olkoon M sileä monisto. Osoita, että sileä monisto T^*M on suunnistuva.

10.9. Olkoon $G\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{E}^3$ Esimerkissä 5.17(1) tarkasteltu 2-toruksen upotus avaruuteen $\mathbb{E}^3$. Laske

$$\int_{\mathbb{T}^2} G^*(x^3 dx^1 \wedge dx^2)\,.$$

10.10. Määritä Esimerkin 10.18(2) muodon σ lauseke 2-muotojen $dx^i \wedge dx^j$ avulla, kun $n = 2$.

10.11. Osoita, että Lauseen 10.19 todistuksessa määritelty kokoelma $\mathscr{U}$ on suunnistus.

10.12. Todista Propositio 10.21.

[10] Käytä tehtävän 10.4 suunnistettua kartastoa.

[11] Katso Esimerkki 1.20 .

Kirjallisuutta

[Fle] W. Fleming. *Functions of several variables.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, second edition, 1977. Undergraduate Texts in Mathematics.

[FQ] M. H. Freedman and F. Quinn. *Topology of 4-manifolds*, volume 39 of *Princeton Mathematical Series.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.

[HW] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers.* Oxford University Press, Oxford, sixth edition, 2008.

[Hir] M. W. Hirsch. *Differential topology.* Graduate Texts in Mathematics, No. 33. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.

[Ker] M. A. Kervaire. A manifold which does not admit any differentiable structure. *Comment. Math. Helv.*, 34:257–270, 1960.

[Laf] J. Lafontaine. *An introduction to differential manifolds.* Springer, Cham, second edition, 2015.

[Lan] S. Lang. *Linear algebra.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, third edition, 1987.

[Lee1] J. M. Lee. *Introduction to topological manifolds*, volume 202 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer, New York, second edition, 2011.

[Lee2] J. M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer, New York, second edition, 2013.

[Mil] J. Milnor. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Ann. of Math. (2)*, 64:399–405, 1956.

[Mun] J. R. Munkres. *Topology.* Prentice Hall, Inc., second edition, 2000.

[Par1] J. Parkkonen. Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi. `http://users.jyu.fi/~parkkone/DG2021/DY2019.pdf`, 2019.

[Par2] J. Parkkonen. Metriset avaruudet ja topologia. `http://users.jyu.fi/~parkkone/DG2021/MetTopo20.pdf`, 2020.

[Par3] J. Parkkonen. Algebra. `http://users.jyu.fi/~parkkone/Algebra2021/Algebra2021R.pdf`, 2021.

[Sta] R. P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Volume 1*, volume 49 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2012.

[Väi] J. Väisälä. *Topologia II*. Limes ry, 1983.