Renkaat ja kunnat 2021

Harjoitus 4: ratkaisuja

1. Osoita, että ei ole kuntahomomorfismia $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$.

Ratkaisu. Proposition 4.7 nojalla kuntahomomorfismi $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ olisi injektio. Tällöin kuvajoukko $\phi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Q}$ olisi numeroituvan joukon ylinumeroituva osajoukko, mikä on mahdotonta.[1]

2. Osoita, että ei ole kuntahomomorfismia $\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$.

Ratkaisu. Kaikille $x \in \mathbb{R}$ pätee tunnetusti $x^2 \geqslant 0$. Jos $\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ olisi kuntahomomorfismi, niin koska ϕ on homomorfismi ja $i^2 = -1$, ja Lemman 3.18 nojalla

$$\phi(i)^2 = \phi(i^2) = \phi(-1) = -1 < 0\,,$$

mikä on ristiriita.

3. Olkoon $d \in \mathbb{N}$. Osoita, että $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ on reaalilukujen kunnan alikunta ja että $\mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ on kompleksilukujen kunnan alikunta.

Ratkaisu. Jokaisella $d \in \mathbb{N}$ pätee $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ja $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$, joten joukoissa $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ja $\mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ on vähintään kaksi alkiota.

Jos $d > 0$ on kokonaisluvun neliö, niin $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \mathbb{Q}$, joten voimme olettaa seuraavissa laskuissa, että d ei ole neliö. Jos $a + b\sqrt{d}, a' + b'\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, niin

$$(a + b\sqrt{d}) - (a' + b'\sqrt{d}) = (a - a') + (b - b')\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})\,.$$

Jos $a' + b'\sqrt{d} \neq 0$ ja d ei ole neliö, niin voimme laventaa lausekkeella $a' - b'\sqrt{d}$ ja saamme

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{d})(a' + b'\sqrt{d})^{-1} &= \frac{(a + b\sqrt{d})(a' - b'\sqrt{d})}{(a')^2 - (b')^2 d} \\ &= \frac{aa' - bb'd}{(a')^2 - (b')^2 d} + \frac{ba' - ab'}{(a')^2 - (b')^2 d}\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})\,.\end{aligned}$$

Siis $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ on kunnan $\mathbb{R}$ alikunta Proposition 4.6 nojalla.

Jos $a + bi\sqrt{d}, a' + b'i\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$, niin

$$(a + bi\sqrt{d}) - (a' + b'i\sqrt{d}) = (a - a') + (b - b')i\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})\,.$$

Jos $a' + b'i\sqrt{d} \neq 0$, niin Lemman 1.25 nojalla

$$\begin{aligned}(a + bi\sqrt{d})(a' + b'i\sqrt{d})^{-1} &= \frac{(a + bi\sqrt{d})(a' - b'i\sqrt{d})}{(a')^2 + (b')^2 d} \\ &= \frac{aa' + bb'd}{(a')^2 + (b')^2 d} + \frac{a'b - ab'}{(a')^2 + (b')^2 d} i\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(i\sqrt{d})\,.\end{aligned}$$

Siis $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ on kunnan $\mathbb{R}$ alikunta Proposition 4.6 nojalla.

[1] Ari Lehtonen käsittelee umeroituvuutta ja muitakin joukko-opin asioita tekstissä `http://users.jyu.fi/~lehtonen/opetus/sl2019/Joukko-oppia.pdf`.

4. Määritä Gaussin kokonaislukujen yksiköiden ryhmä.

Ratkaisu. Olkoon $u \in \mathbb{Z}[i]^\times$. Kuvaus $\mathbf{n}\colon (\mathbb{Z}[i], \cdot) \to (\mathbb{Z}, \cdot)$ on homomorfismi, joten

$$1 = \mathbf{n}(1) = \mathbf{n}(uu^{-1}) = \mathbf{n}(u)\mathbf{n}(u^{-1})\,.$$

Siis $\mathbf{n}(u), \mathbf{n}(u^{-1}) \in \mathbb{Z}^\times \cap [0, \infty[\,=\{1\}$. Siis, jos $u = a + ib$, pätee $a^2 + b^2 = 1$. Tämän yhtälön kokonaislukuratkaisut ovat $(\pm 1, 0)$ ja $(0, \pm 1)$, joten Gaussin kokonaislukujen renkaan yksiköt ovat ± 1 ja $\pm i$.

5. Osoita, että $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ on ääretön.

Ratkaisu. Huomataan, että $\sqrt{2} \pm 1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ja

$$(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 1\,,$$

joten $\sqrt{2} \pm 1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$. Proposition 4.1 nojalla $(\sqrt{2} + 1)^k$ on yksikkö kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Jono $\big((\sqrt{2} + 1)^k\big)_{k=1}^\infty$ on aidosti kasvava, koska $\sqrt{2} + 1 > 0$, joten $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ sisältää äärettömän joukon $\big\{(\sqrt{2} + 1)^k : k \in \mathbb{N}\big\}$.

6. Osoita, että Hamiltonin kvaterniot muodostavat renkaan.

Ratkaisu. Sovelletaan alirengastestiä: Olkoot $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ -\bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$. Tällöin

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -\bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ -(\overline{b + d}) & \overline{a + c} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$$

ja

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -\bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - b\bar{d} & ad + b\bar{c} \\ -\bar{b}c - \overline{ad} & -\bar{b}d + \overline{ac} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}\,.$$

Lisäksi $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1_{\mathrm{M}_2(\mathbb{C})} \in \mathbb{H}$, joten alirengastestin nojalla $\mathbb{H}$ on renkaan $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ alirengas.

7. Olkoon K kommutatiivinen rengas. Osoita, että
(1) $a \mid a$ kaikille $a \in K$.
(2) Jos $a \mid b$ ja $b \mid c$, niin $a \mid c$.
(3) Jos $a \mid b$ ja $a \mid c$, niin $a \mid b + c$.

Ratkaisu. (1) Seuraa siitä, että $a = 1a$.
(2) Jos $a \mid b$, niin on $x \in K$, jolle $b = xa$. Jos $b \mid c$, niin on $y \in K$, jolle $c = yb$. Siis $c = y(xa) = (yx)a$, joten $a \mid c$.
(3) Jos $a \mid b$ ja $a \mid c$, niin on $x \in K$, jolle $b = xa$ ja $y \in K$, jolle $c = ya$. Siis

$$b + c = xa + ya = (x + y)a\,,$$

joten $a \mid b + c$.

8. Todista Propositio 5.6.

Ratkaisu. Olkoon K kokonaisalue. Olkoot $a, b, c \in K$ siten, että $a \neq 0$ ja $ab = ac$. Distributiivisuuden nojalla $a(b - c) = 0$. Koska kokonaisalueessa K ei ole nollan jakajia, pätee $b - c = 0$, joten $b = c$.

Oletetaan sitten, että kommutatiivisessa renkaassa K pätee renkaan supistussääntö. Olkoot $a, b \in K$ siten, että $ab = 0$. Jos $a \neq 0$, niin $ab = a\,0$, joten supistussäännön nojalla $b = 0$. Siis kommutatiivisessa renkaassa K ei ole nollan jakajia, joten se on kokonaisalue.