Ryhmät 2021

Harjoitus 1: ratkaisuja

1. Olkoon $(G, *)$ ryhmä. Määritellään uusi laskutoimitus $\circledast$ joukossa G asettamalla

$$a \circledast b = b * a$$

kaikille $a, b \in G$. Osoita, että $(G, \circledast)$ on ryhmä.

Ratkaisu. Osoitetaan, että ryhmän määritelmän kolme ehtoa toteutuu.

Olkoot $a, b, c \in G$. Tällöin laskutoimituksen $\circledast$ määritelmän nojalla $a \circledast (b \circledast c) = (c * b) * a$. Laskutoimitus $*$ on assosiatiivinen, joten $(c * b) * a = c * (b * a)$, ja laskutoimituksen $\circledast$ määritelmän nojalla saadaan $c * (b * a) = (a \circledast b) \circledast c$. Yhdistämällä nämä yhtälöt saadaan haluttu yhtälö $a \circledast (b \circledast c) = (a \circledast b) \circledast c$, joten $\circledast$ on assosiatiivinen.

Olkoon $e \in G$ laskutoimituksen $*$ neutraalialkio. Tällöin $e \circledast g = g * e = g$ ja $g \circledast e = e * g = g$ kaikille $g \in G$. Siis e on laskutoimituksen $\circledast$ neutraalialkio.

Olkoon $g \in G$. Koska $(G, *)$ on ryhmä, on $\underline{g} \in G$, jolle pätee $g * \underline{g} = e = \underline{g} * g$. Mutta tästä seuraa $\underline{g} \circledast g = g * \underline{g} = e = \underline{g} * g = g \circledast \underline{g}$, joten $\underline{g}$ on alkion $g \in G$ käänteisalkio laskutoimituksella varustetussa joukossa $(G, \circledast)$.

2. Todista Lemma 8.6.

Ratkaisu. Olkoon $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ äärellinen ryhmä, jossa on n alkiota ja olkoon $g \in G$. Alkion g rivillä laskutaulussa on alkiot $gg_1, gg_2, \ldots, gg_n$. Jos $gg_i = gg_j$ joillain $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, niin supistussäännön nojalla $g_i = g_j$. Siis rivillä on n eri alkiota, joten kaikki esiintyvät joka rivillä. Sarakkeet käsitellään samaan tapaan.

3. Olkoon G ryhmä ja olkoon $e \in G$ neutraalialkio. Oletetaan, että jokaiselle $g \in G$ pätee $g^2 = e$. Osoita, että G on kommutatiivinen ryhmä.

Ratkaisu. Olkoot $x, y \in G$. Oletuksen mukaan kaikille $x, y \in G$ pätee $x^2 = y^2 = (xy)^2 = e$, siis $xy = x(xy)^2y = x^2yxy^2 = yx$.

4. Olkoon $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ äärellinen kommutatiivinen ryhmä ja olkoon $e = f_1$ neutraalialkio. Olkoon $a = f_1 f_2 \cdots f_n$ kaikkien ryhmän F alkioiden tulo. Osoita, että $a^2 = e$. Keksi esimerkki, jossa $a = e$ ja toinen esimerkki, jossa $a \neq e$.[1]

Ratkaisu. Jokaisella ryhmän F alkiolla on käänteisalkio. Jos $f_i^{-1} = f_{i'} \neq f_i$ kaikilla $2 \leqslant i \leqslant n$, niin kommutatiivisuuden nojalla $a = e$. Tällöin $\#F$ on pariton. Olkoon $J = \{2 \leqslant i \leqslant n : f_i^{-1} = f_i\}$. Tällöin $a = f_1 f_2 \cdots f_n = \prod_{j \in J} f_j$ ja kommutatiivisuuden nojalla $a^2 = \prod_{j \in J} f_j^2 = e$.

[1] Tässä tehtävässä käytetään multiplikatiivista merkintää mutta esimerkissä laskutoimitus voi olla myös $+$. Tällöin tarkastellaan siis kommutatiivisen ryhmän kaikkien alkoiden summaa.

5. Varustetaan joukko $A = \{a, b, c, d, e\}$ laskutoimituksella $*$, jonka laskutaulu on

$*$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	c	e	d	b
b	b	d	c	a	e
c	c	e	d	b	a
d	d	b	a	e	c

Pätevätkö supistussäännöt laskutoimituksella varustetussa joukossa $(A, *)$? Onko $(A, *)$ ryhmä?

Ratkaisu. Supistussäännöt pätevät, koska kaikki ryhmän alkiot esiintyvät jokaisella rivillä ja jokaisella sarakkeella.[2] Laskutoimituksella varustettu joukko $(A, *)$ ei ole ryhmä: Laskutaulusta näkee, että e on neutraalialkio. Lisäksi $ab = e$, joten Proposition 8.3(3) nojalla pitäisi olla $ba = e$ mutta laskutaulun mukaan $ba = d$.

6. Monellako eri tavalla voit täydentää taulukon

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a		
b	b		

niin, että tuloksena on ryhmän laskutaulu? Mitä voit päätellä tästä havainnosta?

Ratkaisu. On vain yksi tapa täydentää laskutaulu siten, että kaikki alkiot esiintyvät jokaisella rivillä ja jokaisella sarakkeella:

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Jos nimittäin valitsisimme $a * a = e$, pitäisi olla $a * b = b$ ja tällöin b olisi viimeisessä sarakkeessa kahdesti. Laskutaulun mukaan e on neutraalialkio ja $ab = ba = e$, joten jokaisella alkiolla on käänteisalkio. Koska alkioita on vain kolme, on helppo tarkastaa, että saadun laskutaulun kuvaama laskutoimitus on assosiatiivinen.

Päätelmän voi tehdä loppuun toisellakin tavalla. Päättelimme juuri, että on korkeintaan yksi ryhmä, jossa on kolme alkiota e, a ja b. Toisaalta tiedämme, että $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ on ryhmä. Sen laskutaulu on

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Laskutaulussa käytetään kongruenssiluokan $k + 3\mathbb{Z}$ merkintänä edustajaa $k \in \mathbb{Z}$.

Määritellään kuvaus $f\colon \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \{e, a, b\}$ asettamalla $f(0 + 3\mathbb{Z}) = e$, $f(1 + 3\mathbb{Z}) = a$ ja $f(2 + 3\mathbb{Z}) = b$. Laskutauluja vertaamalla. näemme, että $f\colon (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +) \to (\{e, a, b\}, *)$ on isomorfismi, joten $(\{e, a, b\}, *)$ on ryhmä.

[2] Vertaa Proposition 8.6 todistukseen.

7. Olkoon G kommutatiivinen ryhmä. Osoita, että kuvaus $\psi\colon G \times G \to G$,

$$\psi\big((g,h)\big) = gh^{-1}$$

on homomorfismi.

Ratkaisu. Olkoot $(g_1,h_1),(g_2,h_2) \in G \times G$. Tällöin

$$\begin{aligned}\psi\big((g_1,h_1)(g_2,h_2)\big) &= \psi\big((g_1g_2,h_1h_2)\big) = (g_1g_2)(h_1h_2)^{-1} \\ &= g_1g_2h_2^{-1}h_1^{-1} = g_1h_1^{-1}g_2g_2^{-1} = \psi\big((g_1,h_1)\big)\psi\big((g_2,h_2)\big)\,.\end{aligned}$$

8. Olkoon G ryhmä ja olkoon $a \in G$. Olkoon $\phi_a\colon G \to G$,

$$\phi_a(g) = aga^{-1}\,.$$

Osoita, että ϕ_a on ryhmän G automorfismi.

Ratkaisu. Olkoot $g,h \in G$. Tällöin $\phi_a(gh) = agha^{-1} = aga^{-1}aha^{-1} = \phi_a(g)\phi_a(h)$. Siis ϕ_a on homomorfismi. Huomataan, että

$$\phi_{a^{-1}} \circ \phi_a(g) = a^{-1}aga^{-1}a = g$$

ja

$$\phi_a \circ \phi_{a^{-1}}(g) = aag^{-1}aa^{-1} = g$$

kaikilla $g \in G$, joten $\phi_{a^{-1}} = \phi_a^{-1}$. Siis ϕ_a on automorfismi.