Renkaat ja kunnat 12.1.2021

Määr. Kuvaus $* : A \times A \to A$ on laskutoimitus. $(A, *)$ on laskutoim. var. joukko.

Esim. pistetulo $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ei ole laskutoimitus.

vektoritulo $\times : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on laskutoimitus $\longrightarrow$ Harj. 1.2.3.

Määr. $(E, *)$, $(E', \circledast)$ laskut. var. joukkoja, $f : (E, *) \to (E', \circledast)$ on **homomorfismi**, jos $f(a * b) = f(a) \circledast f(b) \quad \forall\, a, b \in E$

Esim. $\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, \cdot)$, $\exp(x) = e^x$. on homomorfismi.

$$\exp(x+y) = e^{x+y} \underset{\text{JMA}}{=} e^x e^y = \exp(x) \cdot \exp(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Toinen versio tästä esimerkistä: $\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\underbrace{]0, \infty[}_{(\mathbb{R}, \cdot)\text{:n vakaa osajoukko}}, \cdot)$ JMA: bijektio.

$\exp^{-1} = \log : (]0, \infty[, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$

$$\log(s \cdot t) \underset{\text{JMA}}{=} \log(s) + \log(t) \quad \forall\, s, t \in]0, \infty[$$

log on homomorfismi.

Prop. 1.8. 1) Olk. $(A, *)$, $(B, \circledast)$, $(C, \square)$ laskut. var. joukkoja
ja $f: (A, *) \to (B, \circledast)$ homom.
$g: (B, \circledast) \to (C, \square)$ —"—.
Tällöin $g \circ f: (A, *) \to (C, \square)$ on homomorfismi.

2) Olk $\varphi: (A, *) \to (B, \circledast)$ on isomorfismi.
homom. ja bijektio
Tällöin $\varphi^{-1}: (B, \circledast) \to (A, *)$ on homomorfismi.
isomorfismi

Lemma = tekninen pieni tulos
Propositio = keskisuuri tulos
Lause = iso tulos

Tod. 1) Harj.

2) Olk. $b_1, b_2 \in B$. φ bij $\Rightarrow$ φ on surj $\Rightarrow$ $\exists\ a_1, a_2 \in A$: $\varphi(a_1) = b_1$, $\varphi(a_2) = b_2$.

$a_1 = \varphi^{-1}(b_1)$, $a_2 = \varphi^{-1}(b_2)$

$$\Rightarrow b_1 = \varphi(\varphi^{-1}(b_1)), \quad b_2 = \varphi(\varphi^{-1}(b_2)).$$

$$\Rightarrow b_1 \circledast b_2 = \varphi(\varphi^{-1}(b_1)) \circledast \varphi(\varphi^{-1}(b_2)) \underset{\varphi \text{ homom.}}{=} \varphi(\varphi^{-1}(b_1) * \varphi^{-1}(b_2))$$

φ bijektio $\Rightarrow$ $\varphi^{-1}(b_1 \circledast b_2) = \varphi^{-1}(b_1) * \varphi^{-1}(b_2)$. $\square$

Määr. Olk. $(A,*)$ laskut. var. joukko.

$*$ on <u>assosiatiivinen</u> eli <u>liitännäinen</u>, jos $(a*b)*c = a*(b*c)\ \forall a,b,c \in A$.

$*$ on <u>kommutatiivinen</u> eli <u>vaihdannainen</u>, jos $a*b = b*a\ \forall a,b \in A$.

Esim.

- $\mathbb{R}$:n $+$ ja $\cdot$ ovat assos. ja komm.

  $(a+b)+c = a+(b+c)\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$.

  $(ab)c = a(bc)$ —"— .

- $M_n(\mathbb{R}) = \{n\times n\text{-matriisit}\}$. $M_n(\mathbb{R})$:n $+$ on assos ja komm. (LAG)

  $\cdot$ on assos mutta ei komm:

  $(AB)C = A(BC)\ \forall A,B,C \in M_n(\mathbb{R})$

Lähes kaikki laskut. tällä kurssilla ovat assos

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix} \neq$$
$$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$$

Jos laskutoimitus ei ole komm., älä merkitse sitä $+$:lla

Prop. 1.10 Olk. $h : (E, *) \to (E', \circledast)$ surjektiivinen homomorfismi. Tällöin

1) Jos $*$ on komm, niin $\circledast$ on komm.
2) Jos $*$ on assos., niin $\circledast$ on assos. Tod. Harj.

Tod. 1) Olk. $a', b' \in E'$. h surj $\Rightarrow \exists\, a, b \in E$ s.e. $h(a) = a'$ ja $h(b) = b'$.

$$a' \circledast b' = h(a) \circledast h(b) \underset{\substack{\uparrow \\ h \text{ homom.}}}{=} h(a * b) \underset{\substack{\uparrow \\ * \text{ komm.}}}{=} h(b * a) \underset{\substack{\uparrow \\ h \text{ homom.}}}{=} h(b) \circledast h(a) = b' \circledast a'. \quad \square$$

Määr. Olk $(A, *)$ laskut. var. joukko.

$e \in A$ on $*$:n vasen neutraalialkio, jos $e * a = a \quad \forall\, a \in A$

— " — oikea neutraalialkio, jos $a * e = a \quad \forall\, a \in A$.

$e \in A$ on $*$:n neutraalialkio (n.a.), jos se on vasen ja oikea neutraalialkio.

Esim. $0 \in (\mathbb{R}, +)$ on n.a.

$1 \in (\mathbb{R}, \cdot)$ on n.a.

$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in (M_n(\mathbb{R}), \cdot)$ n.a.

Prop. 1.13 Olk. $(A, *)$ laskut. var. joukko, $e \in (A,*)$ vasen n.a.
$e' \in (A,*)$ oikea n.a.

Tällöin $e = e'$ ja e on n.a.

Tod.

$$e \underset{\uparrow}{=} e * e' \underset{\uparrow}{=} e' . \quad \square$$

e' on oikea n.a.

e on vasen n. a.

Seuraus laskut. var. joukon n.a. on 1-käsitteinen
(Laskutoimituksella on korkeintaan 1 n.a.)

tämä oletus tarvitaan! ks. Esim. 1.16

Prop. 1.15 Olk. $h : (E,*) \to (E', \circledast)$ surj. homomorfismi. Jos $e \in E$ on $*$:n n.a., niin $h(e) \in E'$ on $\circledast$:n n.a.

Tod. Olk. $g' \in E'$. h surj $\Rightarrow \exists\, g \in E : h(g) = g'$.

$$h(e) \circledast g' = h(e) \circledast h(g) \underset{\uparrow}{=} h(e * g) \underset{\uparrow}{=} h(g) = g' \Rightarrow h(e) \text{ on vasen n.a.}$$

h homom. e n.a

Vast. os. että $h(e)$ on oikea n.a. $\square$

Määr. $(A,*)$ laskut. var. joukko, $e \in (A,*)$ n.a. Olk. $x \in A$.

$\bar{x} \in A$ on x:n vasen käänteisalkio, jos $\bar{x} * x = e$

— " — oikea käänteisalkio, jos $x * \bar{x} = e$.

Jos $\bar{x}$ on x:n vasen ja oikea käänteisalkio, niin $\bar{x}$ on x!n käänteisalkio.

Esim. Jos $x \in (\mathbb{R},+)$, niin $\exists\, -x \in \mathbb{R}$: $\underbrace{x+(-x)}_{x-x} = 0 = (-x)+x$ ← t:n n.a.

Siis x!n vastaluku on sen käänteisalkio $(\mathbb{R},+)$:ssa

Merkintöjä Jos laskut on $+$, niin x:n käänteisalkiota merk. usein $-x$.

Muuten x:n käänteisalkiota merk. usein x^{-1}.

Prop. 1.19 Olk. $*$ joukon X $\boxed{\text{assos.}}$ laskutoimitus. Jos alkiolla $g \in (X,*)$ on käänteisalkio, niin käänteisalkio on 1-käsitteinen.

(g:llä on korkeintaan 1 käänteisalkio).

Tod. Harj.

6

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	e
b	b	e	b

<u>Esim.</u> $(\{e, a, b\}, *)$ e. n.a.

Jos $*$:n laskutaulu on , niin a:lla on 2 käänteisalkiota.