JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Harjoitusten 9 alustavat ratkaisut **Topologiset vektoriavaruudet 2010**

9.1. *Olkoon* $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *ja* $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. *Osoita laskemalla tai kumoa, että*

$$D(f\Lambda) = Df\,\Lambda + f\,D\Lambda.$$

Distribuution $\Lambda \in D^*$. derivaatta on distribuutio $D\Lambda := -\Lambda \circ D$, ts.

$$\langle \varphi, D\Lambda \rangle := -\langle D\varphi, \Lambda \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Lasketaaan:

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, D(f\Lambda) \rangle &= -\langle D\varphi, f\Lambda \rangle \\
&= -\langle fD\varphi, \Lambda \rangle \\
&= -\langle D(f\varphi) - (Df)\varphi, \Lambda \rangle \\
&= -\langle D(f\varphi), \Lambda \rangle + \langle \varphi(Df), \Lambda \rangle \\
&= \langle f\varphi, D\Lambda \rangle + \langle \varphi, (Df)\Lambda \rangle \\
&= \langle \varphi, fD\Lambda \rangle + \langle \varphi, (Df)\Lambda \rangle = \langle \varphi, Df\,\Lambda + f\,D\Lambda \rangle.
\end{aligned}$$

9.2. *Avaruus* $\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ *on varustettu heikolla topologialla. Oleta, että* $(f_n)_\mathbb{N} \to f$ *on suppeneva jono Fréchet-avaruudessa* $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *(Seminormeina derivaattojen sup-normit kompakteissa joukoissa) ja jono* $(\Lambda_n)_\mathbb{N} \to \Lambda$ *on suppeneva jono distribuutioiden avaruudessa* $\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$. *Osoita, että* $(f_n\Lambda_n)_\mathbb{N} \to f\Lambda$ *on suppeneva jono distribuutioiden avaruudessa* $\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$.

Avaruudessa $\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ on käytössä heikko topologia $w^* = \sigma(\mathcal{D}(\mathbb{R})^*, \mathcal{D}(\mathbb{R}))$. Oletus $\Lambda_n \to \Lambda$ merkitsee, että kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pätee

$$\langle \varphi, \Lambda_n \rangle \to 0.$$

Avaruudessa $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \supset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ovat seminormeina derivaattojen sup-normit kompakteissa joukoissa. Oletus $f_n \to f$ merkitsee, että kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja kompakteilla $K \subset \mathbb{R}$ pätee

$$\sup_K |D^k f| \to 0.$$

Distribuution ja funktion tulo on määritelty tehtävässä (1) käytetyllä tavalla. Väite merkitsee, että kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pätee

$$\langle \varphi, f_n\Lambda_n \rangle = \langle f_n\varphi, \Lambda_n \rangle \to 0.$$

Kuvaus $f_n \mapsto f_n\varphi$ on jatkuva $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}(\mathbb{R})$, joten $f_n\varphi \to f\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Kiinteällä $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ bilineaarikuvaus

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}(\mathbb{R})^* \to \mathbb{C} : (f, \Lambda) \mapsto \langle \varphi, f\Lambda \rangle = \langle f\varphi, \Lambda \rangle$$

on siis kummankin muuttujansa funktiona erikseen jatkuva. Seuraava lemma osoittaa, että tämä takaa sen jonojatkuvuuden mikä riittääkin.

Lemma 9.1. *(Tehtävään 9.2 Olkoon* $B : E \times F \to \mathbb{R}$ *bilineaarikuvaus;* E *ja* F *Fréchet-avaruuksia. (Riittää, että* E *on Fréchet.) Seuraavat ovat yhtäpitäviä.*

a) *B on (jono)jatkuva. (tulotopologiassa!) (origossa)*

b) *B on kummankin muuttujansa suhteen (jono)jatkuva. (origossa)*

Todistus. Tietenkin a) $\implies$ b) Olkoon siis voimassa b) ja tutkittavana jono $(x_n, y_n) \to 0 \in E \times F$ eli $x_n \to 0 \in E$ ja $y_n \to 0 \in F$. Osoitetaan, että $B(x_n, y_n) \to 0 \in \mathbb{R}$.

Olkoon $U \in \mathcal{U}_{\mathbb{R}}$.

Kiinteällä $x \in E$ jono $B(x, y_n) \subset \mathbb{R}$ on suppeneva, siis rajoitettu. Jokainen kuvaus $x \mapsto B(x, y_n)$ on jatkuva, joten $\{x \mapsto B(x, y_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ on pisteittäin rajoitettu perhe jatkuvia lineaarikuvauksia Tasaisen rajoituksen periaatteen mukaan tällainen perhe on yhtäjatkuva, joten on olemassa origon ympäristö $W \in \mathcal{U}_E$ siten, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ ja $x \in W$ on $B(x, y_n) \in U$. Valitaan $n_U \in \mathbb{N}$ siten, että $n \geq n_U \implies x_n \in W$, jolloin $B(x_n, y_n) \in U$.

$\square$

9.3. *Olkoon $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ distribuutio. Olkoon*

$$W = \bigcup \{\omega \overset{avoin}{\subset} \Omega \mid \langle f, \Lambda \rangle = 0, \ \textit{kun} \ \operatorname{supp} f \subset \omega\}.$$

Osoita, että $\langle f, \Lambda \rangle = 0$, kun $\operatorname{supp} f \subset W$. (Vihje: Ykkösen ositus.)

$\{\omega \overset{\text{avoin}}{\subset} \Omega \mid \langle f, \Lambda \rangle = 0, \text{ kun } \operatorname{supp} f \subset \omega\} = (\omega_i)_{i \in I}$ on perhe avoimia joukkoja $\omega_i \subset \mathbb{R}$ ja $W = \bigcup_{i \in I} \omega_i$. Tehtävän 9.6. (ykkösen ositus) mukaan on olemassa jono funktioita $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ siten, että

a) $\forall n \in \mathbb{N} \, \exists i \in I$ siten, että $\operatorname{supp} \psi_n \subset \omega_i$.
b) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \psi_n = 1$ joukossa W.
c) Jokaista kompaktia $K \subset W$ kohti on olemassa avoin $A \supset K$ ja luku $m \in \mathbb{N}$ siten, että $\sum_{n=1}^{m} \psi_n = 1$ joukossa A.

Olkoon $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ja $K = \operatorname{supp} f \subset W$. Koska K on kompakti, kohta c) soveltuu. Voi olettaa, että $A \subset W$. (Leikkaa W:llä jos tarvitaan.) Joukossa A on

$$f = f \cdot 1 = \sum_{n=1}^{m} \psi_n f,$$

ja A:n ulkopuolellakin $f = \sum_{n=1}^{m} \psi_n f$, nimittäin 0. Siis

$$\langle f, \Lambda \rangle = \sum_{n=1}^{m} \langle \psi_n f, \Lambda \rangle.$$

Mutta jokainen $\langle \psi_n f, \Lambda \rangle$ on 0, koska $\operatorname{supp} \psi_n f \subset \operatorname{supp} \psi_n \subset \omega_i$ jollain $i \in I$. $\square$

9.4. *Olkoon $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ distribuutio. Osoita, että*

a) *Jos $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ja $\operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} \Lambda = \emptyset$, niin $\langle \varphi, \Lambda \rangle = 0$.*
b) *Jos $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ja $\psi(x) = 1$ jossain avoimessa joukossa $A \supset \operatorname{supp} \Lambda$, niin $\Lambda \psi = \Lambda$.*

a) Määritelmän mukaan $\operatorname{supp} \Lambda = \mathbb{R} \setminus W$, missä

$$W = \bigcup \{\omega \overset{\text{avoin}}{\subset} \Omega \mid \langle f, \Lambda \rangle = 0, \text{ kun } \operatorname{supp} f \subset \omega\}.$$

Jos siis $\operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} \Lambda = \emptyset$, niin $\operatorname{supp} f \subset W$, joten edellisen tehtävän nojalla $\langle f, \Lambda \rangle = 0$

b) Olkoon $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ja $\psi(x) = 1$ jossain avoimessa joukossa $A \supset \operatorname{supp}\Lambda$. Näytetään, että $\Lambda\psi - \Lambda = 0$. Koska $\psi(x) = 1$ joukossa $A \supset \operatorname{supp}\Lambda$, niin kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ja $x \in A$ on

$$\varphi(x) - (\psi\varphi)(x) = \varphi(x) - (1\varphi)(x) = 0.$$

Siis $\operatorname{supp}(\varphi - \psi\varphi) \cap \operatorname{supp}\Lambda = \emptyset$. Kohdan a) nojalla on siis

$$\langle \varphi - \psi\varphi, \Lambda \rangle = 0 \text{ eli}$$

$$\langle \varphi, \Lambda \rangle = \langle \psi\varphi, \Lambda \rangle = \langle \varphi, \psi\Lambda \rangle \text{ kaikilla } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

$\square$

9.5. *Olkoon $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ja $K_B(0,r)$ 0–keskinen kompakti väli. Oletetaan, että $D^k\varphi(0) = 0$ kaikilla $k = 0, 1, \dots, N$ ja $\|D^N\varphi\big|_K\|_\infty \le \eta$. Osoita, että tällöin on kaikilla $k \le N$ ja $x \in K$*

$$|D^k\varphi(x)| \le \eta|x|^{N-k}.$$

$K = [-r, r]$, ts. $x \in K \iff |x| \le r$. Oletus: $D^k\varphi(0) = 0$ kaikilla $k = 0, 1, \dots, N$ ja $\|D^N\varphi\big|_K\|_\infty \le \eta$.

Induktio:
I) $(n = 0)$: $\|D^N\varphi\big|_K\|_\infty \le \eta$ antaa kaikilla $x \in K$: $|D^{N-0}\varphi(x)| \le \eta|x|^{N-(N-0)}$.
II) Induktio-oletus: kaikilla $x \in K$: $|D^{N-k}\varphi(x)| \le \eta|x|^{N-(N-k)}$.
Induktio-väite: kaikilla $x \in K$: $|D^{N-k-1}\varphi(x)| \le \eta|x|^{N-(N-k-1)}$. (kunnes $k = N$)
Askel: kun $0 < x < r$, niin — koska $D^k\varphi(0) = 0$ kaikilla $k = 0, 1, \dots, N$ —

$$\begin{aligned} |D^{N-k-1}\varphi(x)| &= |\int_0^x D^{N-k}\varphi(t)\,dt| \\ &\le \int_0^x |D^{N-k}\varphi(t)|\,dt \\ &\le \int_0^x \eta|t|^{N-(N-k)}\,dt \\ &= \eta\int_0^x t^k\,dt = \eta\tfrac{1}{k}x^{k+1} \end{aligned}$$

Samoin negatiivisille.

Pystytkö yleistämään?

(Rudinin mukaan n-ulotteinen (älä sekoita induktioindeksiini) versio on origokeskisessä pallossa $\supset K$ on: Oletus kaikille multi-indekseille α, joilla $|\alpha| = N$: $|D^\alpha\varphi| \le \eta$. Väite: kaikille multi-indekseille α, joilla $|\alpha| \le N$ ja kaikille $x \in K$:

$$|D^\alpha\varphi(x)| \le \eta n^{N-|\alpha|}|x|^{N-|\alpha|}.$$

Tapaus n=1 osoitaa, että tässä on varmaan painovirhe.

9.6. *Olkoon* $(\omega_i)_{i\in I}$ *perhe avoimia joukkoja* $\omega_i \subset \mathbb{R}$ *ja* $\Omega = \bigcup_{i\in I} \omega_i$. *Silloin on olemassa jono (!) funktioita* $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *siten, että*

a) $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists i \in I$ *siten, että* $\operatorname{supp} \psi_n \subset \omega_i$.
b) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \psi_n = 1$ *joukossa* Ω.
c) *Jokaista kompaktia* $K \subset \Omega$ *kohti on olemassa avoin* $A \supset K$ *ja luku* $m \in \mathbb{N}$ *siten, että* $\sum_{n=1}^{m} \psi_n = 1$ *joukossa* A.

Vihje: Klassista reaalianalyysiä. Voit verrata (muihin) ykkösen osituksiin ja kerrata/etsiä muita samantapaisia lauseita.

Tehtiin vain taululle .

9.7. (Ylimääräinen, jos ehditään ja kiinnostaa) Vertaa, mitä yhteistä ja eroa on tasaisen rajoituksen periaatteella ja Arzela-Ascolin lauseella. Onko todistuksilla yhteisisä piirteitä?

Ei ehditty/kiinnostanut vielä