Harjoitusten 8 ratkaisut **Topologiset vektoriavaruudet 2010**

8.1. *Olkoon* $P_n = \{f : \mathbb{K} \to \mathbb{K} \mid p$ *on enintään asteen* $n-1$ *polynomi*$\}$ *varustettuna luonnollisella äärellisulotteisen vektoriavaruuden rakenteellaan ja ainoalla lokaalikonveksilla Hausdorff- topologiallaan. Olkoon* $P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n = \{f : \mathbb{K} \to \mathbb{K} \mid p$ *on polynomi*$\}$ *varustettuna tarkan induktiivisen limeksen rakenteella:* $P = \varinjlim P_n$*. Onko* P *metrisoituva tässä topologiassa* τ*? Onko* P *Montelin avaruus?*

Äärellisulotteisen avaruuden Hausdorff-tva-topologia on yksikäsitteinen. Esimerkin topologian voi määritellä vaikka sup-normina tai normina $\| \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n \| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$.

Koska jokainen P_n on äärellisulotteinen, se on tietenkin Banachin avaruus, joten P on $\mathcal{LB}$- avaruus ja siten bornologinen Montelin avaruus. (Muista: Tynnyriavaruus, jossa jokainen suljettu, rajoitettu joukko on kompakti, on *Montelin avaruus*, erityisesti äärellisluotteinen(!) normiavaruus on bornologinen Montelin avaruus (Heine-Borel)). Siis myös P on bornologinen Montelin avaruus, koska nämä ominaisuudet periytyvät tarkalle induktiiviselle limekselle **??**. Sisäpisteettömien suljettujen osajoukkojensa yhdisteenä P_n on Bairen 1 kategoriaa, ja täydellisyytensä vuoksi siis metrisoitumaton.

8.2. *(jatkoa) Tarkastellaan avaruudessa* P *myös lokaalikonveksia topologiaa* τ_0*, jonka määräävät seminormit* $q_k(\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i x^i) = |\lambda_k|$*. Onko tämä topologia metrisoituva? Entä Montel? Onko toinen topologioista* τ *ja* τ_0 *hienompi kuin toinen?*

Topologia τ_0 on tietenkin metrisoituva, määräytyyhän se numeroituvasta seminormiperheestä. Koska luonnolliset injektiot $P_i \to P$ ovat jatkuvia myös topologiassa τ_0, on τ on hienompi kuin τ_0. Koska topologiat eivät ole samat, on τ aidosti hienompi kuin τ_0. $\square$

8.3. *Osoita, että funktioavaruudet* $\mathcal{D}_K(\Omega)$ *ja* $\mathcal{D}(\Omega)$ *ovat Montelin avaruuksia.*

Koska $\mathcal{D}(\Omega)$ on tarkka induktiivinen limes avaruuksista $\mathcal{D}_K(\Omega)$, riittää osoittaa, että avaruudet $D_K(\Omega)$ ovat Montelin avaruuksia. Fréchet-avaruuksina ne ovat tynnyriavaruuksia, joten riittää todistaa, että niillä on Heine-Borel-ominaisuus eli jokainen suljettu, rajoitettu joukko on kompakti. Olkoon siis $H \subset D_K(\Omega) \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ suljettu ja rajoitettu. Olkoon $f \in H$ ja x_1 ja $x_2 \in K$.

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \|Df\|_\infty |x_1 - x_2|.$$

(Laskettu avaruudessa $\mathbb{R}^1$, kuten on sovittu. Toimii kyllä yleisemminkin.) Ylemmille derivaatoille saadaan samaan tapaan

$$|D^k f(x_1) - D^k f(x_2)| \leq \|D^{k+1} f\|_\infty |x_1 - x_2|.$$

Ascolin lauseen mukaan, koska $\mathbb{R}$ on täydellinen metrinen ja K kompakti metrinen ja $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(K, X) = \{f : K \to X \mid f$ on jatkuva$\}$, niin seuraavat ovat yhtäpitäviä:

(1) $\mathcal{H}$ on relatiivisesti kompakti eli $\overline{\mathcal{H}}$ on kompakti **sup-normin** suhteen.
(2) (a) $\mathcal{H}$ on yhtäjatkuva.
  (b) $\mathcal{H}(x) \subset \mathbb{R}$ on relatiivisesti kompakti eli rajoitettu (ollaanhan $\mathbb{R}$:ssä) kaikilla $x \in K$.

Selvästi ensimmäinen todistamamme yhtälö implikoi ehdot (a) ja (b), joten (sup-normissakin!) suljettu joukon H sukeuma **sup-normin** suhteen $\overline{\mathcal{H}}$ on kompakti **sup-normin** suhteen. Sama konstruktio ja vastaava tulos toimii alemman yhtälön nojalla myös derivaattojen sup-normeille. Näistä tiedoista on ehkä hankalaa todistaa suoraan, että H on kompakti lokaalikonveksissa topologiassaan, jonka virittävät kaikki derivaattojen sup-normit $\|D^n f\|_\infty$, mutta koska tämä topologia on metrisoituva, niin riittää todistaa, että H on täysrajoitettu:

Tämän topologian määrittelee myös kasvava normien jono $|||\cdot|||_n = \|\cdot\|_\infty + \|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2 + \cdots + |||\cdot\|_n$. Olkoon $\epsilon > 0$. Jo todistetun perusteella H sisältyy johonkin kompaktiin, siis erityisesti täysrajoitettuun joukkoon jokaisen normin $\|f\|_n = \|D^n f\|_\infty$ mielessä erikseen, joten on kullakin $n \in \mathbb{N}$ olemassa H:n (äärellinen!) peite osajoukoilla $H_{n,i} \subset H,\ i = 1, 2, \ldots m_n$ siten, että kunkin peitepalan $H_{n,i}$ halkaisija $\|\cdot\|_n$-mielessä on enintään ϵ:

$$\|D^n f - D^n g\|_n < \epsilon \text{ kaikilla } f, g \in H_{n,i}.$$

Tavoitteena on konstruoida H:n (äärellinen!) peite osajoukoilla $H_{n,i} \subset H,\ i = 1, 2, \ldots m_n$ siten, että kunkin peitepalan $H_{n,i}$ halkaisija $|||\cdot|||_n$-mielessä on enintään ϵ.

Tällaisen peitteen muodostavat leikkaukset $H_{0,i_0} \cap H_{1,i_1} \cap \cdots \cap H_{n,i_n}$, missä indeksit i_j käyvät läpi kaikki mahdolliset arvot, siis kukin $i_j \in \{1, \ldots, m_j\}$. (!) $\square$

8.4. *Todista, että $\mathbb{C}^\infty$–funktion f derivatta on sama kuin sen distribuutioderivaatta — oikein tulkittuna.*

8.5. *Osoita, että distribuutioderivaatan mielessä*

$$\frac{d}{dx} \log |x| = v.p. \frac{1}{x}.$$

Merkintä v.p. (value principale) tarkoittaa Cauchyn pääarvoa integraalille. Joukossa $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ lokaalisti integroituvalle funktiolle määritellään

$$v.p. \int_\infty^\infty f = \lim_{\epsilon \to 0+} \left(\int_\infty^{-\epsilon} f + \int_\epsilon^\infty f \right)$$

Distribuutiona merkintä v.p.f tarkoittaa lineaarimuotoa

$$\mathcal{D} \to \mathbb{R} : \varphi \mapsto \langle \varphi, v.p.f \rangle = v.p \int_\infty^\infty f\varphi.$$

Distribuutioderivaatan määritelmän mukaan $\langle D\log|x|,\varphi\rangle = -\langle \log|x|, D\varphi\rangle$. Koska $\log|x|$ on lokaalisti integroituva joukossa $\mathbb{R}$[1], on oikea puoli tulkittavissa distribuutioksi integraalina $-\int_{-\infty}^{\infty}\log|x|\;D\varphi\,dx$ ja saamme:

$$
\begin{aligned}
\langle D\log|x|,\varphi\rangle &= -\int_{-\infty}^{\infty}\log|x|\;D\varphi\,dx\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\big(-\int_{-\infty}^{-\epsilon}\log|x|\;D\varphi\,dx - \int_{\epsilon}^{\infty}\log|x|\;D\varphi\,dx\big)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0+}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx - \Big|_{-\infty}^{-\epsilon}\log|x|\;\varphi(x) + \int_{\epsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx - \Big|_{\epsilon}^{\infty}\log|x|\;\varphi(x)\right)\\
&= v.p.\int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx - \lim_{\epsilon\to 0+}\left(\Big|_{-\infty}^{-\epsilon}\log|x|\;\varphi(x) - \Big|_{\epsilon}^{\infty}\log|x|\;\varphi(x)\right)\\
&= v.p.\int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx - \lim_{\epsilon\to 0+}\big(\log(\epsilon)\,(\varphi(-\epsilon)-\varphi(\epsilon))\big) = v.p.\int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx.
\end{aligned}
$$

8.6. *Tarkastellaan Fréchet-avaruutta E ja $\mathcal{LF}$–avaruutta $F = \varinjlim F_n$. Olkoon $T : E \to F$ jatkuva lineaarikuvaus. Osoita, että on olemassa luonnollinen luku $k \in \mathbb{N}$ siten, että $T(E) \subset F_k$.*

Tarkastellaan joukkoja $H_n = \{(x, Tx) \in E \times F \;\big|\; Ty \in F_n\}$. Ne ovat kahden Fréchet-avaruuden tulon suljettuja aliavaruuksia, siis Fréchet-avaruuksia. Merkitään projektioita $\pi_n : H_n \to F : (x,y) \mapsto x$. Koska $\bigcup_n F_n = F$, niin $\bigcup_n H_n = T$ joten Bairen kategorialauseen mukaan jokin suljetuista joukoista H_n on sisäpisteellinen. Nytpä kuvaus $\pi_2 : Gr(T) \to F : (x,y) \mapsto y$ on jatkuva lineaarikuvaus kahden Fréchet–avaruuden välillä, siis avoin kuvaus. Sellaisena se kuvaa sisäpisteellisen joukon $H_n \subset T$ sisäpisteelliseksi joukoksi $\pi_2(H_n)$, joka toisaalta on aliavaruus, siis koko F. Mutta $\pi_2(H_n) \subset F_n$.

[1] $\mathbb{R}_+$:ssa $\int \log x = -x + x\log x$ on jopa jatkuva, onhan $\lim_{x\to 0}(-x + x\log x) = 0$.

Liite: Yhtäjatkuvat ja täysrajoitetut kuvausperheet metrisissä avaruuksissa

MÄÄRITELMÄ 8.1. Olkoon $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}(X,Y)$ joukko funktioita eli *funktioperhe* metristen avaruuksien X ja Y välillä sekä $x_0 \in X$. Tässä on merkitty $\mathcal{F}(X,Y) = Y^X =$ kaikkien funktioiden joukko.

(1) Perheen $\mathcal{H}$ funktiot ovat *yhtäjatkuvia pisteessä* x_0, eli perhe $\mathcal{H}$ on *yhtäjatkuva pisteessä* x_0, jos kaikki funktiot $f \in \mathcal{H}$ ovat jatkuvia pisteessä x_0 siten, että jatkuvuuden standardimääritelmässä kullakin ϵ voidaan δ valita niin pieneksi, että se kelpaa kaikille $f \in \mathcal{H}$:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ \forall f \in \mathcal{H} : d(x, x_0) \leq \delta \implies d(f(x), f(x_0)) \leq \epsilon.$$

(2) Perhe $\mathcal{H}$ on *yhtäjatkuva*, jos $\mathcal{H}$ on yhtäjatkuva jokaisessa pisteessä $x_0 \in X$.

(3) Perhe $\mathcal{H}$ on *tasaisesti yhtäjatkuva*, jos kullakin ϵ kelpaa sama δ kaikille $f \in \mathcal{H}$ ja kaikille $x_0 \in X$:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_0 \in X\ \forall x \in X\ \forall f \in \mathcal{H} : d(x, x_0) \leq \delta \implies d(f(x), f(x_0)) \leq \epsilon.$$

Rajoitetun joukon sulkeuma on äärellisulotteisessa avaruudessa $\mathbb{K}^n$ kompakti Heinen ja Borelin tunnetun lauseen mukaan, ja Rieszin lause 6.15 kertoo meille, että ääretönulotteisessa avaruudessa asia on toisin. Tämä asiantila antaa aiheen antaa nimen joukolle, jonka sulkeuma on kompakti. Asetamme samalla toisenkin lähisukuisen määritelmän.

MÄÄRITELMÄ 8.2. (1) Topologisen avaruuden X osajoukko K on *relatiivikompakti*, jos sen sulkeuma $\overline{K}$ on kompakti, eli jos K sisältyy johonkin kompaktiin joukkoon.

(2) Metrisen avaruuden X osajoukko K on *täysrajoitettu*, jos kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa joukon K peite äärellisen monella $\epsilon-$säteisellä pallolla $B(x, \epsilon)$, missä $x \in X$.

HUOMAUTUS 8.3. (1) Täysrajoitettuneisuuden määritelmässä voi yhtä lailla vaatia, että jokainen x kuuluu joukkoon K.

(2) Relatiivikompaktius ja täysrajoittuneisuus periytyvät osajoukolle ja sulkeumalle.

(3) Metrisen avaruuden osajoukolle kompaktius ja jonokompaktius ovat yhtäpitäviä ehtoja.

(4) Täydellisen metrisen avaruuden osajoukolle täysrajoittuneisuus ja relatiivikompaktius ovat yhtäpitäviä ehtoja.

(5) Äärellisulotteisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukolle rajoittuneisuus, täysrajoittuneisuus ja relatiivikompaktius ovat yhtäpitäviä ehtoja.

MÄÄRITELMÄ 8.4. Olkoon X joukko ja Y metrinen avaruus.

(1) Funktioperhe $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}(X,Y)$ on *pisteittäin rajoitettu*, jos jokaisen pisteen $x \in X$ kuvien joukko $\mathcal{H}(x) = \{f(x) \mid f \in \mathcal{H}\} \subset Y$ on rajoitettu.

(2) Vastaavasti määritellään käsitteet *pisteittäin täysrajoitettu* ja *pisteittäin relatiivikompakti* funktioperhe.

LAUSE 8.5. *(Ascolin lause) Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia, joista X kompakti. Tällöin joukolle jatkuvia funktioita $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ seuraavat kaksi ehtoa ovat yhtäpitäviä:*

(1) *$\mathcal{H}$ on avaruuden $\mathcal{C}(X,Y)$* sup-*metriikassa*

$$d(f,g) = d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x),g(x))$$

täysrajoitettu joukko.

(2) *$\mathcal{H}$ on yhtäjatkuva ja pisteittäin täysrajoitettu funktioperhe.*

Ascolin lauseesta on usein käytössä erikoistapaus, jossa maalipuolen avaruus Y on $\mathbb{R}$ (tai yhtä lailla $\mathbb{K}^n$). Tässä on oleellista, että maalipuolella täysrajoittuneisuus nyt merkitsee samaa kuin relatiivinen (jono-) kompaktisuus, onhan $\mathbb{R}^n$ täydellinen. Myös $\mathcal{C}(X,Y)$ on tässä tilanteessa täydellinen, joten sielläkin täysrajoittuneisuus liittyy jonojen osajonoihin:

SEURAUS 8.6. *(Ascolin ja Arzelán lemma) Olkoon $\mathcal{H}$ pisteittäin rajoitettu ja yhtäjatkuva perhe funktioita $X \to \mathbb{R}^n$, missä X on kompakti metrinen avaruus. Tällöin jokaisella jonolla $(f_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ on osajono, joka suppenee tasaisesti kohti jotakin jatkuvaa funktiota $f : X \to \mathbb{R}^n$.*

8.7. Normaaliperhepäättely.

HUOMAUTUS 8.7. Kompleksianalyysissä Ascolin ja Arzelán lemmaa on tapana sanoa *normaaliperhepäättelyksi.* Tarkasteltavana on tällöin yleensä jono jossakin alueessa $\Omega \subset \mathbb{C}$ — ei siis kompaktissa joukossa — määriteltyjä analyyttisiä funktioita $f_i : \Omega \to \mathbb{C}$. Oletuksena on, että jono on *tasaisesti rajoitettu kompakteissa joukoissa*, ts. että jokaisella kompaktilla $K \subset \Omega$ on olemassa vakio $M_K > 0$ siten, että kaikilla $x \in K$ ja $i \in \mathbb{N}$ on

$$|f_i(x)| \le M_K.$$

Väitteenä on, että on olemassa analyyttinen funktio

$$f : \Omega \to \mathbb{C},$$

jota kohti jokin osajono $(f_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$ suppenee tasaisesti jokaisessa kompaktissa joukossa $K \subset \Omega$.

Päättely perustuu Ascolin ja Arzelán lemman lisäksi siihen Cauchyn integraalikaavasta saatavaan tietoon, että kompakteissa joukoissa tasaisesti rajoitettu funktioperhe on yhtäjatkuva, ja että analyyttisistä funktioista koostuvan jonon raja-arvo on analyyttinen, jos suppeneminen on tasaista kompakteissa osajoukoissa.