JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Harjoitusten 7 ratkaisut **Topologiset vektoriavaruudet 2010**

7.1. *Olkoon E lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus ja $A \subset E$. Keksi välttämätön ja riittävä ehto sille, että A:n polaari avaruudessa E^* (tai E') on pelkkä $\{0\}$. (Vihje: Mikä onkaan A:n bipolaari?)*

Merkitään $A^\circ = A$:n polaari avaruudessa E^*.
Väite: $A^\circ = \{0\} \iff A^{\circ\circ} = E$.

Todistus. $A^\circ = \{0\} \implies A^{\circ\circ} = \big\{x \in E \;\big|\; |\langle x, y\rangle| \le 1 \forall x \in \{0\}\big\} = E$.
$A^{\circ\circ} = E \implies A^{\circ\circ\circ} = E^\circ = \{0\}$.

Huomaa, että tässä on takana, että (E, E^*) separoi E:n. (Samoin E'). Tulos pätee siis yleisessäkin dualiteetissa, kunhan se separoi E:n. Tulos e merkitsee, että

$$A^\circ = \{0\} \iff \overline{\operatorname{co}\operatorname{bal} A}^{\sigma} = E.$$

□

7.2. *Olkoon E lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus ja $B \subset E$ balansoitu, konveksi ja rajoitettu. Määritellään $E_B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB \subset E$ ja varustetaan se joukon $B \subset E_B$ mittausfunktiolla $p(x) = \inf\{\lambda \mid x \in \lambda B\}$, joka osoittautuu seminormiksi, koska B on balansoitu, konveksi ja avaruudessa E_B tietenkin myös absorboiva. Itse asiassa mittausfunktio p on jopa normi, koska B on rajoitettu E:n alkuperäisessä Hausdorff-topologiassa τ, ja kannattaa siis merkitä $p = \|\cdot\|$. Onko normiavaruuden E_B suljettu yksikköpallo B?*

Balansoidun, konveksin ja absorboivan (mietitty!) joukon $B \subset E_B$ mittausfunktio $p_B = \inf_{x\in\lambda B} \lambda$ on tunnetusti seminormi. Jos $x \in E_B$ ja $p_B(x) = 0$, niin x kuuluu jokaiseen λB, jolla $\lambda > 0$. Mutta B on rajoitettu, joten kaikilla origon ympäristöillä U on olemassa $\lambda > 0$, jolla $\lambda B \subset U$, jolloin $x \in U$. Näin x kuuluu jokaiseen origon ympäristöön ja on siis 0, koska avaruus on Hausdorff. Siis p_M on avaruuden E_B normi, joten on oikeutettua merkitä sitä haluttaessa myös $\|\cdot\|$. B on täydellisenä suljettu avaruudessa E. Upotuskuvaus eli kanoninen injektio $E_B \to E$ on jatkuva, koska juuri totesimme, että (rajoittuneisuuden takia) kaikilla origon ympäristöillä U on olemassa $\lambda > 0$, jolla $\lambda B \subset U$. Siis B on suljetun joukon alkukuvana suljettu myös normitopologiassa. Lopuksi on yleisesti totta, ja ilmeistä, että balansoitu konveksi joukko sisältyy mittausfunktionsa suljettuun yksikköpalloon ja sisältää avoimen yksikköpallon, joten sen sulkeuma on suljettu pallo. (Ilman täydellisyysoletusta olisi saatu B:n sulkeuma $\bar{B}$.

7.3. *Olkoon E lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus. Tunnetusti dualiteetti (E, E^*) on silloin separoiva. Siksi $E_{\sigma(E,E^*)}$:n täydentymä on esitetyn lauseen mukaan topologisen duaalin algebrallinen duaali $(E^*)'$. Voiko jo E_σ olla täydellinen ?*

Pitää tutkia, onko aina $E \ne (E^*)'$. Tunnetusti $E = (E^*_{\sigma(E^*,E)})^*$, joten täytyy selvittää, onko avaruudessa E^* aina olemassa $\sigma(E^*, E)$–epäjatkuva lineaarimuoto.

Tapa I . Yritetään konstruoida sellainen. Valitaan avaruudelle E^* Hamel-kanta K. Määritellään lineaarikuvaus $f : E^* \to \mathbb{K}$ asettamalla kaikille kantavektoreille kuvaksi luku 1, ts. $f(\sum_{k\in K}\lambda_k k)=\sum_{k\in K}\lambda_k$. Onko tämä $\sigma(E^*,E)$–epäjatkuva? Riittäisi löytää jokaisesta kantaympäristöstä $\bigcap_{I=1}^n\{x^*\in E^* \mid |\langle x_i,x^*\rangle|\le 1\}$ jokin kantavektori, jossa siis f saa arvon 1. Löytyykö?

Tapa II. Yritetään löytää vastaesimerkki. Pitäisi olla $E=(E^*)'$. Kannattaa siis kokeilla E:ksi jonkin avaruuden F algebrallista duaalia. Pitäisi olla $F=E^*$ ja $E=F'$. Tämän saa aikaan valitsemalla $E=F'_{\sigma(F',F)}$. Kerrataan päättely tarkastamalla tulos:

- Valitaan mikä tahansa vektoriavaruus F. Saa olla ääretönulotteinen.
- Olkoon E sen algebrallinen duaali F'.
- Varustetaan E lokaalikonveksilla topologialla $\sigma(E,F)=\sigma(F',F)$, joka on lokaalikonveksi, Hausdorff ja sopeutuva, koska dualiteetti (F',F) on separoituva.
- $E^*=(E_{\sigma(E,F)})^*=F$.
- $(E^*)'=F'=E$.

Esimerkki osoittaa, että **toisin kuin sanoin,** ääretönulotteisessakin tapauksessa voi olla $(E^*)'=E$? On sittenkin olemassa heikolla topologiallaan täydellinen ääretönulotteinen lokaalikonveksi avaruus! Vai menikö väärin? (Pikainen vilkaisu kirjallisuuten ei auttanut.)

7.4. *Olkoon (E,F) separoituva dualiteetti ja $M\subset E$ vektorialiavaruus. Osoita, että $M^{\perp\perp}=M$ jos ja vain jos M on suljettu jossain sellaisessa E:n topologiassa, joka sopeutuu dualiteettiin (E,F).*

Olkoon aluksi $M^{\perp\perp}=M$. Nyt M on suljettu topologiassa $\sigma(E,F)$, sillä minkä tahansa joukon $B\subset F$ ortogonaalinen komplementti

$$B^\perp=\{x\in E \mid \langle x,x^*\rangle=0\,\forall x^*\in B\}=\bigcap_{x^*\in B}\mathrm{Ker}\langle\cdot,x^*\rangle$$

on $\sigma(E,F)$–suljettujen joukkojen leikkauksena $\sigma(E,F)$–suljettu.

Olkoon seuraavaksi M suljettu jossain sopeutuvassa topologiassa. Silloin M on myöskin heikosti suljettu, onhan aliavaruus konveksi ja konveksit suljetut joukot ovat samat kaikissa sopeutuvissa topologioissa.. Toisaalta aliavaruudelle on tietenkin $M^\perp=M^\circ$ (!) edelleen alaiavaruus, joten $M^{\perp\perp}=M^{\circ\circ}=\overline{M}=M$, missä sulkeuma on otettu heikossa topologiassa.

7.5. *Osoita, että*

a) $\mathfrak{S}-$topologia on lokaalikonveksi ja saadaan heikosti rajoitettujen joukkojen $A\in\mathfrak{S}$ polaarien A° mittausfunktioista $p_A(y)=\sup_{x\in A}|\langle x,y\rangle|$.

Polaarit A° ovat aina balansoituja ja konvekseja, ja $\mathfrak{S}-$joukkojen heikon rajoittuneisuuden perusteella tässä tehtävässä myös absorboivia, joten niiden mittausfunktiot ovat seminormeja ja määräävät niiden lokaalikonveksin topologian.

b) Jos $\mathfrak{S}$ toteuttaa ehdot

(1) *$A,B\in\mathfrak{S}\implies\exists C\in\mathfrak{S}$ siten, että $A\cup B\subset C$ ja*
(2) *$A\in\mathfrak{S}$, $\lambda\in\mathbb{K}\implies\exists B\in\mathfrak{S}$ siten, että $\lambda A\subset B$,*

niin $\{A^\circ \mid A \in \mathfrak{S}\}$ *on* $\mathfrak{S}-$*topologiassa origon ympäristökanta.*

Kuulukoon $\epsilon \bigcap_I A_i^\circ$ tutkittavan $\mathfrak{S}-$topologian määrittelevään ympäristökantaan

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{S}} = \{\epsilon \bigcap_I A_i^\circ \mid A_i \in \mathfrak{S},\ \epsilon > 0\ I \text{ äärellinen}\}.$$

Jos kaikilla $A, B \in \mathfrak{S}$ on olemassa $C \in \mathfrak{S}$ siten, että $A \cup B \subset C$, niin (induktio!) äärellisellä perheellä $\{A_i \mid i \in I\} \subset \mathfrak{S}$ on olemassa $C \in \mathfrak{S}$ siten, että $\bigcup_{i \in I} A_i \subset C$. Jos lisäksi kaikilla $C \in \mathfrak{S}$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$ on olemassa $B \in \mathfrak{S}$ siten, että $\lambda C \subset B$, niin valitaan $B \in \mathfrak{S}$ siten, että $\frac{1}{\epsilon} C \subset B$. Nyt

$$B^\circ \subset \epsilon C^\circ \subset \epsilon \bigcap_{i \in I} A_i^\circ.$$

c) Jos $\mathfrak{S}$ *toteuttaa ehdon*

$$\bigcup_{\mathfrak{S}} A = E,$$

niin $\mathfrak{S}$*-topologia on hienompi kuin heikko topologia* $\sigma(F, E)$*.*

Riittää todistaa, että jokaisen pisteen $x \in E$ polaari $\{x\}^\circ = \{y \in F \mid |\langle x, y\rangle| \le 1\}$ on $\mathfrak{S}$-avoin, sillä heikossa topologiassa origon ympäristökantana ovat näiden polaarien äärelliset leikkaukse. Olkoon siis $x \in E$. Oletuksen mukaan on olemassa $A \in \mathfrak{S}$, jolle $x \in A$. Silloinpa $A^\circ \subset \{x\}^\circ$. □

7.6. *Todista suoraan (käyttämättä Alaoglun ja Bourbakin lausetta), että yhtäjatkuva joukko* $A \subset E^*$ *on heikosti rajoitettu.*

Olkoon $A \subset E^*$ yhtäjatkuva. Olemme jo luennolla / lauseen ... todistuksessa huomanneet, että joukko $A \subset E^*$ on yhtäjatkuva tasan sisältyessään jonkun heikon ympäristön $U \in \mathcal{U}_{\sigma(E,E^*)}$ polaariin $A \subset U^\circ$.

Oloon V jokin heikko ympäristö. Heikon ympäristön määrittelee ominaisuus, että on olemassa äärellinen joukko $S \subset E$, jolla $S^\circ \subset V$. Koska äärellinen joukko on rajoitettu, on olemassa luku $\lambda > 0$ siten, että $S \subset \lambda U$, jolloin

$$A \subset U^\circ \subset \lambda S^\circ \subset \lambda V.$$

(Olisi riittänyt tarkastella pisteiden polaareja kuten edellisessä tehtävässä tehtiin.) □

7.7. *Olkoon* E *epätäydellinen lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus ja* $\hat{E}$ *sen täydentymä. Osoita, että topologia* $\sigma(E', \hat{E})$ *on aidosti hienompi kuin* $\sigma(E', E)$ *ja sama pätee topologiselle duaalille* E^**.*

Heikko topologia on sopeutuva, joten E' :n duaali on toisessa topologiassa E ja toisessa siitä eroava $\hat{E}$. Topologiat eivät siis ole samat. Luonnollisesti hienompaa topologiaa vastaa isompi duaali.

7.8. *Olkoon E Banachin avaruus. Näytä, että* $b(E, E') = \tau(E, E')$.

Mackeyn ja Arensin lauseen seurauksen ”Lause 7.46” mukaan avaruus on tynnyriavaruus tasan ehdolla $b(E, E') = \tau(E, E')$. Jokainen Fréchet'n avaruus, erityisesti jokainen Banach-avaruus on tynnyriavaruus. $\square$.

7.9. **Onko Schwartzin testifunktioavaruus* $D(\mathbb{R})$ *normeerautuva standarditopologiassaan? Entä sen määritelmässä käytetyt avaruudet* $D(K)$ *eli* D_K*?*

Asiaa käsiteltiin aikaisemmissa demoissa, joissa avaruudella $D(K)$ oli nimenä $\mathcal{C}^\infty(K)$. Normiavaruushan se ei ole ($\mathcal{C}n(K)$ on normiavaruus, kun $n < \infty$). Myöskään Fréchet-avaruuksien $D(K_n)$ tarkka induktiivinen limes $D(\mathbb{R})$ ei ole normiavaruus, ei edes metrisoituva. ”Vika” on siinä että se on täydellinen, mutta suljettujen aitojen aliavaruuksiensa yhdisteenä selvästi Bairen 1. kategoriaa.