JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Harjoitusten 6 ratkaisut **Topologiset vektoriavaruudet 2010**

m̊

6.1. *"Lauseen* **??** *avulla on helppo tarkastaa, että E:n heikko topologia* $\sigma(E,F)$ *on Hausdorff tasan silloin, kun dualiteetti separoi E:n." Mikä lause? Miten?*

Kohdan 3.5. mukaan lokaalikonveksissa avaruudessa **Hausdorff- ehto on yhtäpitävää sen kanssa, että jokaisessa pisteessä** $x \in E \setminus \{0\}$ **ainakin yksi seminormi** $p_k \in \mathcal{P}$ **saa nollasta eroavan arvon.** (Taisi olla numeroimaton lause, mutta ei vaikea huomata heti itskään.)

Olkoon aluksi $\sigma(E,F)$ Hausdorff ja $x \in E \setminus \{0\}$. Tällöin on olemassa erilliset $\sigma(E,F)$- ympäristöt $U \in \mathcal{U}_0$ ja $V \in \mathcal{U}_x$. On siis erityisesti olemassa alkiot $y_1, \ldots y_n \in F$ joilla $U \supset \{x \in E \mid |\langle \xi, y_m \rangle| \leq 1 \forall m \in \{1,\ldots,n\}\}$. Koska $x \notin U$, niin jokin $|\langle x, y_m \rangle| > 1 > 0$, joten duaalipari separoi E:n. Jo 3.5.. mukaan lokaalikonveksissa avaruudessa Hausdorff- ehto on yhtäpitävää sen kanssa, että jokaisessa pisteessä $x \in E \setminus \{0\}$ ainakin yksi seminormi $p_k \in \mathcal{P}$ saa nollasta eroavan arvon—tietenkin.

Toisinpäin, oletetaan että duaalipari separoi. Olkoon $x \in E \setminus \{0\}$. Huomautuksen (!) 7.6.mukaan dualitetti $\langle \cdot, \cdot \rangle$ separoi avaruuden E, mikäli $\mathrm{Ker}(F \to E' : x \mapsto \langle \cdot, y \rangle) = \{0\}$, joten $x \notin \mathrm{Ker}(F \to E' : x \mapsto \langle \cdot, y \rangle)$, vaan on olemassa $y \in F$, jolla $\langle x, y \rangle \neq 0$. Siis $\sigma(E,F)$ on Hausdorff.

6.2. *Todista, että jos E on lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus, niin* $\sigma(E,E^*)$ *on Hausdorff-topologia. (Ovatko ehdot välttämättömiä?)*

Tämä seuraa edellisestä tehtävästä ja lauseesta 7.8., jonka mukaan lokaalikonveksin Hausdorff-avaruuden topologinen duaali separoi sen (, mikä puolestaan on Hahn-Banach-seuraus). Eiköhän Hausdorff-ehto ole välttämätön ja lokaalikonveksiuus ehkäpä ei. Voi miettiä, kun ehtii.)

6.3. *Sanomme, että avaruuden E* **lokaalikonveksi** *topologia* τ sopeutuu dualiteettiin *(engl: is compatible with)* (E,F)*, mikäli*

$$E_\tau^* = F.$$

Esimerkiksi, jos E on lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus, niin heikko topologia $\sigma(E,E^*)$ *sopeutuu dualiteettiin* (E,E^*)*, samoin tietenkin E:n alkuperäinen topologia. Onko* $\sigma(E,E^*)$ *hienoin — tai ehkä karkein — dualiteettiin* (E,E^*) *sopeutuva topologia?*

Karkein. Heikko topologia $\sigma = \sigma(E,F)$ on lokaalikonveksi ja lauseen ( ) mukaan pätee $E_\sigma^* = F$. Karkeampaa sopeutuvaa topologiaa ei ole olemassa, sillä lokaalikonveksi topologia τ sopeutuu nimenomaan silloin, kun jokainen $|\langle \cdot, y \rangle|$ $(y \in F)$ on τ–jatkuva.

6.4. *Olkoon (E, F) separoituva dualiteetti.*

a) Osoita, että balansoidulla, konveksilla joukolla A on sama sulkeuma kaikissa dualiteettiin (E, F) sopeutuvissa topologioissa. Huomaa erityisesti edellisen tehtävän tilanne. b) Itse asiassa oletus, että A on balansoitu, on tarpeeton. c) Ovatko tynnyrit samat jokaisessa dualiteettiin (E, F) sopeutuvassa topologiassa?

a) Olkoon τ dualiteettiin (E, F) sopeutuva topologia. Osoitetaan, että sulkeuma yhtyy heikkoon sulkeumaan.

1. tapa: Harjoituskierroksella 3. todistettiin Mazurin/Banachin lauseen avulla, että jos E (reaalikertoiminen) lokaalikonveksi avaruus ja A sen konveksi osajoukko, niin A on suljettu, jos ja vain jos A joidenkin E:n suljettujen puoliavaruuksien (ja ne ovat tietenkin samoja kaikissa sop topologioissa!) leikkaus. Tästä väite seuraa (ainakin $\mathbf{R}$-tapauksessa – taisimme käsitellä kompleksisenkin). b) selvä c) samoin

2. tapa: Koska heikko topologia on karkein eli heikoin dualiteettiin (E, F) sopeutuva topologia, on jokainen heikosti eli σ- suljettu joukko myös suljettu ja siis riittää näyttää, että jokainen balansoitu, konveksi τ–suljettu joukko $S \subset E$ on heikosti suljettu. Olkoon $x \in E \setminus S$. Koska sopeutuva topologia on lokaalikonveksi, on Mazurin lauseen (seurauksen) nojalla olemassa $f \in E^*_\tau$ s.e. $|\langle x, f\rangle| > 1$ ja $|\langle \xi, f\rangle| \leq 1$ kaikilla $\xi \in S$. Ts. $x \notin S^\circ$. Mutta sopeutumisen takia $E^*_\tau = E^*_\sigma$, joten $f \in E^*_\sigma$ ja siis $x \notin \overline{S}^\sigma$. Siis $\overline{S}^\sigma \subset S$ eli S on heikosti suljettu.

6.5. Olkoot E ja F vektoriavaruuksia, joista E äärellisulotteinen. Esitä välttämätön ja riittävä ehto avaruudelle F, joka takaisi, että on olemassa separoituva dualiteetti (E, F).

Jos dualiteetti on separoituva, niin sekä $x \mapsto \langle x, \cdot\rangle : E \to F'$ että $y \mapsto \langle \cdot, y\rangle : F \to E'$ ovat injektioita, joten $\dim E \leq \dim F' = \dim F$ ja $\dim E = \dim E' \geq \dim F$, siis $\dim E = \dim F$. Tässä välttämätön ehto. Ja onhan tämä selvästi riittäväkin!

6.6. —— *Osoita, että mikäli dualiteetti (E, E^*) separoi E:n, niin E on Hausdorff–avaruus.*

HUPS! Sama kuin tehtävä 1.

6.7. *Olkoon E varustettu topologialla $\sigma(E, E')$. Osoita, että jos $A \subset E$ on rajoitettu, niin*

a) on olemassa äärellisulotteinen aliavaruus $G \subset E$ siten, että $A \subset G$

b) E:n jokainen vektorialiavaruus on suljettu

c) E:n jokaisella vektorialiavaruudella on topologinen supplementti

Oletuksen mukaan $E = E_\sigma$.Topologian $\sigma = \sigma(E, E')$ määräävät seminormit $p(s) = |f(x)|$, missä f käy läpi kaikki lineaarikuvaukset $E \to \mathbf{K}$.

a) Oletus "$A \subset E$ on rajoitettu" merkitsee, että jokainen lineaarimuoto $f \in E'$ on rajoitettu joukossa A. Antiteesi on olemassa lineaarisesti riippumattomat vektorit $x_1, x_2 \dots \in A$. Määritellään lineaarisessa aliavaruudessa $H = \mathrm{span}(x_1, x_2 \dots) = \{\sum_{\mathbf{N}} \lambda_i x_i \mid \text{vain äärellisen moni } \lambda_i \neq 0\}$ lineaarimuoto $f(\sum_{\mathbf{N}} \lambda_i x_i) = \sum_{\mathbf{N}} i\lambda_i$, jolloin erityisesti $f(x_i) = i$ kaikilla $i \in \mathbf{N}$, eikä A siis olekaan σ–rajoitettu.

b) Olkoon $H \subset E$ lineaarinen aliavaruus. Varustetaan H Hamelin kannalla $K_H \subset H$ ja jatketaan se koko avaruuden Hamel–kannaksi K. Määritellään kullakin $x \in$

$K \setminus K_H$ lineaarimuoto f_x asettamalla kantavektoreiden kuviksi $f_x(x) = 1$ ja $f_x(y) = 0$ kaikille $x \in K \setminus \{x\}$. Nyt f on jatkuva (jokainen lineaarimuoto on jatkuva tässä topologiassa!), joten $\operatorname{Ker} f_x$ on suljettu ja siis $H = \bigcap_{x \in K \setminus K_H} \operatorname{Ker} f_x$ on suljettu.

c) Jokaisella vektorialiavaruudella on algebrallinen supplementti. Koska tässä topologiassa kaikki aliavaruudet ovat suiljettuja, on jokainen suoplementti topologinen.

6.8. *Olkoon E ääretönulotteinen lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus. Osoita, että E^*_σ ei ole normiutuva.*

Heikossa topologiassa jokainen origon ympäristö sisältää jonkin epätriviaalin vektorialiavaruuden, nimittäin hypertasojen äärellisen leikkauksen. !

6.9. *Olkoon E ääretönulotteinen normiavaruus. Osoita, että duaalin nollavektori $0 \in E^*$ kuuluu duaalin yksikköpallon kuoren $\{x* \mid \|x^*\| = 1\}$ sulkeumaan topologiassa $\sigma(E^*, E)$.*

Olkoon $U \in \mathcal{U}$ kantaympäristö, siis $U = \{x \mid |\langle x, y_n \rangle| \leq 1, n = 1, \ldots, n\}$ Nyt $U \supset \bigcup_{j=1}^n \operatorname{Ker} y_j$. Ytimien kodimensio on 1, joten ääretönulotteisessa avaruudessa niiden leikkaus on ääretönulotteinen aliavaruus, joka tietenkin leikkaa yksikköpallon pintaa.