Harjoitusten 5 ratkaisut **Topologiset vektoriavaruudet 2010**

Osa I: Bairen lauseen seurauksia / Fréchet'n avaruuksista.

5.1. *Olkoot* $(E, \mathcal{T}_E)$ *ja* $(F, \mathcal{T}_F)$ *Fréchet'n avaruuksia ja olkoon lisäksi avaruudessa* F *toinen Hausdorff–topologia* τ_F*, joka on karkeampi kuin* $\mathcal{T}_F$*. Olkoon* $T : E \to F$ *lineaarinen.*

Osoita, että jos T *on jatkuva* $\mathcal{T}_E \to \tau_F$*-mielessä, niin se on jatkuva myös* $\mathcal{T}_E \to \mathcal{T}_F$*-mielessä. Vihje: kuvaaja.*

Tarkastetaan, että T täyttää suljetun kuvaajan lauseen ehdot. Ainakin $T : (E, \mathcal{T}_E) \to (F, \mathcal{T}_F)$, missä molemmat ovat Fréchet'n avaruuksia. Koska T on jatkuva kuvauksena $T : (E, \mathcal{T}_E) \to (F, \tau_F)$, sen kuvaaja on suljettu (Hausdorff!) tulotopologiassa $\mathcal{T}_E \times \tau_F$, joka on oletuksen nojalla tietenkin karkeampi kuin $\mathcal{T}_E \times \mathcal{T}_F$. Siis kuvaaja on suljettu tässäkin. □

5.2. *Sovella edellistä tehtävää todistamalla, että seuraava lineaarikuvauksen jatkuvuuden verifioimiskeino toimii:*

Olkoot $(E, \mathcal{T}_E)$ *ja* $(F, \mathcal{T}_F)$ *Fréchet'n avaruuksia ja olkoon* $(X, \mathcal{T}_X)$ *Hausdorff-avaruus. Olkoon* $T : E \to F$ *lineaarinen. Osoita, että* T *on jatkuva, jos on olemassa sellainen jatkuva injektio* $f : F \to X$*, että* $f \circ T$ *on jatkuva. Vihje: alkukuvatopologia.*

Merkitään symbolilla $\tau_F = f^{-1}(\mathcal{T}_X)$ alkukuvatopologiaa, jonka kuvaus $f : F \to X$ määrää avaruuteen F. Koska T on injektio ja X on Hausdorff, on myös τ_F Hausdorff, sillä jos $x \neq y \in F$, niin $f(x) \neq f(y) \in X$, jolloin on olemassa erilliset ympäristöt $U \in \mathcal{U}_{f(x)}$ ja $y \in \mathcal{U}_{f(y)}$ ja nyt on löydetty erilliset ympäristöt $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}_x$ ja $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_y$. Oletettiin, että f on jatkuva, joten τ_F on karkeampi kuin $\mathcal{T}_F$. Oletettiin myös, että $f \circ T$ on jatkuva. Siksi T on jatkuva kuvauksena $T : (E, \mathcal{T}_E) \to (F, \tau_F)$: Alkukuvatopologiassa joukko on avoin, jos ja vain jos sen kuva on avoin. siis: $A \in \tau_F \implies f(A) \in \mathcal{T}_X \implies T^{-1}(A) = T^{-1}(f^{-1}(f(A)) = (f \circ T)^{-1}(f(A)) \in \mathcal{T}_E$. Kohdassa $A = f^{-1}(f(A)$ käytettiin tietoa, että A on injektio. □

Osa II: Käsitellään eräitä funktioavaruuksia. Samalla ratkaistaan lisätehtävä kierrokselta 3 (ja 4).

5.3. *Olkoon* $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$*. Avaruuden* $E = \mathcal{C}^k = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f$ *on* k *kertaa jatkuvasti derivoituva*$\}$ *standarditopologia,* (ensimmäisten k) derivaattojen tasaisen kompaktin suppenemisen topologia, *on lokaalikonveksi topologia, jonka määrittelee seminormiperhe* $\mathcal{P} = \{p_{\alpha,K} \mid \alpha \in \{0, 1, \ldots, k\}$ *ja* $K \subset \mathbf{R}$ *on kompakti*$\}$*, missä*

$$p_{\alpha,K}(f) = \sup_{x \in K} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha} f(x) \right| = \sup_{x \in K} |f^{(\alpha)}(x)|.$$

Osoita, että jokainen $\mathcal{C}^k$ *on metrisoituva ja Hausdorff.*

Koska jokainen kompakti joukko sisältyy johonkin kompaktiin väliin $[-m, m]$, niin seminormiperheen $\mathcal{P}$ voi korvata jatkvunien seminormien kannalla $\mathcal{P}_J = \{p_{\alpha,m} \mid \alpha \in \{0, 1, \ldots, k\}$ ja $K = [-m, m] \subset \mathbf{R}$, joka selvästi antaa saman topologian ja on lisäksi numeroituva. Siis $\mathcal{C}^k$ on metrisoituva, kunhan se on Hausdorff, ja sitä se on, sillä kaikilla $f \in \mathcal{C}^{(k)} \setminus \{0\}$ on jokin kohta $x \in \mathbf{R}$, jossa $f(x) \neq 0$, jolloin $p_{0,m}(f) = \sup_{-m \leq y \leq m} |f^{(0)}(y)| \geq |f(x)| > 0$, kunhan $-m \leq x \leq m$.

5.4. *Osoita, että jokainen $\mathcal{C}^k$ $(k \in \mathbf{N})$ on (jono)täydellinen (induktio k:n suhteen), siis Fréchet. (Entä Banach? Onko jatkuvaa normia?)*

Olkoon f_n Cauchy-jono avaruudessa $\mathcal{C}^k$. Jokaisessa pisteessä $x \in \mathbf{R}$ jono $f : n(x)$ on Cauchy-jono reaalilukuja, siis suppeneva. Näin saadaan raja-arvoehdokas $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Olkoon $K = [-m, m]$. Joukkoon K rajoitettuina funktiot f_n suppenevat tasaisesti, sillä seminormi $p_{0,m}$ on tässä joukossa sama kuin tasaisen suppenmisen antava sup-normi. Samasta syystä suppenevat niiden derivaatat tasaisesti kohti jotain funktiota. Tunnetun lauseen (Voit myös hieman integroida!) mukaan derivaattajonon tasainen raja-arvo on f'. Samalla tavalla todistetaan, että toisten derivaattojen jono suppenee kohti funktiota f'' tasaisesti välillä $]-m, m[$ jne. induktiolla aina k:nteen derivaattaan asti. Koska tämä toimii kaikilla m, niin $p_{m,\alpha}(f_n - f) \to 0$ kaikilla tarvittavilla m ja α, eli $f_N \to f \in \mathbf{C}^k$ oikeassa topologiassa.

Jatkuvaa normia ei taida olla. Vrt. tehtävä 3.1 ja 3.2.

5.5. *Osoita, että $\mathcal{C}^\infty$ on (jono)täydellinen, siis Fréchet. (Entä Banach? Onko jatkuvaa normia?)*

Edellisen tehtävän päättely toimii nytkin!

5.6. *Olkoon $K \subset \mathbf{R}$ kompakti ja $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. (Tässä tehtävässä on siis yksi K valittu.) Osoita, että aliavaruus $\mathcal{C}^k(K) = \{f \in \mathcal{C}^k \mid \operatorname{supp} f \subset K\}$ on (jono)täydellinen, siis Fréchet. (Entä Banach? Onko jatkuvaa normia?)*

Edellisen tehtävän päättely toimii muuten, mutta täytyy huomata, että rajafunktio f on avaruudessa $\mathcal{C}^k(K)$, mikä tietenkin seuraa jo siitä, että $f_n \to f$ pisteittäin ja $f_n(x) = 0$ kaikilla $x \notin K$.

Seminormeista $p_{0,m}(f) = \sup_{-m \leq y \leq m} |f^{(0)}(y)| \geq |f(x)| > 0$, tulee tässä tilanteessa normeja. (Huomaa, että f=0 kantajan ulkopuolella, joten ainakin siellä $f^{(k)} \to 0$.) Jos $k < \infty$, niin kyseessä on Banach-avaruus, koska topologian antaa korkeimman derivaatan sup-normi.

5.7. *Osoita, että $\mathcal{C}^k(K)$ on $\mathcal{C}^\infty(K)$:n täydentymä eli sulkeuma $\mathcal{C}^k(K)$:ssa eli että $\mathcal{C}^\infty(K)$ on tiheä $\mathcal{C}^k(K)$:ssa (joka on täydellinen).*

Tunnettu konstruktio ”silottamalla” konvoluution avulla.

5.8. *Osoita, että avaruuden $\mathcal{C}^\infty$ standarditopologian määrää myös seminormiperhe $\mathcal{Q}$, missä seminormit ovat*

$$q_K(f) = \int_K |f^{(n)}(x)|\, dx,$$

missä $K \subset \mathbf{R}$ on kompakti ja $n \in \mathbf{N}$. Vihje: $f(x) = \int_x^{x+1} ((t - x - 1)f'(t) + f(t))\, dt$.

Vihjeen kaava on oikea, sillä osittaisintegrointi antaa

$$\int_x^{x+1} (t-x-1)f'(t)\, dt + \int_x^{x+1} f\, dt = \Big/_x^{x+1} (t-x-1)f(t) - \int_x^{x+1} f\, dt + \int_x^{x+1} f\, dt = f(x).$$

$\mathcal{C}^\infty$:n standarditopologian määrää seminormiperhe $\mathcal{P} = \{p_{n,K} \bigm| K \subset \mathbf{R} \text{ kompakti}, n \in \mathbf{N}\}$, missä $p_{n,K}(f) = \sup\{|f^{(n)}(x)| \bigm| x \in K\}$. Merkitään topologioita τ_P ja τ_Q.

a) $\tau_Q \subset \tau_P$: Suora arvio:

$$q_{n,K}(f) = \int_K |f^{(n)}(x)| \leq \sup_K |f^{(n)}(x)| \int_K 1 = |K| p_{n,K}(f)$$

b) $\tau_P \subset \tau_Q$: Osittaisintegrointi / vihje antaa kaikilla $m < k$

$$f^{(m)}(x) = \int_x^{x+1} (t-x-1) f^{(m+1)}(t) + f^{(m)}(t)\, dt,$$

joten kaikilla $m \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned}
p_{m,K}(f) &= \sup_K |f^{(m)}(x)| \\
&= \sup_K \{ |\int_x^{x+1} (t-x-1) f^{(m+1)}(t) + f^{(m)}(t)\, dt| \\
&\leq \sup_K \left(|\int_x^{x+1} (t-x-1) f^{(m+1)}(t)\, dt| + |\int_x^{x+1} f^{(m)}(t)\, dt| \right) \\
&\leq \sup_K \{ |\int_x^{x+1} (t-x-1) f^{(m+1)}(t)\, dt| + \sup_K |\int_x^{x+1} f^{(m)}(t)\, dt| \\
&\leq \sup_{x,y \in K} |y-x| \int_{K'} |f^{(m+1)}(t)|\, dt + \| \int_{K'} f^{(m)}(t)|\, dt \\
&\leq \operatorname{diam} K' \int_{K'} q_{m+1,K'}(f) + q_{m,K'}(f),
\end{aligned}$$

missä on merkitty $K' = \overline{\bigcup_{x \in K} B(x,1)}$.

Huom. Avaruuksista $\mathcal{C}^k$ on analyysissä useimmiten käytössä n–ulotteiset versiot, joissa $E = \mathcal{C}^k = \mathcal{C}^k(\mathbf{R}^n) = \{f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \bigm| f \text{ on } k \text{ kertaa derivoituva}\}$ ja topologian antavat seminormit

$$p_\alpha(f) = \sup_{x \in K} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha f(x) \right|,$$

missä $K \subset \mathbf{R}^n$ on kompakti ja $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} f(x)$ on multi-indeksiä $\alpha = (\alpha_q, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ vastaava ($\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \alpha$) osittaisderivaatta. Tämä ei juuri vaikuta yllä esitettyihin asioihin. En tosin ole miettinyt, miten lienee integraalitehtävän laita, mutta varmaan sekin toimii, kun integroidaan yli K:n n–ulotteista Lebesguen mittaa.

Osa III: Yhdistelmä.

5.9. *Olkoon $K \subset \mathbf{R}^n$ kompakti joukko ja $F \subset \mathbf{R}^K$ Banachin avaruus, jonka alkiot (eli vektorit eli pisteet) ovat funktioita $K \to \mathbf{R}$ tavallisin vektorilaskutoimituksin. Oletetaan, että F:n topologia on hienompi kuin pistesuppenemisen topologia eli tuloavaruudesta $\mathbf{R}^K$ periytyvä topologia. Oletetaan vielä, että $\mathcal{C}^\infty(K) \subset F$.*

Todista, että on olemassa luku $k \in \mathbf{N}$, jolla $C^k(K) \subset F$.

Sovelletaan tehtävää 5.1. luonnollisin valinnoin, ts. valitaan E:ksi C^∞ varustettuna standarditopologiallaan, jota siis tässä merkitään $\mathcal{T}_E$. Tutkittavan Banach-avaruuden

F topologiaksi valitaan normitopologia $\mathcal{T}_F = \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ ja karkeaksi Hausdorff-topologiaksi τ valitaan pistesuppenemisen topologia eli tuloavaruudesta $\mathbf{R}^K$ periytyvä topologia. Lineaarikuvaukseksi $T : E \to F$ sopii inkluusiokuvaus $x \mapsto x$.

Tarkastetaan ehdot:

$\mathcal{C}^\infty(K)$ ja Banach-avaruus F ovat Fréchet'n avaruuksia ja avaruudessa F on myös toinen Hausdorff–topologia τ_F, joka on karkeampi kuin $\mathcal{T}_F$. (Totea!) Kuvaus $T : E \to F : x \to x$ on lineaarinen.

Tavoitteena on aluksi osoittaa, että inkluusiokuvaus T on jatkuva $\mathcal{T}_E \to \mathcal{T}_F$ –mielessä eli kuvauksena $C^\infty(K) \to (F, \mathcal{T}_{\|\cdot\|})$.

Tehtävän 5.1. mukaan riittää osoittaa, että inkluusiokuvaus T on jatkuva $\mathcal{T}_E \to \tau_F$ –mielessä eli että joukossa $C^\infty(K)$ normitopologia on hienompi kuin pistesuppenemisen topologia. Se on totta.

On siis saatu tieto, että inkluusiokuvaus T on jatkuva kuvauksena $C^\infty(K) \to (F, \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ eli että F:n normi on jatkuva avaruuden $C^\infty(K)$ topologiassa. On siis olemassa luku $\lambda > 0$ ja sellainen (semi)normi $p_{n,K}$, että

$$\|\cdot\|_F \leq \lambda p_{n,K}.$$

(Totesimme muuten edellä, että jatkuva seminormi $f \mapsto p_{n,K}(f) = \sup_{x\in K} |f^{(n)}(x)|$ on itse asiassa normi avaruudessa $E = C^\infty(K)$.) Siis avaruudessa $E = C^\infty(K)$ on

$$\mathcal{T}_F \subset \mathcal{T}_{p_{n,K}}$$

eli kaikenkaikkiaaan

F:n antama aliavaruustopologia $\subset$ $\mathcal{C}^k_K$:n antama aliavaruus'topologia $\subset$ $\mathcal{C}^\infty_K$:n oma topologia. Siis:

$\mathcal{C}^k(K) = (\mathcal{C}^\infty(K)$:n täydentymä eli sulkeuma $\mathcal{C}^k(K)$:ssa) $\subset \mathcal{C}^\infty(K)$:n täydentymä eli sulkeuma F:ssä normitopologiassa. □

Osa IV: Loppukevennys.

5.10. *Viime kerralla oli seuraava tehtävä*

a) Olkoon E vektoriavaruus, $\mathcal{B} = \{A \subset E \mid A$ on absorboiva, balansoitu ja konveksi$\}$. Näytä, että $\mathcal{B}$ määrää avaruuteen E lokaalikonveksin topologian $\mathcal{T}$, joka on kaikkein hienoin lokaalikonveksi topologia E:ssä.

b) Osoita, että jos F on lokaalikonveksi avaruus, niin jokainen lineaarikuvaus $E \to F$ on jatkuva.

Tämä ei ollut mitenkään vaikeaa. Jatketaan tarkastelua:

c) Olkoon $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ em. vektoriavaruuden E kaikkien äärellisulotteisten lineaaristen aliavaruuksien perhe ja $\mathcal{T}_\alpha$ aliavaruuden E_α standarditopologia, siis sen (ainoa!) Hausdorff-tva-topologia. Merkitään J_α:lla kanonista injektiota $E_\alpha \to E$. Osoita, että a)-kohdassa mainittu topologia $\mathcal{T}$ on induktiivinen lokaalikonveksi topologia *perheen $(J_\alpha)_{\alpha\in I}$ suhteen. (En ole vielä miettinyt, onko $(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ alkuperäisen avaruuden E topologinen aliavaruus.)*

Induktiivinen lokaalikonveksi topologia perheen suhteen on määritelmänsä mukaan lokaalikonveksi topologia, jossa peheenjäsenet ovat jatkuvia. Väite seuraa siis kohdista a) ja b). (Nähnee sen suoraankin!)