Harjoitusten 4 ratkaisut **Topologiset vektoriavaruudet 2010**

4.1. Viime kerralta. *Esimerkki lokaalikonveksin avaruuden osajoukosta, joka on a) jonotäydellinen, mutta b) ei täydellinen:* $E = \mathcal{F}([0,1], \mathbf{R}) = \mathbf{R}^{[0,1]} = \{$*kaikki funktiot* $[0,1] \to \mathbf{R}\}$. Pisteittäisen suppenemisen topologia *eli seminormit* $p_x = |f(x)|$. $M = \{f \in E \mid f(x) \neq 0$ *vain enintään numeroituvan monella* $x \in [0,1]\}$.

M on selvästikin E:n (topologinen ja lineaarinen) aliavaruus.

a) Tarkastellaan Cauchyn jonoa $(f_n)_\mathbf{N}$ joukossa M. Pisteittäisen suppenemisen topologiassa Cauchy-ehto merkitsee, että kaikilla $t \in [0,1]$ ja $\epsilon > 0$ on olemassa $n_0 = n_{\epsilon,t} \in \mathbf{N}$ siten, että $|f_n(t) - f_m(t)| < \epsilon$, kun $n, m \geq n_0$. Kullakin t on $(f_n(t))_\mathbf{N}$ siis Cauchy-jono reaalilukuja, ja sellainen suppenee: $f_n(t) \to f(t) \in \mathbf{R}$. Näin saadaan raja-arvoehdokas $f \in E$. On ilmeistä, että $f_n \to f$ pisteittäisen suppenemisen topologiassa. (Siitä nimi!) Riittää siis osoittaa, että $f \in M$. Merkitään

$$H_n = \{x \in \mathbf{R} \mid f_n(x) \neq 0\}.$$

Jokainen H_n on numeroituva, joten myös yhdiste

$$H = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n = \{x \in \mathbf{R} \mid \exists n : f_n(x) \neq 0\}$$

on numeroituva. Tietenkin $f(t) = 0$ kaikilla t, joilla jokainen $f_n(t) = 0$, joten $f \in M$.

b) Epätäydellisyys osoitetaan keksimällä M:n Cauchy-filtteri $\mathcal{F}$, joka ei suppene kohti mitään $f \in M$.

Keksimistää helpottaa, kun huomaa, että M ei ole suljettu, vaan esimerkiksi vakiofunktio $g(t) = 1$ kuuluu sen sulkeumaan, joten on olemassa sitä kohti suppeneva M:n osajoukoista muodostuva E:n filtterikanta. Sen voi toivoa olevan etsitynlainen M:n filtteri.

Olkoon $\mathcal{F} = \{U \cap M \mid U \in \mathcal{U}_{g,E}\}$. Koska $\mathcal{U}_{g,E} \to g$ avaruudessa E, niin se on Cauchy-filtteri, joten sen jälki $\mathcal{F}$ avaruudessa M on M:n Cauchy-filtteri tai sisältää tyhjän joukon. Suljetaan pois jälkimmäinen vaihtoehto: Pisteittäisen suppenemisen topologiassa $U \in \mathcal{U}_{g,E} \iff U \supset \{f : [0,1] \to \mathbf{R} \mid |f(t_i) - 1| \leq \epsilon\}$ joillekin äärellisen monelle $t_1, \ldots t_k \in [0,1]$ ja jollekin $\epsilon > 0$. Tällainen joukko sisältää esimerkiksi sen joukkoon M kuuluvan funktion f, joka saa arvon 1 tasan pisteissä $t_1, \ldots t_k$ ja on muualla 0. Jos aliavaruuden M Cauchy-filtteri $\mathcal{F}$ suppenisi kohti jotain $h \in M$, niin E:n filtterikanta $\mathcal{F}$ suppenisi kohti h:ta ja f:ää, mikä on mahdotonta, koska avaruus E on T_2.

4.2. *Todista Mazurin lause Hahnin ja Banachin lauseen seurauksena käyttämättä uudelleen valinta-aksioomaa.*

Aika vaikeaa yleisessä tapauksessa. Tarvittanee kirjoja. Mutta erikoistapaus onnistuu: Olkoon $\emptyset \neq A \subset E$ avoin ja konveksi ja lisäksi **balansoitu** sekä $M = x + F \subset E$, missä F on aliavaruus. Oletetaan, että $A \cap M = \emptyset$.

Olkoon $p : E \to \mathbf{R}$ joukon A mittausfunktio, joka on seminormi. Aliavaruudessa $\langle M \rangle = \{x\} \oplus F$ tarkastellaan lineaarimuotoa $f(\lambda x \oplus y) = \lambda$ joka saa affiinissa aliavaruudessa M vakioarvon 1 ja jolle siis $|f(x)| \leq p(x)$ kaikkialla $\{x\} \oplus F$:ssa, koska $\{x\} \oplus F$ ei leikkaa joukkoa A. Hahnin ja Banachin lauseen nojalla on olemassa f:n jatko koko avaruuden E lineaarimuodoksi f, jolle $|f| \leq p$. Koska $p < 1$ avoimessa joukossa A, niin A ei leikkaa hypertasoa $\{x \in E \mid f(x) = 1\}$. $\square$

4.3. *Olkoon E topologinen vektoriavaruus ja $S = \{x_\alpha \mid \alpha \in I\} \subset E$. Sanomme, että joukko S on* topologisesti vapaa, *eli* topologisesti lineaarisesesti riippumaton, *jos kaikilla $\alpha \in I$ pätee $x_\alpha \notin \overline{\langle S \setminus \{x_\alpha\}\rangle}$. Osoita, että jos E on lokaalikonveksi, niin $S = \{x_\alpha \mid \alpha \in I\} \subset E$ on topologisesti vapaa silloin ja vain silloin, kun on olemassa sellainen perhe lineaarimuotoja $S = \{f_\alpha \mid \alpha \in I\} \subset E^*$, että kaikilla $\alpha \in I$*

(1) f_α *on jatkuva*
(2) $f_\alpha(x_\alpha) = 1$
(3) $f_\alpha(x_\beta) = 0$ *kaikilla* $\beta \in I \setminus \{\alpha\}$.

Olkoon aluksi lauseen ehto voimassa eli vaaditut lineaarimuodot f_α olemassa. Tehdään vastaoletus, jonka mukaan on olemassa $\alpha \in I$ siten, että $x_\alpha \in \overline{\langle S \setminus \{x_\alpha\}\rangle}$. Nyt $f_\alpha(x_\beta) = 0$ kaikilla $\beta \neq \alpha$, joten lineaarisuuden nojalla $f_\alpha(x) = 0$ kaikilla $x \in \langle S \setminus \{x_\alpha\}\rangle = \{\text{vektorien } x_\beta \ (\beta \neq \alpha) \text{ äärelliset lineaaarikombinatiot}\}$. Siis erityisesti $0 = f(x_\alpha) = 1$. Vastaoletus on väärä.

Olkoon seuraavaksi S topologisesti vapaa. Tämä merkitsee, että kaikilla $\alpha \in I$ on

$$x_\alpha \notin \overline{\langle S \setminus \{x_\alpha\}\rangle}.$$

Aliavaruus $\overline{\langle S \setminus \{x_\alpha\}\rangle}$ on suljettu, joten Hahnin ja Banachin lauseen seurauksen (Luvun 3 viimeinen lause. Ei vaikea. Seuraa nyös Mazurin lauseesta.) mukaan on olemassa jatkuva lineaarimuoto $f_\alpha : E \to \mathbf{K}$, jolla $f(x_\alpha) = 1$ ja $f_\alpha = 0$ aliavaruudessa $\overline{\langle S \setminus \{x_\alpha\}\rangle}$. Näin on halutut lineaarimuodot löydetty.

4.4. *Olkoon E kompleksikertoiminen topologinen vektoriavaruus, $H = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$ jokin sen hypertaso, f siis $\mathbf{C}$–lineaarinen $E \to \mathbf{C}$. Olkoon $f_\mathbf{R}$ lineaarimuodon f reaaliosa, siis $f_\mathbf{R}(x) = \operatorname{Re} f(x)$. Osoita, että a) osajoukko $H_\mathbf{R} = \{x \in E \mid f_\mathbf{R}(x) = 0\}$ on hypertaso reaalikertoimisessa topologisessa vektoriavaruudessa E, jota merkitsemme $E_\mathbf{R}$. b) Näytä samalla, että $H = H_\mathbf{R} \cap (iH_\mathbf{R})$.*

a) Riittää näyttää, että $f_\mathbf{R}(x) = \operatorname{Re} f(x)$ on reaalilineaarinen kuvaus $E \to \mathbf{R}$, ja tämä on ihan helppoa:

$$f_\mathbf{R}(x+y) = \operatorname{Re} f(x+y) = \operatorname{Re}(f(x) + f(y)) = \operatorname{Re}(f(x)) + \operatorname{Re} f(y)) = f_\mathbf{R}(x) + f_\mathbf{R}(y)$$

$$f_\mathbf{R}(\lambda x) = \operatorname{Re} f(\lambda x) = \operatorname{Re}(\lambda f(x)) = \lambda \operatorname{Re} f(x) = \lambda f_\mathbf{R}(x),$$

missä toiseksi viimeinen yhtälö perustuu siihen, että λ on reaalinen (!).

b) $H = H_\mathbf{R} \cap (iH_\mathbf{R})$, sillä

$$\begin{aligned} x \in H &\implies f(x) = 0 \iff \operatorname{Re} f(x) = 0 \text{ ja } \operatorname{Im} f(x) = 0 \\ &\iff x \in H_\mathbf{R} \text{ ja } \mathrm{f}(-ix) = 0 \\ &\iff x \in H_\mathbf{R} \text{ ja } (-ix) \in H_\mathbf{R} \\ &\iff x \in H_\mathbf{R} \text{ ja } x \in iH_\mathbf{R}. \end{aligned}$$

4.5. *Näytä, että jos E ja F ovat Fréchet'n avaruuksia ja $T : E \to F$ on lineaarikuvaus, niin kuvaaja* $\operatorname{Gr} T$ *on suljettu, jos ja vain jos*

$$(x_n, T(x_n)) \to (0, y) \implies y = 0.$$

(Päteekö tämä yleisemminkin?)

Tulotopologiassa $(x_n, T(x_n)) \to (0, y) \iff x_n \to 0$ ja $T(x_n) \to y$.

a) Jos kuvaaja on suljettu, niin suljetun kuvaajan lauseen mukaan T on jatkuva, joten $x_n \to 0 \implies T(x_n) \to T(0) = 0$. Jos siis $x_n \to 0$ ja $T(x_n) \to y$, niin $0 = y$, sillä Fréchet'n avaruutena F on Hausdorff, joten raja-arvo on yksikäsitteinen.

b) Paluuväitteen todistamiseksi oletetaan, että $(x_n, T(x_n)) \to (0, y) \implies y = 0$. Olkoon $(x, y) \in \overline{\operatorname{Gr} T}$. Koska E ja F ovat metrisiä, on myös tuloavaruus metrisoituva, joten on olemassa joukon $\operatorname{Gr} T$ jono $(x_n, y_n) \to (x, y)$ eli $(x_n, T(x_n)) \to (x, y)$. Sovelletaan oletusta jonoon $(x_n - x)_{\mathbf{N}}$, jolle ainakin $(x_n - x) \to 0$. Koska $T(x_n - x) = T(x_n) - Tx = y_n - Tx \to y - Tx$, niin oletuksen nojalla $y - Tx = 0$. Siis $T(x) = y$, joten $(x, y) \in \operatorname{Gr} T$, joka siis on suljettu.

Lisäkysymys. Mietityttää.

4.6. *Kahden topologisen vektoriavaruuden suoraa lineaarialgebrallista summaa $E = M \oplus N$ sanotaan niiden* topologiseksi suoraksi summaksi*, mikäli se on varustettu tulotopologialla eli kuvaus $(x, y) \mapsto x + y$ on homeomorfismi tuloavaruudelta $M \times N$ suoralle summalle $M \oplus N$. Samaa ilmaistaan sanomalla, että N on M:n* topologinen supplementti*. Merkitään π:llä projektiota suoralta summalta $E = M \oplus N$ aliavaruudelleen M suuntaan N, siis $\pi(x + y) = x$, kun $x \in M$ ja $y \in N$.*

a) Osoita, että jos M ja N ovat E:n topologisia ja lineaarialgebrallisia alivaruuksia, niin suora summa $E = M \oplus N$ on topologinen suora summa tasan sillä ehdolla, että π on jatkuva.

b) Näytä, että jos E on Fréchet'n avaruus, ja jos sekä M että N ovat suljettuja aliavaruuksia, niin π on jatkuva ja siis $M \oplus N$ topologinen suora summa. (Riittääkö olettaa, että toinen on suljettu?)

a) Olkoon suora summa topologinen eli topologisena avaruutena $E = M \oplus N = M \times N$. Tällöin projektiokuvaus π on jatkuva tulotopologian määritelmän mukaan.

Olkoon seuraavaksi π jatkuva. Tällöin myös projektio N:lle eli kuvaus $Id_{M\oplus N} - \pi$ on jatkuva. Avaruudessa $M \oplus N$ on siis topologia, jossa projektiokuvaukset ovat jatkuvia eli tulotopologiaa hienompi topologia. Toisaalta summakuvaus $E \times E \to E$: $(a, b) \mapsto a + b$ on jatkuva, joten myös sen rajoittuma $M \oplus \{0\} \times \{0\} \oplus N \to M \oplus N$ eli isomorfismi $M \times N \to M \oplus N$ on jatkuva, joten suoran summan topologia on (aina!) tulotopologiaa karkeampi. Siis sama!

b) Jos E on Fréchet'n avaruus, ja jos sekä M että N ovat suljettuja aliavaruuksia, niin sekä M että N ovat Fréchet'n avaruuksia, samoin niiden tuloavaruus $M \times N$. Oletuksen mukaan myös $E = M \oplus N$ on Fréchet'n avaruus. Totesimme edellä, että lineaari-isomorfismi $M \times N \to M \oplus N$ on jatkuva surjektio, joten avoimen kuvauksen lause takaa, että se on isomorfismi.

4.7. *(jatkoa) c) Olkoon $T : E \to F$ jatkuva lineaarikuvaus, missä E ja F ovat topologisia vektoriavaruuksia. Osoita, että T:llä on jatkuva lineaarinen* oikeanpuoleinen käänteiskuvaus *eli jatkuva, lineaarinen $S : F \to E$, jolla $T \circ S = id_F$, jos T on avoin surjektio ja ytimellä* $\ker T \subset E$ *on topologinen supplementti.*

Aluksi taustaa: Yleisesti kuvaus on surjektio tasan silloin, kun sillä on oikeanpuoleinen käänteiskuvaus (ja injektio tasan, kun sillä on vasemmanpuoleinen käänteiskuvaus). Jos siis T on surjektio, niin ainakin sillä on olemassa oikeanpuoleinen käänteiskuvaus. Surjektiivisen lineaarikuvauksen tapauksessa tiedämme enemmänkin: T:llä on *kanoninen hajoitelma* $T = I \circ \phi$, missä $\phi : E \to E/\ker T$ on kanoninen surjektio ja $I : E/\ker T \to F$ on lineaari-isomofismi. Käänteiskuvaus muodostuu siten isomorfismin käänteisestä I^{-1} ja sen päälle valinnasta, joka poimii kustakin sivuluokasta $x + \ker T$ jonkin vektorin. Tällainen pitää sis valita edullisesti.

Hyvän valinnan tekemisessä auttaa oletus, jonka mukaan ytimellä $N = \ker T \subset E$ on topologinen supplementti, olkoon se M. Siis $E = M \oplus N \sim M \times N$. Nytpä lineaarikuvaus $J = \phi \big|_M : M \to E/N$ on lineaarinen isomorfismi, sillä se on injektio (Jos $J(x) = 0_{E/N}$, niin $x \in M \cap \ker \phi = M \cap N = \{0\}$.) ja surjektio (Jokaiselle $v + N \in E/N$ eli $v = (x, y) \in E = N \oplus N$ on $v + N = \phi(v + n)$ kaikilla $n \in N$. Erityisesti $v + N = \phi(v - y) = \phi(x)$, missä $x \in M$.

Kuvauksella $T \big|_M$ on siis lineaarinen käänteiskuvaus $S : F \to M \subset E$, vaikka ytimellä olisi pelkkä algebrallinen komplementti. Olemme kuitenkin olettaneet, että M on topologinen komplementti. Todistetaan sen avulla, että S on jatkuva.

Olkoon siis $A \subset E = M \oplus N$ avoin. Silloin $A \cap M$ on avoin aliavaruudessa M ja siis $(A \cap M) \times N$ on avoin tuloavaruudessa $M \times N$ eli $(A \cap M) \oplus N$ on avoin avaruudessa $E = M \oplus N$. Koska T on oletuksen mukaan avoin, on siis joukko $T((A \cap M) \oplus N) \subset F$ avoin. Mutta koska $N = \ker T$, niin $T((A \cap M) \oplus N) = T(A \cap M) = S^{-1}(A \cap M) = S^{-1}(A)$, joka piti näyttää avoimeksi.

4.8. (Jos puhtia ja aikaa riittää.) *a) Olkoon E vektoriavaruus, $\mathcal{B} = \{A \subset E \mid A$ on absorboiva, balansoitu ja konveksi$\}$. Näytä, että $\mathcal{B}$ määrää avaruuteen E lokaalikonveksin topologian $\mathcal{T}$, joka on kaikkein hienoin lokaalikonveksi topologia E:ssä.*

b) Osoita, että jos F on lokaalikonveksi avaruus, niin jokainen lineaarikuvaus $E \to F$ on jatkuva.

a) Jokainen perhe absorboivia, balansoituja ja konvekseja joukkoja määrää perheen seminormeja ja siis jonkin lokaalikonveksin topologian $\mathcal{T}$ avaruudessa E. Olkoon $\mathcal{T}'$ lokaalikonveksi topologia avaruudessa E. Sillä on tynnyreistä muodostuva origon ympäristökanta. Nämä kantajoukot ovat oletuken mukaan origon ympäristöjä myös topologiassa $\mathcal{T}$, joten $\mathcal{T}$ on hienompi kuin $\mathcal{T}'$.

b) Olkoon $T : E \to F$ lineaarikuvaus ja $p : F \to \mathbf{R}$ jatkuva seminormi. Silloin $p \circ T : E \to \mathbf{R}$ on seminormi avaruudessa E, joten sen pallot ovat absorboivia, balansoituja ja konvekseja, siis origon ympäristöjä. $p \circ T$ on siis jatkuva, mikä takaakin lineaarikuvauksen T jatkuvuuden. (Itse asiassa $p \circ T$ on jatkuva, olipa p jatkvua tai ei.)

Motivaatiosta: Palataan asiaan, kun on määritelty induktiivinen limes.

4.9. Lisätehtävä viime kerralta jos halutaan ja ehditään. *Olkoon $K \subset \mathbf{R}^n$ kompakti joukko. Avaruudessa*

$$E = \mathcal{C}_c^\infty(K) = \{f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \mid f \in \mathcal{C}^\infty,\ \operatorname{supp} f \subset K\}$$

otetaan käyttöön seminormit

$$q_\alpha(f) = \sup_{x \in K} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha f(x) \right|,$$

missä $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} f(x)$ *on multi-indeksiä* $\alpha \in \mathbf{N}^n$ *vastaava (korkeammanasteinen) osittaisderivaatta. Merkitään* $\mathcal{Q} = \{q_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{N}^n\}$. *Osoita, että* $(E, \mathcal{Q})$ *on Fréchet'n avaruus.*

Ohjeita*: Tyydy tilanteeseen* $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}$, *jos et halua käsitellä moniulotteista tapausta multi-indekseineen. Asiaan ei tule oleellisia eroja. Voit joko osoittaa suoraan, että* E *on lokaalikonveksi, metrisoituva ja (jono(!)-)täydellinen tai sitten tarkastaa, että* E *on tunnetun avaruuden* $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n) = \{f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \mid f \in \mathcal{C}^\infty,\ \operatorname{supp} f \subset K\}$ *suljettu aliavaruus. Avaruuden* $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ standarditopologian eli derivaattojen kompaktin konvergenssin topologian *määräävät seminormit* $p_{n,K}(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|$ *tai yhtä lailla normit* $\|f\|_{m,K} = \sup_{n \leq m} \sup_{x \in K} |f(x)|$, *missä* K *käy läpi kompaktit reaalilukujoukot ja* m *luonnolliset luvut. Tässä topologiassa* $\mathcal{C}^\infty$ *on metrisoituva ja täydellinen — tämä voi olla tuttua analyysistä.)*