**Harjoitusten 3 ratkaisut** **Topologiset vektoriavaruudet**

**3.1.** *Jokainen kompakti joukko* $K \subset \mathbf{R}^n$ *määrää funktioavaruudessa* $E = \mathcal{C}(\mathbf{R}^n) = \{f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}$ *seminormin* $p_K(f) = \sup f(K)\,(= \max f(K))$. *Nämä seminormit määräävät avaruuteen* $E$ *lokaalikonveksin topologian* $\mathcal{T}$.

*a) Onko* $\mathcal{T}$ *Hausdorff-topologia?*

*b) Suppeneeko funktiojono* $f_n(x) = \frac{1}{n}e^x$ *topologiassa* $\mathcal{T}$*?*

*c) Onko olemassa E:n normi, joka antaisi topologian* $\mathcal{T}$*, eli onko* $E$ *normeerautuva? (vihje: ei)*

a) On $T_2$. Riittää, että jokainen $f \in E \setminus \{0\}$ voidaan erottaa origosta erillisin ympäristöin. Olkoon $f \neq 0$. Jatkuvuuden nojalla on olemassa luku $\epsilon > 0$ ja kompakti väli $K \subset \mathbf{R}$ , jolla $f(x) > 3\epsilon$. Nyt $B_{p_K,0,\epsilon} \cap B_{p_K,f,\epsilon} = \emptyset$.

b) Suppenee nollaan. Huomataan heti, että semipallot $B = B_{p_K,0,\epsilon}$ muodostavat origon ympäristökannan. Olkoon $B = B_{p_K,0,\epsilon}$. Nyt $p_K(f_n) = \sup f(K) = \frac{\sup_K(e^x)}{n} \to 0$, joten on olemassa $n_0 \in \mathbf{N}$ siten, että $f_n \in B$, kun $n \geq n_0$.

c) Ei normeeraudu. Vastaoletus: Jokin normi $\|\cdot\|$ antaa saman toplogian $\mathcal{T}$.

Silloin erityisesti normi $\|\cdot\|$ on jatkuva kuvaus, joten nollan ympäristön alkukuvana normin yksikköpallo sisältää origon $\mathcal{T}$–ympäristön, joka puolestaan sisältää jonkin semipallon $B = B_{p_K,0,\epsilon}$, koska semipallot $B = B_{p_K,0,\epsilon}$ muodostavat origon ympäristökannan. Silloin $p_K(f) < \epsilon \implies \|f\| \leq 1$ ja siis $p_K(f) < \frac{\epsilon}{n} \implies \|f\| \leq \frac{1}{n}$, joten $p_K(f_n) \to 0 \implies \|f_n\| \to 0 \implies f_n \to 0$, mikä ei pidä paikkaansa.

**3.2.** *Seminormit* $p_n(f) = \sup_{0\leq t\leq 1} |f^{(n)}(t)|$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ *määräävät avaruuteen* $E = \mathcal{C}^\infty([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbf{R} \mid f \text{ on äärettömän monta kertaa derivoituva}\}$ *lokaalikonveksin topologian* $\mathcal{T}$. *Kun* $f \in E$*, merkitään*

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

$T$ *on siis lineaarikuvaus (eli operaattori eli transformaatio)* $E \to E$.

*a) Onko* $T$ *jatkuva?*

*b) Onko topologia* $\mathcal{T}$ *normeerautuva?*

a) $T$ on jatkuva. Kuvafunktion $g = Tf$ derivaatat ovat tietenkin $g' = f$, $g'' = f', \dots, g^{(n)} = f^{(n-1)}$. Siten kaikilla $n > 1$ pätee $p_n(Tf) = p_n g = p_{n-1}f$, joten täytyy enää tutkia $p_0$.

$$p_0(Tf) = \sup|\int_0^x f(t)\,dt| \leq \sup|f| = p_0(f). \text{ OK!}$$

b) Ei normeeraudu. Idea on sama kuin edellisessä tehtävässä. Vastaoletus: Jokin normi $\|\cdot\|$ antaa saman toplogian $\mathcal{T}$.

Silloin erityisesti normi $\|\cdot\|$ on jatkuva kuvaus, joten nollan ympäristön alkukuvana normin yksikköpallo $B_{\|.\|}$ sisältää origon $\mathcal{T}$–ympäristön, joka puolestaan sisältää jonkin semipallojen leikkauksen ja siis $B_{\|.\|} \supset \lambda \bigcap_{i=1}^m B_{p_{n_i}}$, $(n_1 < n_2 < \cdots < n_m\ (\in \mathbf{N}))$. Toisin sanoen jollakin $\mu > 0$ pätee

$$\|\cdot\| \leq \mu \max_{1\leq i\leq n_m} p_{n_i}.$$

Toisaalta vastaoletettiin, että $\|\cdot\|$ yksinään virittää topologian, jolloin $\{\|\cdot\|\}$ on jatkuvien seminormien kanta ja on siis olemassa luku $\lambda > 0$ siten, että $p_{n_m+1} < \lambda\|\cdot\|$. Yhdistämällä arviot saadaan

$$p_{n_m+1} < \lambda\|\cdot\| \le \lambda\mu \max_{1\le i\le n_m} p_{n_i}.$$

Tämän huomaa mahdottomaksi keksimällä jonon $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{N}}$, jolla $p_{n_i}(f_\alpha) \to 0$ kaikilla $i = 1,\ldots,m$, kun $\alpha \to \infty$, mutta ei $p_{n_m+1}(f_\alpha) \to 0$. Sellaiseksi kelpaa esimerkiksi $f_\alpha(x) = \alpha^{-n_m-1}\sin(\alpha x)$, sillä $f_\alpha^{(n)}(x) = \alpha^{-n_m-1-n}\cdot r(x)$, missä $r(x)$ on rajoitettu funktio, joten $p_n(f_\alpha) = \sup_{[0,1]}|f_\alpha^{(n)}(x)| \to 0$, kun $n \le n_m$ ja $\alpha \to \infty$, mutta ei lähene nollaa, kun $n > n_m$. Erityisesti $p_{n_i}(f_\alpha) \to 0$ kaikille $i = 1,\ldots m$ mutta ei $p_{n_m+1}(f_\alpha) \to 0$.

**3.3.** *Olkoon $E$ reaalikertoiminen lokaalikonveksi avaruus ja $A$ sen konveksi osajoukko. Osoita, että $A$ on suljettu, jos ja vain jos $A$ joidenkin $E$:n suljettujen puoliavaruuksien leikkaus.* Koska suljettujen joukkojen leikkaus on konveksi, riittää tarkastaa ehdon välttämättömyys. Olkoon siis $A$ konveksi ja suljettu. Komplementti $C = \setminus A$ on avoin. Olkoon $x \in C$. On olemassa pisteen $x$ avoin ympäristö $U$, jolla $U \subset C$. Koska $E$ on lokaalikonveksi voidaan $U$ valita konveksiksi. Koska $E$ on reaalikertoiminen, on Banachin erottelulauseen nojalla olemassa jatkuva lineaarimuoto $f$ ja luku $\alpha > 0$ (Voidaan muuten aina valita $\alpha = 1$) siten, että $A \subset H = \{x \in E \mid f(x) \le \alpha\}$ ja $U \cap H = \emptyset$, erityisesti $x \notin H$. Tästä väite seuraa.

**3.4.** *a) Olkoon $E$ bf ääretönulotteinen normiavaruus. Näytä, että normikuvaus $x \mapsto \|x\|$ ei ole jatkuva $E$:n heikon topologian suhteen eli heikosti jatkuva. (Heikon topologian määräävinä seminormeina ovat jatkuvien lineaarimuotojen itseisarvot eli kuvaukset $x \mapsto |\langle x, x^*\rangle|$, missä $x^* \in E^*$.)*

*b) Entä onko normi tässä topologiassa alhaalta puolijatkuva? Alhaalta puolijatkuvuudelle on riittävää olla jatkuvien kuvausten pisteittäinen supremum.*

a) Jos normi olisi jatkuva, niin olisi jatkuvien seminormien karakterisoinnin mukaan olemassa luku $n \in \mathbf{N}$ ja jatkuvat seminormit $|\langle\cdot, x_i^*\rangle|$, (i=1,... n), joilla

$$\|\cdot\| \le \sum_{i=1}^{n} |\langle\cdot, x_i^*\rangle|.$$

Tällöin

$$x \in \cap_{i=1}^n \ker x_i^* \implies \|x\| = 0 \implies x = 0,$$

joten lineaarikuvaus $T : E \to \mathbf{K}^n : x \mapsto (\langle x, x_1^*\rangle, \ldots, \langle x, x_n^*\rangle)$ on injektio, joten $\dim E \le \dim \mathbf{R}^n = n < \infty$.

b) Hahnin ja Banachin lauseen tunnetun seurauksen mukaan

$$\|x\| = \sup_{x\in E^*\setminus\{0\}} \frac{|\langle x, x^*\rangle}{\|x^*\|},$$

siis supremum jatkuvista kuvauksista

$$x \mapsto \frac{|\langle x, x^*\rangle}{\|x^*\|}.$$

**3.5.** *Olkoon $(E, P)$ lokaalikonveksi avaruus. Osoita, että $E$:n jono $(x_n)_{\mathbf{N}}$ on Cauchy-jono, jos ja vain jos*

$$\forall p \in P \text{ ja } \forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \text{ s.e. } q, r \geq n_0 \implies p(x_q - x_r) \leq \epsilon.$$

Määritelmän mukaan jono $(x_n)$ on Cauchy topologisessa vektoriavaruudessa $E, \mathcal{T}$ jos ja vain jos vastaava alkeisfiltteri on Cauchy-filtteri, mikä puolestaan tarkoittaa, että kaikilla 0:n ympäristöillä $U \in \mathcal{U}$ on olemassa luku $n_0 \in \mathbf{N}$ siten, että $x_n - x_m \in U$ kaikilla $n, m \geq n_0$.

Tehtävän tilanteessa $(E, P)$ on lokaalikonveksi avaruus, joten voi olettaa, että $U$ on kantajoukko ja muotoa $U = \lambda \bigcap_{p \in \mathcal{H}} U_p$, missä $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}$ on äärellinen joukko kantaseminormeja. Yllä esitetty Cauchy-jonon määritelmän kohta $x_n - x_m \in U$ saa muodon $x_n - x_m \in \lambda \bigcap_{p \in \mathcal{H}} U_p$, eli

$$p(x_n - x_m) \leq \lambda \, \forall p \in \mathcal{H}.$$

1) (vain jos) Jos jono on Cauchy ja $p \in P$ ja $\epsilon > 0$, niin valitaan $\mathcal{H} = \{p\}$ ja $\lambda = \epsilon$, jolloin määritelmä antaa väitteen.

2) (jos) Jos jono toteuttaa tehtävän ehdon ja $U$ on muotoa $U = \lambda \bigcap_{p \in \mathcal{H}} U_p$, missä $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}$ on äärellinen, niin valitaan kullekin $p \in \mathcal{H}$ luku $n_p$ siten, että $p(x_n - x_m) \leq \lambda \, \forall n, m \geq n_p$. Kun $n, m \geq n_0 = \max\{n_p \mid p \in H\}$, niin siis $p(x_n - x_m) \leq \lambda \, \forall n, m \geq n_p$ eli $x \in \lambda \bigcap_{p \in \mathcal{H}} U_p$.

**3.6.** *Olkoon $E = \prod_{i \in I} E_i$ topologisten vektoriavaruuksien tuloavaruus (tulotopologia!) ja $\pi_i : E \to E_i$ siihen liittyvä projektio ($i \in I$). Osoita, a) että $\mathcal{F}$ on Cauchyn filtteri $E$:ssä tasan silloin, kun jokainen $\pi(\mathcal{F}) \subset E_i$ on Cauchyn filtteri $E_i$:ssä ja b) että $E$ on täydellinen aina ja vain, kun jokainen $E_i$ on täydellinen. Jos äärettömän monen avaruuden tulotopologia ei ole tuttu, voit olettaa, että $I = \{1, 2\}$ eli tarkastella kahden avaruuden tuloa.*

a) Tulotopologia on hienoin topologia, jossa kaikki projektiokuvaukset $\pi_i : E = \prod_{i \in I} E_i \to E_i : x \mapsto x_i$ ovat jatkuvia. Tietenkin ne ovat lineaarisia surjektioita, joten kannattaakin todistaa hieman yleisempi tulos, jonka mukaan topologisen vektoriavaruuden $E$ **Cauchy-filtterin $\mathcal{F}$ kuva jatkuvassa lineaarisessa kuvauksessa $T : E \to F$ on Cauchy-filtteri.** Muistetaan, että missä tahansa kuvauksessa filtteriin kuuluvien joukkojen kuvat muodostavat filtterikannan, jonka virittämää filtteriä sanotaan alkuiperäisen kuvafiltteriksi. Surjektio antaa suoraan kuvafiltterin. Tarkastamme sille Cauchy-ehdon. Olkoon siis $U \in \mathcal{U}_F$. Koska $T^{-1}U \in \mathcal{U}_E$, on olemassa $M \in \mathcal{F}$, jolla $M - M \subset T^{-1}U$, jolloin $T(M)$ kuuluu filtterin kuvaan ja $T(M) - T(M) = T(M - M) \subset T(T^{-1}U) \subset U$.

Oletetaan seuraavaksi, että jokainen $\pi_i(\mathcal{F})$ on Cauchy. Olkoon $U \in \mathcal{U}_E$ tulotopologiassa. Voimme olettaa, että $U$ on kantajoukko eli muotoa

$$U = \prod_{j \in J} U_j \times \prod_{i \in I \setminus J} E_i,$$

missä $J$ on äärellinen ja $U_j \in \mathcal{U}_{E_i}$. Valitaan kullakin $j \in J$ joukko $M_j \in \pi_j(\mathcal{F})$, jolla $M_j - M_j \subset U_j$. Kuvafiltterin määritelmän mukaan $M_j \supset \pi_j(N_j)$ jollekin $N_j \in \mathcal{F}$. (Surjektiivisuuden vuoksi voisi vaatia jopa $M_j = \pi_j(N_j)$.) Valitaan

$$N = \prod_{j \in J} N_j \times \prod_{i \in I \setminus J} E_i.$$

Tällöin tietenkin $N+N \subset U$, joten on enää näytettävä, että $N \in \mathcal{F}$. Huomataan, että $N = \bigcap_{j\in J} \pi^{-1}(M_j) = \bigcap_{j\in J} \pi^{-1}(\pi(N_j)) = N \supset \bigcap_{j\in J} N_j$ ja muisteaan, että $N_j \in \mathcal{F}$ ja että filtteri sisältää joukkojensa äärelliset leikkaukset ja ylijoukot. Selvä!

b) Avaruuden $E$ täydellisyys tarkoittaa, että jokainen sen Cauchy-filtteri $\mathcal{F}$ suppenee eli että sille on olemassa $x \in E$, jolle $\mathcal{F} \supset \mathcal{U}_x$ $(= x + \mathcal{U}_0)$.

Olkoon ensin jokainen $E_i$ täydellinen ja $\mathcal{F}$ Cauchyn filtteri tuloavaruudessa $E$. a)–kohdan mukaan kuvafiltterit $\mathcal{F}_i = \pi_i(\mathcal{F})$ ovat Cauchy-filttereitä, siis oletuksen mukaan suppenevia: $F_i \supset \mathcal{U}_{x_i}$ joillekin $x_i \in E_i$. Verifioidaan, että $\mathcal{F} \to x$ eli $\mathcal{F} \supset \mathcal{U}_x = x + \mathcal{U}_{0,E}$, missä $x = (x_i)_{i\in I} \in E$ :

Olkoon $U \in \mathcal{U}_x \subset E = E = \prod_{i\in I} E_i$. Voimme olettaa, että $U$ on kantajoukko eli muotoa

$$U = x + \prod_{j\in J} U_j \times \prod_{i\in I\setminus J} E_i = x + \bigcap_{j\in J} \pi^{-1} U_j,$$

missä $J$ on äärellinen ja $U_j \in \mathcal{U}_{0,E_i}$. Kullakin $j \in J$ on $U_j \in \mathcal{F}_j = \pi_j(\mathcal{F})$, joten $\pi^{-1}U_j \in \mathcal{F}$ ja siis $\bigcap_{j\in J} \pi^{-1}U_j \in \mathcal{F}$, joten $U \in x + \mathcal{F}$.

Olkoon sitten tuloavaruus $E = \prod_{i\in I} E_i$ täydellinen, ja $\mathcal{F}_j$ Cauchyn filtteri avaruudessa $E_j$ jollain $j \in I$. Olkoon kaikilla $i \neq j$ $\mathcal{F}_i = \mathcal{U}_{E_i}$ ja olkoon $\mathcal{F}$ avaruuden $E$ filtteri, jonka kantana ovat joukot $N_i = \pi^{-1}M_i$, $i \in I$, $M_i \in \mathcal{F}_i$. (Tätä voisi varmaan sanoa filtterien tuloksi.) Tämä on a) kohdan perusteella Cauchy, sillä $\pi_i(\mathcal{F}) = F_i$ kaikilla $i \in I$ ja sekä tutkittava $\mathcal{F}_j$ että jokainen ympäristöfiltteri $\mathcal{U}_{E_i}$ ovat suppenevia, siis Cauchy. Oletuksen mukaan siis $\mathcal{F}$ suppenee eli $\mathcal{F} \supset x + \mathcal{U}_E$ jollekin $x = (x-i)_{i\in I} \in E$. Osoitetaan lopuksi, että $\mathcal{F}_j \to x_j$ eli $\mathcal{F}_j \supset x_j + \mathcal{U}_{E_j}$. Olkoon $x_j + U_j \in x_j + \mathcal{U}_{e_j}$. Nyt $x + \pi_j^{-1}(U) \in x + \mathcal{U}_E \subset \mathcal{F}$. Siis

$$x_j + U_{E_j} \supset \pi_j(x + \pi_j^{-1}(U)) \in \pi_j(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_j,$$

joten $x_j + U_{E_j} \in \mathcal{F}_j$, ja siis $x_j + \mathcal{U}_{E_j} \subset \mathcal{F}_j$.

**3.7.** *Olkoon*

$$E = \{f \in \mathcal{C}[0,1] \mid \exists \epsilon_f > 0 \textit{ siten, että } f(t) = 0 \ \forall\, 0 \le t \le \epsilon(f)\}$$

*varustettuna normilla* $\|f\| = \sup |f|$. *a) Onko joukko*

$$\{T = f \in E \mid |f(\tfrac{1}{n}) \le \tfrac{1}{n} \,\forall\, n \in \mathbf{N}^*\}$$

*tynnyri? b) Entä onko se origon ympäristö?* a) Joukko on mitä absorboiva, sillä jos $f \in E$, niin valitaan $n_\epsilon = \max\{n \in \mathbf{N} \mid \frac{1}{n} \ge \epsilon\}$, jolloin $\lambda f \in T$ ainakin silloin, kun

$$|\lambda| \le \frac{1}{n_\epsilon}\big(\max_{1\le n\le n_\epsilon} |f(\tfrac{1}{n})|\big)^{-1}.$$

Joukko $T$ on selvästikin balansoitu ja konveksi. Se on myös suljettu (ja siis tynnyri), koska sen komplementti on avoin; olkoon nimittäin $f \in E \setminus T$. Silloin on olemassa $n \in \mathbf{N}$, jolla $|f(n)| > \frac{1}{n}$. Valitaan $r = (|f(n)| - \frac{1}{n})$. Silloin avoin pallo $B(f,r) = \{g \in E \mid \|f-g\| < r$ sisältyy komplementtiin $E_T$.

Joukko $T$ ei ole origon ympäristö. Muuten se sisältäisi jonkin pallon $B(0, \frac{1}{n})$, mutta eipä sisällä. Vastaesimerkiksi kelpaa mikä tahansa sellainen jatkuva, kasvava funktio, joka on vakio 0 välillä $[0, \frac{1}{2n}]$ ja vakio $\frac{1}{n}$ välillä $[\frac{1}{2n}, 1]$.

Olemme siis huomanneet, että tutkittava normiavaruus $E$ ei ole tynnyriavaruus. Koska normiavaruus on merisoitruva ja lokaalikonveksi, seuraa tynnyrilauseesta, että $E$ ei voi olla täydellinen.

**3.8.** *Esimekki lokaalikonveksin avaruuden osajoukosta, joka on jonotäydellinen, mutta ei täydellinen:* $E = \mathcal{F}([0,1], \mathbf{R}) = \mathbf{R}^{[0,1]} = \{$*kaikki funktiot* $[0,1] \to \mathbf{R}$. *Pistesuppenemisen topologis, eli seminormit* $p_x = |f(x)|$. $M = \{f \in E \mid f(x) \neq 0$ *vain enintään numeroituvan monella* $x \in [0,1]$.

Ratkaisu ensi viikolla

**3.9. Lisätehtävä jos ehditäänja halutaan.** *Olkoon* $K \subset \mathbf{R}^n$ *kompakti joukko. Avaruudessa*

$$E = \mathcal{C}_c^\infty(K) = \{f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \mid f \in \mathcal{C}^\infty,\ \operatorname{supp} f \subset K\}$$

*otetaan käyttöön seminormit*

$$q_\alpha(f) = \sup_{x \in K} \left| \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha f(x) \right|,$$

*missä* $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(x)$ *on multi-indeksiä* $\alpha \in \mathbf{N}^n$ *vastaava (korkeammanasteinen) osittaisderivaatta. Merkitään* $\mathcal{Q} = \{q_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{N}^n\}$. *Osoita, että* $(E, \mathcal{Q})$ *on Fréchet'n avaruus.*

**Ohjeita**: *Tyydy tilanteeseen* $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}$, *jos et halua käsitellä moniulotteista tapausta multi-indekseineen. Asiaan ei tule oleellisia eroja. Voit joko osoittaa suoraan, että* $E$ *on lokaalikonveksi, metrisoituva ja (jono(!)-)täydellinen tai sitten tarkastaa, että* $E$ *on tunnetun avaruuden* $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n) = \{f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \mid f \in \mathcal{C}^\infty,\ \operatorname{supp} f \subset K\}$ *suljettu aliavaruus. Avaruuden* $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ standarditopologian eli derivaattojen kompaktin konvergenssin topologian *määräävät seminormit* $p_{n,K}(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|$ *tai yhtä lailla normit* $\|f\|_{m,K} = \sup_{n \leq m} \sup_{x \in K} |f(x)|$, *missä* $K$ *käy läpi kompaktit reaalilukujoukot ja* $m$ *luonnolliset luvut. Tässä topologiassa* $\mathcal{C}^\infty$ *on metrisoituva ja täydellinen — tämä voi olla tuttua analyysistä.)*

Ratkaistaan aikaisintaan ensi vikolla.