Harjoitukset 2 Ratkaisut **Topologiset vektoriavaruudet**

1.1. *Ratkaise muutama seuraavista: Onko balansoidun joukon kuva topologisten vektoriavaruuksien välisessä jatkuvassa lineaarikuvauksessa aina balansoitu? Entä miten on vastaavasti absorboivan, konveksin, suljetun, kompaktin joukon kuvan laita?*

1.2. *Ratkaise muutama seuraavista: Onko balansoidun joukon alkukuva topologisten vektoriavaruuksien välisessä jatkuvassa lineaarikuvauksessa aina balansoitu? Entä miten on vastaavasti absorboivan, konveksin, suljetun, kompaktin joukon alkukuvan laita?*

1.3. *a) Konstruoi esimerkki konveksista joukosta, jonka balansoitu verho ei ole konveksi.*

b) Onko konveksi joukko $A \subset E$ balansoitu, jos $\lambda A \subset A$ kaikilla $\lambda \in \mathbf{K}$, joille $|\lambda| = 1$?

a) Origon kautta kulkematon jana $\mathbf{R}^2$:ssa.

b) On. Olkoon $|\mu| \le 1$ ja $x \in A$. Osoitetaan, että $\mu x \in A$. Oletuksen mukaan $-x \in A$, joten konveksiuden nojalla $0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x) \in A$. Väite pätee siis, kun $\mu = 0$. Edelleen konveksiuden nojalla $\mu x = (1 - |\mu|) \cdot 0 + |\mu| x \in A$. Oletuksen mukaan siis $\mu x = \frac{\mu}{\|\mu|}|\mu| x \in A$, kun $\mu \neq 0$.

1.4. *a) Osoita, että kompaktin joukon balansoitu verho on kompakti.*

b) Konstruoi esimerkki suljetusta joukosta $A \subset \mathbf{R}^2$, jonka konveksi verho ei ole suljettu.

a) $\operatorname{bal} A = \bigcup_{\lambda \le 1} \lambda A = f(\{\lambda \in \mathbf{K} \bigm| |\lambda| \le 1\} \times A)$, siis kahden kompaktin joukon tulon kuva jatkuvassa kuvauksessa!

b) Funktion $\frac{1}{1+x^2}$ kuvaaja tasossa $\mathbf{R}^2$.

1.5. *Osoita, että vektoriavaruuden E seminormiperheen $(p_i)_{i\in I}$ supremum $p(x) = \sup_{i\in I} p_i(x)$ on seminormi, kunhan vain $p(x) < \infty$ kaikilla $x \in E$.*

$$p(x+y) = \sup_{i\in I} p_i(x+y) \le \sup_{i\in I}(p_i(x) + p_i(y)) \le \sup_{i\in I} p_i(x) + \sup_{i\in I} p_i(y) = p(x) + p(y)$$

$$p(\lambda x) = \sup_{i\in I} p_i(\lambda x) = \sup_{i\in I} |\lambda|(p_i(x) = |\lambda| \sup_{i\in I}(p_i(x) = |\lambda| p(x)$$

1.6. *Lokaalikonveksissa avaruudessa E* jatkuvien seminormien kanta *on joukko $\mathcal{J}$ jatkuvia seminormeja siten, että jokaisella jatkuvalla seminormilla p on olemassa kantaseminormi $q \in \mathcal{J}$ ja luku $\lambda > 0$ siten, että $p \le \lambda q$.*

Osoita, että lokaalikonveksissa avaruudessa $(E, \mathcal{T})$ jokainen jatkuvien seminormien kanta $\mathcal{J}$ määrää saman lokaalikonveksin topologian $\mathcal{T}$.

Olkoon $\mathcal{J}$ lokaalikonveksin avaruuden $(E, \mathcal{N})$ jatkuvien seminormien kanta. Merkitään tutkittavien topologioiden origon ympäristöfiltteireitä $\mathcal{J}$ ja $\mathcal{N}$. On osoitettava, että $\mathcal{J} = \mathcal{N}$.

Olkoon ensin U origon ympäristö perheen $\mathcal{J}$ virittämässä topologiassa eli $U \in \mathcal{U}_{\mathcal{J}}$. Voi olettaa, että U on $\mathcal{J}-$kantajoukko eli on olemassa luku $\varepsilon > 0$ ja jatkuvat seminormit $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{J}$ s.e.

$$U = \varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} B_{p_i}$$

Koska seminormit p_i ovat oletuksen mukaan jatkuvia $(E, \mathcal{N})$:ssä, niin seminormien jatkuvuuslauseen perusteella on olemassa kullakin i seminormit $q_{i,j} \in \mathcal{N}$ ja luvut $\lambda_i > 0$ $(j = 1, \ldots, n_i)$ siten, että

$$p_i \leq \lambda_i(q_{i,1} + \cdots + q_{i,n_i}),$$

jolloin sopivalla $\varepsilon' > 0$ on

$$U \supset \varepsilon' \bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{n_j} B_{q_{i,j}},$$

joka on $\mathcal{N}$-kantajoukko. Siis $U \in \mathcal{U}_{\mathcal{N}}$, joten on näytetty, että $\mathcal{U}_{\mathcal{J}} \subset \mathcal{U}_{\mathcal{N}}$.

Olkoon sitten U origon ympäristö perheen $\mathcal{N}$ virittämässä topologiassa eli $U \in \mathcal{U}_{\mathcal{N}}$. Voi olettaa, että U on kantajoukko eli on olemassa luku $\varepsilon > 0$ ja seminormit $q_1, \ldots, q_n \in \mathcal{J}$ s.e.

$$U = \varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} B_{q_i}$$

Koska seminormit p_i muodostavat oletuksen mukaan jatkuvien seminormien kannan $(E, \mathcal{N})$:ssä, niin kullakin i on olemassa seminormi $p_i \in \mathcal{J}$ ja luku $\lambda_i > 0$ siten, että $q_i \leq \lambda_i p_i$ jolloin $B_{q_i} \supset B_{\lambda_i p_i} = \frac{1}{\lambda_i} B_{p_i}$ ja siis sopivalla $\varepsilon' > 0$ on

$$U \supset \varepsilon' \bigcap_{i=1}^{n} B_{p_i},$$

joka on $\mathcal{J}$-kantajoukko. Siis $U \in \mathcal{U}_{\mathcal{J}}$, joten on näytetty, että $\mathcal{U}_{\mathcal{N}} \subset \mathcal{U}_{\mathcal{J}}$.

Huom. Edellisen tehtävän päättelyä vähän täydentelemällä — mikä on oleellisesti tehty seuraavassa tehtävässä — voi todistaa, että seuraavat ovat yhtäpitäviä

(1) $\mathcal{J}$ on jatkuvien seminormien kanta
(2) $\{\varepsilon U_p \mid p \in \mathcal{J},\, \varepsilon > 0\}$ on origon ympäristökanta

1.7. *Näytä, että jos lokaalikonveksissa avaruudessa E on yksikin jatkuva normi, niin E:ssä on* jatkuvien seminormien kanta $\mathcal{N}$, *joka muodostuu normeista. Onko E välttämättä normiavaruus?*

1. tapa: Olkoon n jatkuva normi lokaalikonveksissa avaruudessa $(E, \mathcal{P})$. Sen suljettu 1-pallo $B = B_n$ on suljetun joukon alkukuva, siis suljettu joukko, ja 0:n ympäristön alkukuva, siis origon ympäristö. Itse asiassa se on tehtävän 1 nojalla tynnyri. Valitaan avaruudelle E tynnyreistä muodostuva ympäristökanta $\mathcal{U}$ ja leikataan jokaista kantajoukkoa pallolla B, jolloin saadaan uusi pienemmistä tynnyreistä muodostuva ympäristökanta $\{U \cap B \mid U \in \mathcal{U}\}$, jonka kaikki kantajoukot sisältyvät normin n yksikköpalloon B. Näiden mittausfunktiot n_U ovat seminormeja, mutta suurempia kuin

normi n, joten ne ovat normeja. Koska niiden ykikköpallot muodostavat origon ympäristökannan, ne varmasti muodostavat jatkuvien seminormien kannan, onhan jokaisella jatkuvalla seminormilla p nyt olemassa origon kantaympäristö $U \cap B \subset B_p$, jolloin $p \leq N_U$.

2. tapa: Valitse jokin jatkuvien seminormien kanta $\mathcal{J}$. (Sellainen on tietenkin olemassa, kelpaahan , esimerkiksi kaikkien jatkuvien seminormien joukko.) Etsityksi kannaksi kelpaa $\{\max\{n, p\} \bigm| p \in \mathcal{J}\}$. Perustelut ja tulos ovat samantapaiset kuin 1. tavalla laskiessa.

1.8. *Olkoon E vektoriavaruus, M sen aliavaruus, p seminormi avaruudessa M ja q seminormi koko avaruudessa E siten, että $p \leq q\big|_M$ eli $p(x) \leq q(x) \forall x \in M$. Osoita, että on olemassa koko avaruudessa E määritelty seminormi $\bar{p}$ siten, että $p = \bar{p}\big|_M$ ja $p \leq q$.*

Olkoon $U = \mathrm{co}(U_p \cup U_q)$. On helppoa tarkastaa, että U on abs, bal, konveksi, joten sen mittausfunktio $\bar{p}$ on seminormi. Lisäksi selvästikin $U \supset U_q \implies \bar{p} \leq q$ ja lopuksi huomataan, että $\bar{p}(x) = p(x)$ kaikille $x \in M$, koska **aliavaruudessa** M pätee $x \in U \iff x \in U_p$.

1.9. *Olkoot $(E, \mathcal{P})$ ja $(F, \mathcal{Q})$ lokaalikonvekseja avaruuksia, missä $\mathcal{P}$ ja $\mathcal{Q}$ ovat jatkuvien seminormien kantoja. Osoita, että lineaarikuvaus $T : E \to F$ on jatkuva, jos ja vain jos kaikilla $q \in \mathcal{Q}$ on olemassa $p \in \mathcal{P}$ ja $\lambda > 0$ siten, että $q(Tx) \leq \lambda p(x)$ kaikilla $x \in E$.*

Olkoon ehto voimassa. Kuvauksen T jatkuvuuden osoittamiseksi riittää näyttää, että jokainen yhdistety kuvaus $q \circ T$ on jatkuva, missä $q \in \mathcal{Q}$ on kantaseminormi. Tämä tarkoittaa, että kaikilla $q \in \mathcal{Q}$, $\varepsilon > 0$ on olemassa $U \in \mathcal{U}_E$ siten, että $|q \circ T| \leq \varepsilon$ joukossa U.

Tarkastellaan oletuksen mukaista seminormia p, jolla $q(Tx) \leq \lambda p(x)$ kaikilla $x \in E$. Nyt sopiva μU_p kelpaa U:ksi. Tarkastuksessa joutuu vähän laskemaan.

Toiseen suuntaan oleellisesti sama päättely.