JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO — MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Harjoitusten 11 alustavat ratkaisut **Topologiset vektoriavaruudet 2010**

11.1. *Onko e^x hitaasti kasvava distribuutio? Entä $e^x \cos(e^x)$? (Onko johtopäätöksesi ristiriidassa Hahn-Banachin lauseen kanssa?)*

a) Ainakaan $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^x\,dx$ ei ole määritelty kaikille nopeasti väheneville funktioille φ, esimerkiksi ei funktiolle $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ jolle $\varphi_0(x) = e^{-|x|/2}$, kun $|x| \geq 1$. Mutta onko tämä vastaus kysymykseen? Ajatellaan tarkemmin. Jos $\Lambda = e^x$ olisi hitaasti kasvava distribuutio, niin se olisi erityisesti myös Schwartzin distribuutio (luku 13.1) ja $\langle \varphi, \Lambda \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^x\,dx$ ainakin kaikille $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Selvitetään, voidaanko tämä jatkaa jatkuvaksi lineaarimuodoksi avaruuteen $\mathcal{S}(\mathbb{R})$: Koska $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ on tiheässä $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:ssä, niin jatkamisen mahdollisuus on yhtäpitävää $\mathcal{S}(\mathbb{R})$-jatkuvuuden kanssa. Tehtäväksi jää siis osoittaa lineaarikuvauksen $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{K} : \langle \varphi, \Lambda \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^x\,dx$ epäjatkuvuus avaruuden $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ indusoimassa topologiassa. Valitaan apufunktiot $\psi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, joilla $0 \leq \psi_n \leq 1$, $\operatorname{supp}\psi \in [-2n, 2n]$ ja $\psi = 1$ välillä $[-n, n]$. Nyt $\psi_n\varphi_0 \to \varphi_0$ avaruudessa $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ja erityisesti $(\psi_n\varphi_0)_{\mathbb{N}}$ on Cauchy- jono avaruuteen $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ indusoituneessa aliavaruustopologiassa, mutta $(\langle \psi_n\varphi_0, \Lambda\rangle)_{\mathbb{N}}$ ei suppene, vaan

$$\langle \psi_n\varphi_0, \Lambda \rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi_n\varphi_0 \cdot e^x\,dx \to \infty,$$

joten Λ ei ole siinä topologiassa jatkuva. □

b) Myöskään $e^x \cos(e^x)$ ei ole hitaasti kasvava distribuutio. Syy on periaatteessa sama kuin kohdassa a). $\cos(e^x) \geq \frac{1}{2}$, kun $2k\pi - \frac{1}{2} \leq e^x \leq 2k\pi + \frac{1}{2}$ eli, kun $\log(2k\pi - \frac{1}{2}) \leq x \leq \log(2k\pi + \frac{1}{2})$, siis väleillä, joiden pituudet ovat, kun $k > 0$, väliarvolauseen nojalla $\log(2k\pi + \frac{1}{2}) - \log(2k\pi - \frac{1}{2}) \geq \frac{1}{2k\pi + \frac{1}{2}} \geq \frac{1}{10k}$, siis yhteensä ∞. Valitaan $C^\infty-$ funktio ψ, joka on 1 näillä väleillä ja 0, kun $\cos(e^x)$ on negatiivinen. Nyt $\varphi_0\psi$ tekee samat palvelukset kuin φ_0 a)-kohdassa.

11.2. *Miksi seuraavat ovat hitaasti kasvavia distribuutioita:*

a) *kompaktikantajaiset distribuutiot*

b) *positiiviset Borel-mitat μ, joilla on olemassa $k \in \mathbb{N}$ siten, että:*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{(1 + |x|^2)^k} < \infty$$

c) *mitalliset funktiot g, joilla on olemassa $p \in [1, \infty[$ ja $N > 0$ siten, että*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{|g(x)|}{(1 + |x|^2)^N} \right)^p < \infty \quad \textit{eli} \quad \frac{g(x)}{(1 + |x|^2)^N} \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}).$$

d) *polynomit.*

Vastaus. (a) Olkoon $K = \operatorname{supp}\Lambda$ kompakti. Valitaan apufunktio $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ joka saa arvon 1 avoimessa joukossa $U \supset K$. Olkoon

$$\langle f, \tilde{\Lambda} \rangle = \langle f\psi, \Lambda \rangle$$

Jos $f_i \to 0$ avaruuden $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ topologiassa, niin $f_i\psi \to 0$ avaruuden $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ topologiassa, joten $\tilde{\Lambda} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^*$. Toisaalta kaikille $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on $\langle f, \tilde{\Lambda} \rangle = \langle f, \Lambda \rangle$. □

(b) Olkoon μ Borel-mitta, ja $k \in \mathbb{N}$ siten, että $\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{(1+|x|^2)^k} < \infty$. Pitää näyttää, että $f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu$ on jatkuva avaruuden $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ topologiassa. Oletetaan $f_j \to 0$ avaruuden $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ topologiassa, jolloin erityisesti $\|(1+|x|^2)^k f_j(x)\|_\infty \to 0$. Nyt

$$|\langle f_j, \mu\rangle| = |\int_{\mathbb{R}} f_j(x)\, d\mu| = |\int_{\mathbb{R}} \frac{(1+|x|^2)^k}{(1+|x|^2)^k} f_j(x)\, d\mu| \le \underbrace{\|(1+|x|^2)^k f_j(x)\|_\infty}_{\to 0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{(1+|x|^2)^k}}_{<\infty}.$$

(c) Tässä $\langle \varphi, \Lambda_g\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi g\, dx$. Tapaus $p=1$ on erikoistapaus kohdasta (b). Jos taas $p \in]1,\infty[$, niin muistetaan *Hölderin epäyhtälö*, jonka mukaan: ”Jos $p > 1$ ja $q > 1$ siten, että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, sekä $f \in L^p$ ja $g \in L^q$, niin

$$|\int_{\mathbb{R}} fg\, d\mu| \le \left(\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g|^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.''$$

Jaetaan integroitava sopivasti tekijöiksi, ”hölderöidään” ja muistetaan, että tavoitteena on $|\langle \varphi, \Lambda_g\rangle| \le C\|D^k\varphi(x)(1+|x|^2)^N\|_\infty$ joillekin N, k ja C.

$$\begin{aligned}
|\langle \varphi, \Lambda_g\rangle| &= |\int_{\mathbb{R}} \varphi g\, dx| \\
&= |\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)(1+|x|^2)^N \frac{g(x)}{(1+|x|^2)^N}\, dx| \\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\varphi(x)(1+|x|^2)^N\right|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{|g(x)|}{(1+|x|^2)^N}\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}_{=\text{C=vakio}} \\
&\le C\left(\int_{\mathbb{R}} \left|\varphi(x)(1+|x|^2)^N\right|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= C\left(\int_{\mathbb{R}} \left|\varphi(x)(1+|x|^2)^M \cdot (1+|x|^2)^{N-M}\right|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le C\|\varphi(x)(1+|x|^2)^M\|_\infty \cdot \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \left|(1+|x|^2)\right|^{(N-M)q}\, dx\right)^{\frac{1}{q}}}_{\text{vakio}<\infty \text{ kun } M \text{ riittävän suuri}}.
\end{aligned}$$

(d) Polynomi toteuttaa edellisen kohdan ehdon. □

11.3. *Osoita, että hitaasti kasvavan distribuution derivaatta on hitaasti kasvava distribuutio.*

VASTAUS.

$$\langle f, D\Lambda\rangle = \langle -Df, \Lambda\rangle,$$

toisin sanoen hitaasti kasvavan distribuution Λ derivaatta on yhdistetty kuvaus $\Lambda \circ (-D)$, missä D on derivointi $D : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Λ onoletuksen mukaan jatkuva ja derivoinnin derivointi $D : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ jatkuvuus todistetaan seuraavassa tehtävässä kohdassa a). □

11.4. *Seuraavat lineaarikuvaukset $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ovat jatkuvia:*

(1) *Derivointi.*
(2) *Kertominen polynomilla.*
(3) *Kertominen nopeasti vähenevällä funktiolla.*

Vastaus. (Tehtävän vihje oli varmaan turha.) Olkoon $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(1) Derivointi: Tavoitteeksi riittää kaikilla N, k

$$\|(1+|x|^2)^N D^k(D\varphi)(x)\|_\infty \leq C\|(1+|x|^2)^{N'} D^{k'}\varphi(x)\|_\infty$$

joillekin N', k' ja C. Voidaan valita $C = 1, k' = k+1$ ja $N' = N$. $\square$

(2) Kertominen polynomilla P: Tavoitteeksi riittää kaikilla N, k

$$\|(1+|x|^2)^N D^k(P\cdot\varphi)(x)\|_\infty \leq \sum_{k'=1}^{N} \|P_{k'}(x) D^{k'}\varphi(x)\|_\infty$$

joillekin $N' \in \mathbb{N}$ ja polynomeille $P_1, \ldots, P_N$. Tulon dervoimiskaava antaa

$$\begin{aligned}\|(1+|x|^2)^N D^k(P\cdot\varphi)(x)\|_\infty &= \|(1+|x|^2)^N \sum_{j=0}^{k} (D^j P(x))(D^{k-j}\varphi_n(x))\|_\infty \\ &\leq \sum_{j=0}^{k} \|(1+|x|^2)^N (D^j P(x))(D^{k-j}\varphi_n(x))\|_\infty \quad \square\end{aligned}$$

(3) Kertominen nopeasti vähenevällä funktiolla g: Tavoitteeksi riittää kaikilla N, k

$$\|(1+|x|^2)^N D^k(g\cdot\varphi)(x)\|_\infty \leq C\sum_{k'=1}^{N} \|P_{k'}(x) D^{k'}\varphi(x)\|_\infty$$

joillekin $N' \in \mathbb{N}$, $C > 0$ ja polynomeille $P_1, \ldots, P_N$. Tulon dervoimiskaava antaa

$$\begin{aligned}\|(1+|x|^2)^N D^k(g\cdot\varphi)(x)\|_\infty &= \|(1+|x|^2)^N \sum_{j=0}^{k} (D^j g(x))(D^{k-j}\varphi_n(x))\|_\infty \\ &\leq \sum_{j=0}^{k} \|(1+|x|^2)^N (D^j g(x))(D^{k-j}\varphi_n(x))\|_\infty \\ &\leq \max_{1\leq j\leq N} \|D^j g(x)\|_\infty \sum_{j=0}^{k} \|(1+|x|^2)^N (D^{k-j}\varphi_n(x))\|_\infty\end{aligned}$$

$\square$

11.5. $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})-$funktioiden Fourier-muunnoksella $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ on mm. seuraavat ominaisuudet: Kaikilla $f,\ g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ ja $x,\ t \in \mathbb{R}$:

a) $\mathcal{F}$ on lineaarinen
b) $(\tau_x f)\,\hat{}\, = e_{-x}\hat{f}$
c) $(e_x f)\,\hat{}\, = \tau_{-x}\hat{f}$
d) $(f \circledast g)\,\hat{}\, = \hat{f}\,\hat{g}$

e) $(\frac{f}{\lambda})\hat{}\,(t) = \lambda \hat{f}(\lambda t)$, kun $\lambda > 0$.
MERKINTÄ $\frac{f}{\lambda}$ tarkoittaa tässä funktiota $x \mapsto f(\frac{x}{\lambda})$

TODISTUS. (a) on ilmeinen.

(b) $(\tau_x f)\hat{}\,(t) = \int_{\mathbb{R}} (\tau_x f) e_{-t}\, dm = \int_{\mathbb{R}} f \tau_{-x} e_{-t}\, dm = \int_{\mathbb{R}} f e_{-t}(x) e_{-t}\, dm = e_{-x}(t)\hat{f}(t)$.

(c) $(e_x f)\hat{}\,(t) = \int_{\mathbb{R}} (e_x f) e_{-t}\, dm = \int_{\mathbb{R}} f e_{-(t-x)}\, dm = \tau_{-x}(t)\hat{f}(t)$.

Todista (d) ja (e).

TODISTUS. : (d)

$$(f \hat{*} g)(x) = \int_{y \in \mathbb{R}} f(x-y) g(y)\ dm(y)$$

$$\begin{aligned}
(f \hat{*} g)\hat{}\,(t) = \int_{x\in\mathbb{R}} (f \hat{*} g)(x) e^{-ixt}\, dm(x) &= \int_{x\in\mathbb{R}} \int_{y\in\mathbb{R}} f(x-y) g(y)\ dm(y) e^{-ixt}\ dm(x) \\
&= \int_{y\in\mathbb{R}} \int_{x\in\mathbb{R}} f(x-t) g(y)\, e^{-ixt}\, dm(x) dm(y) \\
&= \int_{y\in\mathbb{R}} g(y) \int_{x\in\mathbb{R}} f(x-t)\, e^{-ixt}\, dm(x) dm(y) \\
&= \int_{y\in\mathbb{R}} g(y) e^{-ity} \hat{f}(t) dm(y) \\
&= \hat{f}(t) \int_{y\in\mathbb{R}} g(y) e^{-ity} dm(y) \\
&= \hat{f}(t)\hat{g}(t) \quad \square
\end{aligned}$$

(e) MERKINTÄ $\frac{f}{\lambda}$ tarkoittaa tässä funktiota $x \mapsto f(\frac{x}{\lambda})$, (voivoi!) Tämän huomaa laskemalla toisesta päästä alkaen:

$$\hat{f}(\lambda t) = \int_{x\in\mathbb{R}} f(x) e^{ix\lambda t}\, dm(t) \overset{u=\lambda x}{=} \int_{u\in\mathbb{R}} f(\tfrac{u}{\lambda}) e^{-iyt}\, \frac{dm(u)}{\lambda} = \tfrac{1}{\lambda} \cdot (\tfrac{f}{\lambda})\hat{}\,(t) \quad \square$$

Kurssin ryhmäopetus päättyi tähän harjoitukseen. Monisteen teko jatkuu vielä viikon, pari, mutta toimitin kaikille kurssilaisille koko luentotekstin esipainoksen. (Pari kpl on vielä laatikossa) Aion yhdistää lopulliseen versioon tehtävät ja kommentteja samaan tapaan kuin FAN monisteessa. Otanko tehtävistä mukaan myös ratkaisuja – vai vain (hyvät?) vihjeet? Otan hyvin mielelläni vastaan palautetta kaikesta.

Kiitos osallistumisesta kurssille — vieraat tekevät juhlan. L

(Ja tervetuloa 14.12 **TIISTAINA!**)