JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Harjoitusten 10 ratkaisut (viimeisessä tehtävässä oli ikävä painovirhe) Topologiset vektoriavaruudet 2010

10.1. Viime kerran tehtävää mukaillen. *Olkoon* $(\Lambda_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)^*$ *jono distribuutioita siten, että kaikilla* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *on olemassa raja-arvo*

$$\langle \varphi, \Lambda \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \varphi, \Lambda_n \rangle \in \mathbb{C}.$$

Osoita Banachin ja Steinhausin (tasaisen rajoittuneisuuden) periaatteen avulla, että $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ *ja* $D^k\Lambda_n \to D^k\Lambda$ *avaruuden* $\mathcal{D}(\Omega)^*$ *standarditopologiassa, joka on.....*

...heikko topologia $\sigma(\mathcal{D}(\Omega)^*, \mathcal{D}(\Omega))$.
(a) Λ on tietenkin lineaarinen. Tarkastetaan sen jatkuvuus: Olkoon $K \subset \Omega$ kompakti. Tarkastellaan kuvausperhettä $(\Lambda_n\big|_K)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_K(\Omega)^*$. Se on **pisteittäin rajoitettu**, sillä kussakin "pisteessä" $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ joukko $\{\langle \varphi, \Lambda_n\rangle \;\big|\; n \in \mathbb{N}\}$ on suppenevana jonona rajoitettu lukujoukko. Koska $\mathcal{D}_K(\Omega)$ on Fréchet-avaruus, perhe on siis Banachin ja Steinhausin periaatteen nojalla yhtäjatkuva: Jokaiselle ympäristölle $B(0,r) \in \mathcal{U}_{\mathbb{C}}$ on olemassa sellainen ympäristö $U_r \in \mathcal{U}_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on

$$\langle U_r, \Lambda_n \rangle \subset B(0,r)$$

joten kaikilla $\varphi \in U_r$:

$$|\langle \varphi, \Lambda \rangle| = \lim_{n\to\infty} |\langle \varphi, \Lambda_n \rangle| \le r$$

Λ:n rajoittumat avaruuksiin $\mathcal{D}_K(\Omega)$ ovat siis jatkuvia, joten $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.
(b) Oletuksen $\langle \varphi, \Lambda\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle \varphi, \Lambda_n\rangle \in \mathbb{C}$ nojalla siis ainakin $\Lambda_n \to \Lambda$ avaruuden $\mathcal{D}(\Omega)^*$ standarditopologiassa.

Kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on siis distribuutioderivaatan määritelmän mukaan

$$\langle \varphi, D^k\Lambda_n \rangle = (-1)^k \langle D^k\varphi, \Lambda_n \rangle \to (-1)^k \langle D^k\varphi, \Lambda \rangle = \langle \varphi, D^k\Lambda \rangle,$$

eli $D^k\Lambda_n \to D^k\Lambda$ avaruuden $\mathcal{D}(\Omega)^*$ standarditopologiassa. (Viimeisen johtopäätöksen saa tietysti heti myös derivoinnin jatkuvuudesta, joka todistetaan samalla tavalla.)

10.2. *Päteekö* $\langle \varphi, \Lambda \rangle = 0 \implies \varphi\Lambda = 0,$ *kun* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *ja* $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$*?*

$\varphi\Lambda = 0$ merkitsee tulon $\varphi\Lambda$ määritelmän mukaan, että $\langle \psi\varphi, \Lambda \rangle = \langle \psi, \varphi\Lambda \rangle = 0$ kaikille $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Valitaan konvolouutiosilotuksella funktiot $\psi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ siten, että $\psi_n\varphi \to \varphi$ avaruudessa $\mathcal{D}(\Omega)$. Silloin $0 = \langle \psi_n\varphi, \Lambda \rangle \to \langle \varphi, \Lambda \rangle$, joten $\varphi, \Lambda\rangle = 0$.

Toisensuuntainen johtopäätös ei tietenkään päde. Vastaesimerkin saa jo funktioista: Λ olkoon välillä $[-1,1]$ 1, muuten 0 ja $\varphi = \psi$ välillä $[-1,1]$ x, muuten 0.

10.3. *Lausu Diracin delta eksplisiittisesti jatkuvan funktion sopivan (mahdollisimman alhaisen) kertaluvun derivaattana.*

δ_0 on Heavisiden askelfunktion $H(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \leq 0 \\ 1, & \text{kun } x > 0. \end{cases}$ distribuutioderivaatta.

Askelfunktio taas on jatkuvan funktion $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \leq 0 \\ x, & \text{kun } x > 0. \end{cases}$ distribuutioderivaatta. Laskut: Vrt. tehtävä 8.

10.4. (Kahden funktion konvoluutio). *Kahden funktion $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ konvoluutio on määritelmän mukaan*

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}} u(t)v(x-t)\,dt,$$

kun oikean puolen Lebesgue–integraali on olemassa. Osoita, että jos merkitsemme $\tau_x(v)$:llä funktiota v siirrettynä x:n verran: $\tau_x(v)(t) = v(t-x)$, ja merkitsemme $\tilde{v}$:lla funktion v peilikuvaa $\tilde{v}(t) = v(-t)$, niin $(u * v)(x) = \langle \tau_x(\tilde{v}), \Lambda_u \rangle$.

Säännöllisen distribuution määritelmän $\langle \varphi, \Lambda_f \rangle = \int_\Omega f\varphi$, mukaan — jos u on lokaalisti integroituva (ja näin on varmaan tarkoitettu olevan, koska on oletettu konvoluution olevan olemassa kaikilla v.) — niin

$$\langle \tau_x(\tilde{v}), \Lambda_u \rangle = \int_\Omega u\tau_x(\tilde{v}) = \int_{\mathbb{R}} u(t)\tau_x(\tilde{v})(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} u(t)\tilde{v}(t-x)\,dt = \int_{\mathbb{R}} u(t)v(x-t)\,dt. \quad \square$$

10.5. *Konvoluutiolla on reaalianalyysin kirjoista löytyviä hyviä ominaisuuksia.*

(1) *Yleensä $u * v$ on yhtä "sileä" kuin sileämpi funktioista u ja v.*
(2) *$u * v = v * u$.*
(3) *jne.*
(4) *yms.*
(5) ...
(6) *Fourier–muunnoksessa g muuttuu tuloksi: $\mathcal{F}(uv) = \mathcal{F}u * \mathcal{F}v$.*

Täydennä listaa ja todista/perustele haluamasi kohdat — tai viittoile sopiviin lähdeteoksiin.

Sanakirja antaa käännökset "convolution"= kierre, konvoluutio, monimutkaisuus, poimu", joista viimeinen on paras; saksaksihan konvoluutio on "Faltung"

Viittoillaan sopimattomaan lähdeteokseen - Wikipediaan/Wolfram math worldiin:
http://en.wikipedia.org/wiki/Convolution
http://mathworld.wolfram.com/Convolution.html
ja edelleen Googlen kautta eri kielisiin sivuihin, esim.
http://fi.wikipedia.org/wiki/Konvoluutio
http://de.wikipedia.org/wiki/Faltung (Mathematik)
http://www.techno-science.net/?onglet=glossaire&definition=6331

10.6. *Todista/perustele, että jos u ja v ovat joidenkin riippumattomien satunnaismuuttujien jakaumien tiheysfunktioita, niin niiden konvoluutio on satunnaismuuttujien summan jakauman tiheysfunktio. Myös diskreettien jakaumien summalle on olemassa samantapainen kaava. Millainen on vastaava kaava diskreeteille satunnaismuuttujille? Entä jos toinen on diskreetti, toinen jatkuva?*

Ks. Tn-kurssi, mutta mieti itsekin!

10.7. (Distribuution ja funktion konvoluutio). *Olkoon* $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *ja* Λ *kompaktikantajainen distribuutio sekä* $x \in \mathbb{R}$. *Todista, että jos* $\operatorname{supp}\Lambda \cap (x - \operatorname{supp}\psi) = \emptyset$, *niin* $(\Lambda * \psi)(x) = 0$.

Seuraa siitä, että määritelmän mukaan $(\Lambda * \psi)(x) = \langle \tau_x \tilde{\psi}, \Lambda \rangle$. Lisäksi $\operatorname{supp}(\tau_x(\tilde{\psi})) = (x - \operatorname{supp}\psi)$. . Erilliset kantajat takaavat, että $\langle \tau_x \tilde{\psi}, \Lambda \rangle = 0$. □

10.8. *Tarkastellaan Heavisiden askelfunktiota* $H(x) = \begin{cases} 0, & \textit{kun } x \leq 0 \\ 1, & \textit{kun } x > 0. \end{cases}$

Sen derivaatta tavallisessa mielessä on mk. 0, mutta distribuutiomielessä sen derivaatta on δ_0. *(Todista itse!)*

Osoita, että kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

a) $(H * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt$
b) $D\delta_0 * H = \delta_0$.
c) $\Lambda_1 * D\delta_0 = 0$. *(Tässä 1 on vakiofunktio 1 ja* Λ_1 *sitä vastaava säännöllinen distribuutio.)* **KORJATTU OPAINOVIRHE** *(Oli* $\Lambda_1 * H$.*)*
d) *On olemassa distribuutiot* Λ_a, Λ_b *ja* $\Lambda_c \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$, *joilla*

$$(\Lambda_a * \Lambda_b) * \Lambda_c \neq \Lambda_a * (\Lambda_b * \Lambda_c).$$

a) $(H * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x - t)\varphi(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt.$
b) $D\delta_0 * H = \delta_0 * DH = \delta_0 * \delta_0 = \delta_0$, sillä $\delta_0 * \Lambda = \Lambda$ kaikille Λ
c) $\Lambda_1 * D\delta_0 = D\Lambda_1 * \delta_0 = D\Lambda_1 = 0$
d)

$$\Lambda_1 * (D\delta_0 * H) = \Lambda_1 * \delta_0 = 1,$$

mutta

$$(\Lambda_1 * D\delta_0) * H = 0 * H = 0.$$