Harjoitukset 1 Ratkaisut **Topologiset vektoriavaruudet**
tiistai 28.9.2010 16-18 MaD-355

1.1. *Olkoot $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ filtterikantoja joukossa E.*
a) Onko $\{A \cup B \mid A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}$ filtterikanta joukossa E?
Filtterikanta-aksioomat ovat

$$\emptyset \notin \mathcal{A} \quad \text{ja } \mathcal{A} \neq \emptyset \tag{1}$$

$$A, A' \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad \exists A'' \in \mathcal{A} : A'' \subset A \cap A' \tag{2}$$

Ensimmäinen toteutuu tietenkin ja toinen myös, sillä

$$(A \cup B) \cap (A' \cup B') \supset (A \cap A') \cup (B \cap B') \supset A'' \cup B''.$$

b) Onko $\{A \cap B \mid A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}$ filtterikanta joukossa E?
Eipä ole, vaan voi sisältää tyhjän joukon.

Merkintöjä. .
Ellei toisin mainita, E on seuraavassa tva, $\mathcal{F}(0)$ sen origon ympäristöfiltteri.
$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. $\mathbf{N}^* = \{1, 2, \dots\}$

1.2. *Osoita, että E on yhtenäinen.* Osoitetaan polkuyhtenäiseksi. Olkoot $x, y \in E$. kuvaus $\gamma : [0.1] \to E : t \mapsto ty + (1-t)x$ on jatkuva, $\gamma(0) = x$ ja $\gamma(1) = y$. *(Lisäkysymys: Onko topologinen ryhmä aina yhtenäinen?)* Ei. Vastaesimerkiksi käy äärellinen diskreetti ryhmä.

1.3. *Osoita, että $\bigcap \mathcal{F}(0) = \overline{\{0\}}$ ja että se on vektorialiavaruus.*

$$\begin{aligned} x \in \overline{\{0\}} &\iff 0 \in U \quad \forall U \in U_x \\ &\iff 0 \in x + V \quad \forall V \in U_o \\ &\iff x \in -V \quad \forall V \in U_o \\ &\iff x \in V \quad \forall V \in U_o \text{ (homotetiainvarianssi)} \\ &\iff x \in \bigcap \mathcal{F}(0) \end{aligned}$$

Toinen väite seuraa tietenkin tehtävästä 3, mutta saadaan helposti suoraankin:

1°) $0 \in \overline{\{0\}}$.

2°) $x \in \overline{\{0\}} = \bigcap \mathcal{F}(0) \iff x \in V \quad \forall V \in U_o$

$$\begin{aligned} &\iff \lambda x \in \lambda V \quad \forall V \in U_o, \lambda \neq 0 \\ &\iff \lambda x \in U \quad \forall U \in U_o, \lambda \neq 0 \text{ (homotetiainvarianssi)} \\ &\iff \lambda x \in \overline{\{0\}}. \end{aligned}$$

3°) Olkoon $x, y \in \overline{\{0\}}$, t.s. $x, y \in V \quad \forall V \in U_o$. Osoitetaan, että $x, y \in \overline{\{0\}}$. Olkoon $U \in U_o$. Valitaan $V \in U_o$ siten, että $V + V \subset U$. Nyt $x + y \in V + V \subset U$. $\square$

1.4. *Osoita, että vektorialiavaruuden $F \subset E$ sulkeuma $\bar{F}$ on vektorialiavaruus.* Ainakin $0 \subset F \subset \bar{F}$. Muistetaan topologiasta, että kuvaus f on jatkuva aina ja vain, kun $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ kaikilla A, ja että tulotopologissa $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$. Kertolaskun jatkuvuuden nojalla jokainen $\lambda\cdot : E \to E : x \mapsto \lambda x$ on jatkuva, joten koska $\lambda \cdot F \subset F$, niin $\lambda \cdot \bar{F} \subset \overline{\lambda \cdot F} \subset \bar{F}$. Koska yhteenlasku $+ : E \times E \to E$ on jatkuva, niin $\bar{F} + \bar{F} = +(\bar{F} \times \bar{F}) = +(\overline{F \times F}) \subset \overline{+(F \times F)} \subset \bar{F}$. □

1.5. *Onko avoimen joukon $A \subset E$ balansoitu verho* $\operatorname{bal} A = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbf{K}\}$ *aina avoin joukko?*

Ei. Vastaesimerkki: Normiavaruudessa $\mathbf{R}^2$ joukon $]0,1[\times]0,1[$ balansoitu verho sisältää lisäksi origon.

Mutta jos origo jo kuuluu avoineen joukkoon A, niin silloin $\operatorname{bal} A = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbf{K}\}$ on avoin joukko, koska silloin $\operatorname{bal} A = \bigcup_{|\lambda| \le 1} \lambda A = \bigcup_{0 \ne |\lambda| \le 1} \lambda A$ ja jälkimmäisessä jokainen λA on avoin.

1.6. *Olkoon $E = \mathcal{C}(\mathbf{R},\mathbf{R}) = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f$ on jatkuva$\}$. Merkitään $V_m = \{f \in E \mid |f(t)| \le m(t)\, \forall t \in \mathbf{R}\}$, missä $m \in E$ ja $m(t) > 0\, \forall t \in \mathbf{R}$.*

a) Totea, että on olemassa E:n topologia $\mathcal{T}$, jossa yhteenlasku on jatkuva (ja E siis topologinen abelin ryhmä) ja $\mathcal{F} = \{V_m \mid m \in E$ ja $m(t) > 0\, \forall t \in \mathbf{R}\}$ on origon ympäristökanta. b) Onko $(E, \mathcal{T})$ tva? c) Entä onko (topologinen ja lineaarinen) aliavaruus

$$D = \{f \in E \mid \operatorname{supp} f \text{ on kompakti}\} \subset E$$

tva?

Ainoa ehdokas topologiaksi on ilmeinen, onhan neutraalialkion ympäristökanta annettu ja topologia translaatioinvariantti.

Ainakin $\mathcal{F}$ toteuttaa filtterikanta-aksioomat (Leikkausta tutkiessa valitse $m'' = \min(m, m')$.) ja jokainen V_m sisältää origon eli nollafunktion. Translaatioinvariantti topologia on siis olemassa.

Summan jatkuvuuden toteamiseksi riittää huomata, että

$$(x + \tfrac{1}{2}V_m) + (y + \tfrac{1}{2}V_m) \subset (x + y) + V_m.$$

Tulon epäjatkuvuus saadaan sopivasta vastaesimerkistä, esimerkiksi $f(t) = e^t$. Tällä vektorilla $f \in E$ ei tulon osittaiskuvaus $\lambda \mapsto \lambda f$ ole jatkuva $\mathbf{R} \to E$, sillä jos valitaan m:ksi vakiokuvaus 1, niin $|\lambda f(t) - f(t) = (|\lambda - 1|)e^t$ joka ei ole V_m-funktio ellei λ ole 1. Ympäristöt eivät siis absorboi.

b) $D = \{f \in E \mid \operatorname{supp} f$ on kompakti$\} \subset E$ on edellisen indusoimalla aliavaruustopologialla tva, sillä olkoon $f + V_m \in \mathcal{F}_f,\ g \in D \cap (f + V_n)$ jollekin $n(t) \ge 0 \forall t \in \mathbf{R}$ ja $|\lambda - 1| \le \epsilon$ sekä $t \in \mathbf{R}$.

1) $t \notin \operatorname{supp} f \implies |\lambda g(t) - f(t)| = |\lambda g(t) - 0| = |\lambda||g(t)| \le |1 + \epsilon| n(t) < m(t)$, kun n:ksi valitaan vaikkapa $n(t) = \frac{1}{1+\epsilon} m(t)$

$$\begin{aligned} 2) \quad t \in \operatorname{supp} f \implies |\lambda g(t) - f(t)| &= |\lambda g(t) - \lambda f(t) + \lambda f(t) - f(t)| \le \\ &\le |\lambda||g(t) - f(t)| + (\lambda - 1)|f(t)| \\ &\le (1 + \epsilon) m(t) + \epsilon \|f\|_\infty < m(t), \end{aligned}$$

mikäli n:ksi on valittu esimerkiksi $n(t) = \frac{1}{3} m(t)$ ja ϵ:ksi $\min\{1, \frac{1}{3\|f\|_\infty} \inf_{t \in \operatorname{supp} f} n(t)\}$.

Avaruus ei ole metrisoituva eikä edes origolla ei ole numeroituavaa ympäristökantaa. Jos olisi vaikkapa $\{V_{m_k} \mid k \in \mathbf{N}\}$, niin valittaisiin $m \in \mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ siiten, että

$$m(t) > 0 \forall t$$

ja

$$m(k) < m_k(k) \forall k \in \mathbf{N}.$$

Nyt ei olisi olemassa sellaista V_{m_k}, että $V_{m_k} \subset V_m$.

(Vertaa Cantorin diagonaalimenetelmään, jolla todistetaan, että $/R$ ei ole numeroituva.)

1.7. *Olkoon $U \subset E$ vektoriavaruuden E origon konveksi, balansoitu, ja absorboiva joukko. Osoita, että $\{\frac{1}{n}U \mid n \in \mathbf{N}^*\}$ on origon ympäristökanta eräässä E:n vektoriavaruustopologiassa. Päteekö väite myös, vaikka U ei olisi konveksi? (Entä muiden ehtojen välttämättömyys?)*

Joukkoperhe $\mathcal{K} = \{\frac{1}{n}U \mid n \in \mathbf{N}*\}$ on origon ympäristökanta eräässä E:n tva-topologiassa, koska se toteuttaa lauseen mukaan vaaditut ehdot.

a) $V \in \mathcal{K} \& \lambda \neq 0 \implies \exists U \in \mathcal{K} : \lambda U \subset V$ (NOINKO SE OLI?)

b) $V \in \mathcal{K} \implies \quad V$ absorboi

(Todella: U abs $\implies \frac{1}{n}U$ abs $\implies V$ abs, kun $\frac{1}{n}U \subset V$.)

c) $U' \in \mathcal{K} \implies \exists n, U : \frac{1}{n}U \subset U' \implies \frac{1}{2n}U + \frac{1}{2n}U \subset \operatorname{co}(\frac{1}{n}U) = \frac{1}{n}\operatorname{co}U = \frac{1}{n}U \subset U'$.

d) $U \in \mathcal{K} \implies \exists$ balansoitu $V \in \mathcal{K}$ siten, että $V \subset U$. OK.

1.8. *Kahden topologisen vektoriavaruuden $(E, \mathcal{T}_E)$ ja $(F, \mathcal{T}_F)$ välinen lineaarikuvaus $L : E \to F$ on jatkuva mielivaltaisessa pisteessä $a \in E$ täsmälleen ollessaan jatkuva origossa. Osoita, että L on tällöin tasaisesti jatkuva seuraavassa mielessä:*

$$\forall A \in \mathcal{U}_{0,F} \quad \exists B \in \mathcal{U}_{0,E} : \quad (x - y) \in B \implies (Tx - Ty) \in A.$$

Tehty luennolla.

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Exercise set 1 **Topological Vector Spaces**
tuesday 9.28 at 4-6 PM in MaD-355

1.1. Let $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ be filter bases in a set E.
a) Is$\{A \cup B \mid A \in \mathcal{A},\, B \in \mathcal{B}\}$ a filter basis in the set E?
b) Is$\{A \cap B \mid A \in \mathcal{A},\, B \in \mathcal{B}\}$ a filter basis in the set E?

Notation. .
Unless otherwise stated, E is a tvs, $\mathcal{F}(0)$ the neighbourhood filter of its origin.
$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. $\mathbf{N}^* = \{1, 2, \dots\}$

1.2. Prove: E is connected. (PS: How about general topological groups?)

1.3. Prove that $\bigcap \mathcal{F}(0) = \overline{\{0\}}$ and that this is a vector subspace.

1.4. Prove that the closure $\overline{F}$ of a vector subspace $F \subset E$ is a vector subspace.

1.5. Is the balanced hull $\operatorname{bal} A = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbf{K}\}$ of any open set $A \subset E$ open? (Hint. no, but if ...)

1.6. Consider $E = \mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f \text{ is continuous}\}$. Denote
$V_m = \{f \in E \mid f(t)| \le m(t)\, \forall t \in \mathbf{R}\}$, where $m \in E$ and $m(t) > 0\, \forall t \in \mathbf{R}$.

Prove the existence of a topology $\mathcal{T}$ in E such that addition is continuous (so E is a topological abelian group) and $\mathcal{F} = \{V_m \mid m \in E \text{ and } m(t) > 0\, \forall t \in \mathbf{R}\}$ is a neighbourhood basis of the origin. Is $(E, \mathcal{T})$ a tvs? Is the subspace

$$D = \{f \in E \mid \operatorname{supp} f \text{ is compact }\} \subset E$$

a tvs? (Does it have a countable neighbourhood basis of the origin? Why do I ask?)

1.7. Let $U \subset E$ be convex, balanced and absorbing. Prove that $\{\frac{1}{n}U \mid n \in \mathbf{N}^*\}$ is a neighbourhood basis of the origin in some tvs-topology. (Do we need all 3 assumptions?)

1.8. A linear mapping $L : E \to F$ between 2 topological vector spaces $(E, \mathcal{T}_E)$ ja $(F, \mathcal{T}_F)$ is continuous at any point $a \in E$ iff it is continuous at the origin. Prove that in this case L is uniformly continuous in the following sense

$$\forall A \in \mathcal{U}_{0,F} \quad \exists B \in \mathcal{U}_{0,E} : \quad (x - y) \in B \implies (Tx - Ty) \in A.$$