JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Harjoitukset 8 **Topologiset vektoriavaruudet**
Tiistai 16.11.2010 14.15-15.45 MaD-355

8.1. Olkoon $P_n = \{f : \mathbb{K} \to \mathbb{K} \mid p$ on enintään asteen $n-1$ polynomi$\}$ varustettuna luonnollisella äärellisulotteisen vektoriavaruuden rakenteellaan ja ainoalla lokaalikonveksilla topologiallaan. Olkoon $P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n = \{f : \mathbb{K} \to \mathbb{K} \mid p$ on polynomi$\}$ varustettuna tarkan induktiivisen limeksen rakenteella: $P = \varinjlim P_n$. Onko P metrisoituva tässä topologiassa τ? Onko P Montelin avaruus?

8.2. (jatkoa) Tarkastellaan avaruudessa P myös lokaalikonveksia topologiaa τ_0, jonka määräävät seminormit $q_k(\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i x^i) = |\lambda_k|$. Onko tämä topologia metrisoituva? Entä Montel? Onko toinen topologioista τ ja τ_0 hienompi kuin toinen?

8.3. Osoita, että funktioavaruudet $\mathcal{D}(K)$ ja $\mathcal{D}(\Omega)$ ovat Montelin avaruuksia.

Vihje: Katso liitteestä FAN-monisteessa todistettu *Ascolin lause*, jonka mukaan, jos X on täydellinen metrinen avaruus, K kompakti metrinen avaruus ja $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(K, X) = \{f : K \to X \mid f$ on jatkuva$\}$, niin seuraavat ovat yhtäpitäviä:

(1) $\mathcal{H}$ on relatiivisesti kompakti eli $\overline{\mathcal{H}}$ on kompakti sup-normin suhteen.
(2) a) $\mathcal{H}$ on yhtäjatkuva (Liite).
b) $\mathcal{H}(x)$ on relatiivisesti kompakti kaikilla $x \in K$.

8.4. Todista, että $\mathbb{C}^\infty$–funktion f derivatta on sama kuin sen distribuutioderivaatta — oikein tulkittuna.

8.5. Osoita, että distribuutioderivaatan mielessä

$$\frac{d}{dx}\log|x| = v.p.\frac{1}{x}.$$

Merkintä v.p. (value principale) tarkoittaa Cauchyn pääarvoa integraalille. Joukossa $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ lokaalisti integroituvalle funktiolle määritellään

$$v.p.\int_\infty^\infty f = \lim_{\epsilon\to 0+}\left(\int_\infty^{-\epsilon} f + \int_\epsilon^\infty f\right)$$

Distribuutiona merkintä $v.p.f$ tarkoittaa lineaarimuotoa

$$\mathcal{D} \to \mathbb{R} : \varphi \mapsto \langle \varphi, v.p.f\rangle = v.p\int_\infty^\infty f\varphi.$$

8.6. Tarkastellaan Fréchet-avaruutta E ja $\mathcal{LF}$–avaruutta $F = \varinjlim F_n$. Olkoon $T : E \to F$ jatkuva lineaarikuvaus. Osoita, että on olemassa luonnollinen luku $k \in \mathbb{N}$ siten, että $T(E) \subset F_k$.

Opastusta: Tarkastele joukkoja $H_n = \{(x, Tx) \in E \times F \mid Ty \in E_n\}$. Ne ovat suljettuja aliavaruuksia, siis Fréchet-avaruuksia. Merkitään projektioita $\pi_n : H_n \to F : (x, y) \mapsto x$. Osoita, että jokin sulkeumista $\overline{\pi_n(: H_n)}$ on sisäpistellinen ja muista avoimen kuvauksen lause. .

Liite: Yhtäjatkuvat ja täysrajoitetut kuvausperheet metrisissä avaruuksissa

MÄÄRITELMÄ 8.1. Olkoon $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}(X, Y)$ joukko funktioita eli *funktioperhe* metristen avaruuksien X ja Y välillä sekä $x_0 \in X$. Tässä on merkitty $\mathcal{F}(X, Y) = Y^X =$ kaikkien funktioiden joukko.

(1) Perheen $\mathcal{H}$ funktiot ovat *yhtäjatkuvia pisteessä* x_0, eli perhe $\mathcal{H}$ on *yhtäjatkuva pisteessä* x_0, jos kaikki funktiot $f \in \mathcal{H}$ ovat jatkuvia pisteessä x_0 siten, että jatkuvuuden standardimääritelmässä kullakin ϵ voidaan δ valita niin pieneksi, että se kelpaa kaikille $f \in \mathcal{H}$:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ \forall f \in \mathcal{H} : d(x, x_0) \leq \delta \implies d(f(x), f(x_0)) \leq \epsilon.$$

(2) Perhe $\mathcal{H}$ on *yhtäjatkuva*, jos $\mathcal{H}$ on yhtäjatkuva jokaisessa pisteessä $x_0 \in X$.

(3) Perhe $\mathcal{H}$ on *tasaisesti yhtäjatkuva*, jos kullakin ϵ kelpaa sama δ kaikille $f \in \mathcal{H}$ ja kaikille $x_0 \in X$:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_0 \in X\ \forall x \in X\ \forall f \in \mathcal{H} : d(x, x_0) \leq \delta \implies d(f(x), f(x_0)) \leq \epsilon.$$

Rajoitetun joukon sulkeuma on äärellisulotteisessa avaruudessa $\mathbb{K}^n$ kompakti Heinen ja Borelin tunnetun lauseen mukaan, ja Rieszin lause 6.15 kertoo meille, että ääretönulotteisessa avaruudessa asia on toisin. Tämä asiantila antaa aiheen antaa nimen joukolle, jonka sulkeuma on kompakti. Asetamme samalla toisenkin lähisukuisen määritelmän.

MÄÄRITELMÄ 8.2. (1) Topologisen avaruuden X osajoukko K on *relatiivikompakti*, jos sen sulkeuma $\overline{K}$ on kompakti, eli jos K sisältyy johonkin kompaktiin joukkoon.

(2) Metrisen avaruuden X osajoukko K on *täysrajoitettu*, jos kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa joukon K peite äärellisen monella $\epsilon-$säteisellä pallolla $B(x, \epsilon)$, missä $x \in X$.

HUOMAUTUS 8.3. (1) Täysrajoitettuneisuuden määritelmässä voi yhtä lailla vaatia, että jokainen x kuuluu joukkoon K.

(2) Relatiivikompaktius ja täysrajoittuneisuus periytyvät osajoukolle ja sulkeumalle.

(3) Metrisen avaruuden osajoukolle kompaktius ja jonokompaktius ovat yhtäpitäviä ehtoja.

(4) Täydellisen metrisen avaruuden osajoukolle täysrajoittuneisuus ja relatiivikompaktius ovat yhtäpitäviä ehtoja.

(5) Äärellisulotteisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukolle rajoittuneisuus, täysrajoittuneisuus ja relatiivikompaktius ovat yhtäpitäviä ehtoja.

MÄÄRITELMÄ 8.4. Olkoon X joukko ja Y metrinen avaruus.

(1) Funktioperhe $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}(X, Y)$ on *pisteittäin rajoitettu*, jos jokaisen pisteen $x \in X$ kuvien joukko $\mathcal{H}(x) = \{f(x) \mid f \in \mathcal{H}\} \subset Y$ on rajoitettu.

(2) Vastaavasti määritellään käsitteet *pisteittäin täysrajoitettu* ja *pisteittäin relatiivikompakti* funktioperhe.

LAUSE 8.5. *(Ascolin lause) Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia, joista X kompakti. Tällöin joukolle jatkuvia funktioita $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(X, Y)$ seuraavat kaksi ehtoa ovat yhtäpitäviä:*

(1) *$\mathcal{H}$ on avaruuden $\mathcal{C}(X,Y)$* sup-*metriikassa*

$$d(f,g) = d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x),g(x))$$

täysrajoitettu joukko.

(2) *$\mathcal{H}$ on yhtäjatkuva ja pisteittäin täysrajoitettu funktioperhe.*

Ascolin lauseesta on usein käytössä erikoistapaus, jossa maalipuolen avaruus Y on $\mathbb{R}$ (tai yhtä lailla $\mathbb{K}^n$). Tässä on oleellista, että maalipuolella täysrajoittuneisuus nyt merkitsee samaa kuin relatiivinen (jono-) kompaktisuus, onhan $\mathbb{R}^n$ täydellinen. Myös $\mathcal{C}(X,Y)$ on tässä tilanteessa täydellinen, joten sielläkin täysrajoittuneisuus liittyy jonojen osajonoihin:

Seuraus 8.6. *(Ascolin ja Arzelán lemma) Olkoon $\mathcal{H}$ pisteittäin rajoitettu ja yhtäjatkuva perhe funktioita $X \to \mathbb{R}^n$, missä X on kompakti metrinen avaruus. Tällöin jokaisella jonolla $(f_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ on osajono, joka suppenee tasaisesti kohti jotakin jatkuvaa funktiota $f : X \to \mathbb{R}^n$.*

8.7. Normaaliperhepäättely.

Huomautus 8.7. Kompleksianalyysissä Ascolin ja Arzelán lemmaa on tapana sanoa *normaaliperhepäättelyksi.* Tarkasteltavana on tällöin yleensä jono jossakin alueessa $\Omega \subset \mathbb{C}$ — ei siis kompaktissa joukossa — määriteltyjä analyyttisiä funktioita $f_i : \Omega \to \mathbb{C}$. Oletuksena on, että jono on *tasaisesti rajoitettu kompakteissa joukoissa*, ts. että jokaisella kompaktilla $K \subset \Omega$ on olemassa vakio $M_K > 0$ siten, että kaikilla $x \in K$ ja $i \in \mathbb{N}$ on

$$|f_i(x)| \le M_K.$$

Väitteenä on, että on olemassa analyyttinen funktio

$$f : \Omega \to \mathbb{C},$$

jota kohti jokin osajono $(f_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$ suppenee tasaisesti jokaisessa kompaktissa joukossa $K \subset \Omega$.

Päättely perustuu Ascolin ja Arzelán lemman lisäksi siihen Cauchyn integraalikaavasta saatavaan tietoon, että kompakteissa joukoissa tasaisesti rajoitettu funktioperhe on yhtäjatkuva, ja että analyyttisistä funktioista koostuvan jonon raja-arvo on analyyttinen, jos suppeneminen on tasaista kompakteissa osajoukoissa.