JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Harjoitukset 7 **Topologiset vektoriavaruudet**

Tiistai 9.11.2010 14.30-16.00 MaD-355

7.1. Olkoon E lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus ja $A \subset E$. Keksi välttämätön ja riittävä ehto sille, että A:n polaari avaruudessa E' on pelkkä $\{0\}$. (Vihje: Mikä onkaan A:n bipolaari?)

7.2. Olkoon E lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus ja $B \subset E$ balansoitu, konveksi ja rajoitettu. Määritellään $E_B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB \subset E$ ja varustetaan se balansoidun, konveksin ja absorboivan (mieti!) joukon $B \subset E_B$ mittausfunktiolla, joka osoittautuu normiksi, koska B on rajoitettu E:n alkuperäisessä Hausdorff-topologiassa τ (mieti!), ja ansaitsee siis merkinnän $\|\cdot\|$. Onko normiavaruuden E_B suljettu yksikköpallo $\bar{B}$? (Tulkitse oikein!)

7.3. Tätä en keksinyt heti luennolla, enkä ole miettinyt enää: Olkoon E lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus. Tunnetusti dualiteetti (E, E^*) on silloin separoiva. Siksi E_σ:n täydentymä on edellisen lauseen mukaan topologisen duaalin algebrallinen duaali $(E^*)'$. Osoita, että se ääretönulotteisessa tapauksessa ei ole pelkkä E.

7.4. Olkoon (E, F) separoituva dualiteetti ja $M \subset E$ vektorialiavaruus. Osoita, että $M^{\perp\perp} = M$ jos ja vain jos M on suljettu jossain sellaisessa E:n topologiassa, joka sopeutuu dualiteettiin (E, F).

7.5. Osoita, että

a) $\mathfrak{S}-$topologia on lokaalikonveksi ja saadaan heikosti rajoitettujen joukkojen $A \in \mathfrak{S}$ polaarien A° mittausfunktioista. $p_A(y) = \sup_{x\in A} |\langle x, y\rangle|$.

b) Jos $\mathfrak{S}$ toteuttaa ehdot

(1) $A, B \in \mathfrak{S} \implies \exists\, C \in \mathfrak{S}$ siten, että $A \cup B \subset C$ ja

(2) $A \in \mathfrak{S},\ \lambda \in \mathbb{K} \implies \exists\, B \in \mathfrak{S}$ siten, että $\lambda A \subset B$,

niin $\{A^\circ \mid A \in \mathfrak{S}\}$ on $\mathfrak{S}-$topologiassa origon ympäristökanta.

c) Jos $\mathfrak{S}$ toteuttaa ehdon

$$\bigcup_{\mathfrak{S}} A = E,$$

niin $\mathfrak{S}$-topologia on hienompi kuin heikko topologia $\sigma(F, E)$.

7.6. Todista suoraan (käyttämättä Alaoglun ja Bourbakin lausetta), että yhtäjatkuva joukko $\subset E^*$ on heikosti rajoitettu.

7.7. Olkoon E epätäydellinen lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus ja $\hat{E}$ sen täydentymä. Osoita, että topologia $\sigma(E', \hat{E})$ on aidosti hienompi kuin $\sigma(E', E)$.

7.8. Olkoon E Banachin avaruus. Näytä, että $b(E, E') = \tau(E, E')$. (Tätä tehtävää varten pitää lukea monisteesta luvun 7 loppuosa, johon voi vedota.)

7.9. *Onko Schwartzin testifunktioavaruus $D(\mathbb{R})$ normeerautuva standarditopologiassaan? Entä sen määritelmässä käytetyt avaruudet $D(K)$ eli D_K?