Harjoitukset 6 **Topologiset vektoriavaruudet**
Tiistai 2.11.2010 14.30-16.00 MaD-355

6.1. ”Lauseen **??** avulla on helppo tarkastaa, että E:n heikko topologia $\sigma(E,F)$ on Hausdorff tasan silloin, kun dualiteetti separoi E:n.” Mikä lause? Miten?

6.2. Todista, että jos E on lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus, niin $\sigma(E,E^*)$ on Hausdorff-topologia. (Ovatko ehdot välttämättömiä?)

6.3. Sanomme, että avaruuden E **lokaalikonveksi** topologia τ *sopeutuu dualiteerttiin* (E,F), mikäli

$$E^*_\tau = F.$$

Esimerkiksi, jos E on lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus, niin heikko topologia $\sigma(E,E^*)$ sopeutuu dualiteettiin (E,E^*), samoin tietenkin E:n alkuperäinen topologia. Onko $\sigma(E,E^*)$ hienoin — tai ehkä karkein — dualiteettiin (E,E^*) sopeutuva topologia?

6.4. Olkoon (E,F) separoituva dualiteetti.
a) Osoita, että balansoidulla, konveksilla joukolla A on sama sulkeuma kaikissa dualiteettiin (E,F) sopeutuvissa topologioissa. Huomaa erityisesti edellisen tehtävän tilanne. (Onko jokin versio tästä tuttu FAN:sta?)
b) Itse asiassa oletus, että A on balansoitu, on tarpeeton. (Vihje: Banachin erottelulause.)
c) Ovatko tynnyrit samat jokaisessa dualiteettiin (E,F) sopeutuvassa topologiassa?

6.5. Olkoot E ja F vektoriavaruuksia, joista E äärellisulotteinen. Esitä välttämätön ja riittävä ehto avaruudelle F, joka takaisi, että on olemassa separoituva dualiteetti (E,F).

6.6. Olkoon E topologinen vektoriavaruus ja E^* sen topologinen duaali. Osoita, että mikäli dualiteetti (E,E^*) separoi E:n, niin E on Hausdorff–avaruus.

6.7. Olkoon E varustettu topologialla $\sigma(E,E')$ (algebrallinen). Osoita, että jos $A \subset E$ on rajoitettu, niin
a) on olemassa äärellisulotteinen aliavaruus $G \subset E$ siten, että $A \subset G$
b) E:n jokainen vektorialiavaruus on suljettu
c) E:n jokaisella vektorialiavaruudella on topologinen supplementti

6.8. Olkoon E ääretönulotteinen lokaalikonveksi Hausdorff-avaruus. Osoita, että $E^*_\sigma(E^*,E)$ ei ole normiutuva.

6.9. Olkoon E ääretönulotteinen normiavaruus. Osoita, että duaalin nollavektori $0 \in E^*$ kuuluu duaalin yksikköpallon kuoren $\{x' \mid \|x'\| = 1\}$ sulkeumaan topologiassa $\sigma(E^*,E)$.