JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Harjoitukset 5 **Topologiset vektoriavaruudet**
tiistai 26.10.2010 14.30-16.00 MaD-355

Osa I: Bairen lauseen seurauksia / Fréchet'n avaruuksista.

5.1. Olkoot $(E, \mathcal{T}_E)$ ja $(F, \mathcal{T}_F)$ Fréchet'n avaruuksia ja olkoon lisäksi avaruudessa F toinen Hausdorff–topologia τ_F, joka on karkeampi kuin $\mathcal{T}_F$. Olkoon $T : E \to F$ lineaarinen.

Osoita, että jos T on jatkuva $\mathcal{T}_E \to \tau_F$-mielessä, niin se on jatkuva myös $\mathcal{T}_E \to \mathcal{T}_F$-mielessä. Vihje: kuvaaja.

5.2. Sovella edellistä tehtävää todistamalla, että seuraava lineaarikuvauksen jatkuvuuden verifioimiskeino toimii:

Olkoot $(E, \mathcal{T}_E)$ ja $(F, \mathcal{T}_F)$ Fréchet'n avaruuksia ja olkoon $(X, \mathcal{T}_X)$ Hausdorff-avaruus. Olkoon $T : E \to F$ lineaarinen. Osoita, että T on jatkuva, jos on olemassa sellainen jatkuva injektio $f : F \to G$, että $f \circ T$ on jatkuva. Vihje: alkukuvatopologia.

Osa II: Käsitellään funktioavaruuksia. Ratkaistaan vanha lisätehtävä.

5.3. Olkoon $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Avaruuden $E = \mathcal{C}^k = \mathcal{C}^k(\mathbf{R}) = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f$ on k kertaa derivoituva$\}$ standarditopologia, *(ensimmäisten k) derivaattojen tasaisen kompaktin suppenemisen topologia* eli *kompaktin $\mathcal{C}^k$–suppenemisen topologia* on lokaalikonveksi topologia, jonka määrittelee seminormiperhe $\mathcal{P} = \{p_{\alpha,K} \mid \alpha \in \{0, 1, \ldots, k\}$ ja $K \subset \mathbf{R}$ on kompakti$\}$, missä

$$p_{\alpha,K}(f) = \sup_{x \in K} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha} f(x) \right| = \sup_{x \in K} |f^{(\alpha)}(x)|.$$

Osoita, että jokainen $\mathcal{C}^k$ on metrisoituva ja Hausdorff.

5.4. Osoita, että jokainen $\mathcal{C}^k$ $(k \in \mathbf{N})$ on (jono)täydellinen (induktio k:n suhteen), siis Fréchet. (Entä Banach? Onko jatkuvaa normia?)

5.5. Osoita, että $\mathcal{C}^\infty$ on (jono)täydellinen, siis Fréchet. (Entä Banach? Onko jatkuvaa normia?)

5.6. Olkoon $K \subset \mathbf{R}$ kompakti ja $k \in \mathbf{N} \cup \infty$. (Tässä tetävässä on siis yksi K valittu.) Osoita, että aliavaruus $\mathcal{C}^k(K) = \{f \in \mathcal{C}^k \mid \operatorname{supp} f \subset K\}$ on (jono)täydellinen, siis Fréchet. (Entä Banach? Onko jatkuvaa normia?)

5.7. Osoita, että $\mathcal{C}^k(K)$ on $\mathcal{C}^\infty(K)$:n täydentymä eli sulkeuma $\mathcal{C}^k(K)$:ssa eli että $\mathcal{C}^\infty(K)$ on tiheä $\mathcal{C}^k(K)$:ssa (joka on täydellinen).

5.8. Osoita, että avaruuden $\mathcal{C}^k$ standarditopologian määrää myös seminormiperhe $\mathcal{Q}$, missä seminormit ovat

$$q_K(f) = \int_K |f^{(n)}(x)| \, dx,$$

missä $K \subset \mathbf{R}$ on kompakti ja $n \in \mathbf{N}$. Vihje: $f(x) = \int_x^{x+1} \left((t - x - 1) f'(t) + f(t) \right) \, dt$.

Huom. Avaruuksista $\mathcal{C}^k$ on analyysissä useimmiten käytössä n–ulotteiset versiot, joissa $E = \mathcal{C}^k = \mathcal{C}^k(\mathbf{R}^n) = \{f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \mid f$ on k kertaa derivoituva$\}$ ja topologian antavat seminormit

$$p_\alpha(f) = \sup_{x\in K} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(x) \right|,$$

missä $K \subset \mathbf{R}^n$ on kompakti ja $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} f(x)$ on multi-indeksiä $\alpha = (\alpha_q, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ vastaava $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \alpha)$ osittaisderivaatta. Lopulta joukko $\mathbf{R}^n$ korvataan usein avoimella osajoukolla $\Omega \subset \mathbf{R}^N$. Tämä ei juuri vaikuta yllä esitettyihin asioihin.

Osa III: Yhdistelmä.

5.9. Olkoon $K \subset \mathbf{R}^n$ kompakti joukko ja $F \subset \mathbf{R}^K$ Banachin avaruus, jonka alkiot (eli vektorit eli pisteet) ovat funktioita $K \to \mathbf{R}$ tavallisin vektorilaskutoimituksin. Oletetaan, että F:n topologia on hienompi kuin pistesuppenemisen topologia eli tuloavaruudesta $\mathbf{R}^K$ periytyvä topologia. Oletetaan vielä, että $\mathcal{C}^\infty(K) \subset F$.

Todistetaan, että on olemassa luku $k \in \mathbf{N}$, jolla $C^k(K) \subset F$.

a) Sovella tehtävää 5.1. luonnollisin valinnoin, ts. valitaan E:ksi C^∞ varustettuna standarditopologiallaan, jota siis tässä merkitään $\mathcal{T}_E$. Tutkittavan Banach-avaruuden F topologiaksi valitaan normitopologia $\mathcal{T}_F = \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ ja karkeaksi Hausdorff-topologiaksi τ valitaan pistesuppenemisen topologia eli tuloavaruudesta $\mathbf{R}^K$ periytyvä topologia. Lineaarikuvaukseksi $T : E \to F$ sopii inkluusiokuvaus $x \mapsto x$.

Osoita, että inkluusiokuvaus T on jatkuva $\mathcal{T}_E \to \mathcal{T}_F$ –mielessä eli kuvauksena $C^\infty(K) \to (F, \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$.

b) Totea, että on olemassa luku $\lambda > 0$ ja sellainen (semi)normi $p_{n,K}$, että $\|\cdot\|_F \le \lambda p_{n,K} = \lambda\|\cdot\|_n$. Tarkasta tai muista, että jatkuva seminormi $f \mapsto p_{n,K}(f) = \sup_{x\in K} |f^{(n)}(x)|$ on itse asiassa normi avaruudessa $E = C^\infty(K)$. Siis avaruudessa $E = C^\infty(K)$ on $\mathcal{T}_F \subset \mathcal{T}_{p_{n,K}}$ eli kaikenkaikkiaaan

F:n antama aliavaruustpl $\subset \mathcal{C}^k_K$:n antama aliavaruustpl $\subset \mathcal{C}^\infty_K$:n oma tpl.

Miksi siis:

$\mathcal{C}^k(K) = (\mathcal{C}^\infty(K)$:n täydentymä eli sulkeuma $\mathcal{C}^k(K)$:ssa$) \subset \mathcal{C}^\infty(K)$:n täydentymä eli sulkeuma F:ssä normitopologiassa? MOT? $\square$

Osa IV: Loppukevennys.

5.10. Viime kerralla oli seuraava tehtävä

a) Olkoon E vektoriavaruus, $\mathcal{B} = \{A \subset E \mid A$ on absorboiva, balansoitu ja konveksi$\}$. Näytä, että $\mathcal{B}$ määrää avaruuteen E lokaalikonveksin topologian $\mathcal{T}$, joka on kaikkein hienoin lokaalikonveksi topologia E:ssä.

b) Osoita, että jos F on lokaalikonveksi avaruus, niin jokainen lineaarikuvaus $E \to F$ on jatkuva. Tämä ei ollut mitenkään vaikeaa. Jatketaan tarkastelua:

c) Olkoon $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ em. vektoriavaruuden E kaikkien äärellisulotteisten lineaaristen aliavaruuksien perhe ja $\mathcal{T}_\alpha$ aliavaruuden E_α standarditopologia, siis sen (ainoa!) Hausdorff-tva-topologia. Merkitään J_α:lla kanonista injektiota $E_\alpha \to E$. Osoita, että a)-kohdassa mainittu topologia $\mathcal{T}$ on *induktiivinen lokaalikonveksi topologia* perheen $(J_\alpha)_{\alpha\in I}$ suhteen. (En ole vielä miettinyt, onko $(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ alkuperäisen avaruuden E topologinen aliavaruus.)