JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Harjoitukset 4 **Topologiset vektoriavaruudet**
tiistai 19.10.2010 14.30-16.00 MaD-355

4.1. Viime kerralta. Esimerkki lokaalikonveksin avaruuden osajoukosta, joka on jonotäydellinen, mutta ei täydellinen: $E = \mathcal{F}([0,1], \mathbf{R}) = \mathbf{R}^{[0,1]} = \{$kaikki funktiot $[0,1] \to \mathbf{R}\}$. Pistesuppenemisen topologia, eli seminormit $p_x = |f(x)|$. $M = \{f \in E \bigm| f(x) \neq 0$ vain enintään numeroituvan monella $x \in [0,1]\}$.

4.2. Todista Mazurin lause Hahnin ja Banachin lauseen seurauksena käyttämättä uudelleen valinta-aksioomaa. Minä jouduin olettamaan, että A on myös balansoitu.

4.3. Olkoon E topologinen vektoriavaruus ja $S = \{x_\alpha \bigm| \alpha \in I\} \subset E$. Sanomme, että joukko S on *topologisesti vapaa*, eli *topologisesti lineaarisessti riippumaton*, jos kaikilla $\alpha \in I$ pätee $x_\alpha \notin \overline{\langle S \setminus \{x_\alpha\}\rangle}$. Osoita, että jos E on lokaalikonveksi, niin $S = \{x_\alpha \bigm| \alpha \in I\} \subset E$ on topologisesti vapaa silloin ja vain silloin, kun on olemassa sellainen perhe lineaarimuotoja $S = \{f_\alpha \bigm| \alpha \in I\} \subset E^*$, että kaikilla $\alpha \in I$

(1) f_α on jatkuva
(2) $f_\alpha(x_\alpha) = 1$
(3) $f_\alpha(x_\beta) = 0$ kaikilla $\beta \in I \setminus \{\alpha\}$.

4.4. Olkoon E kompleksikertoiminen topologinen vektoriavaruus, $H = \{x \in E \bigm| f(x) = 0\}$ jokin sen hypertaso, f siis $\mathbf{C}$–lineaarinen $E \to \mathbf{C}$. Olkoon $f_{\mathbf{R}}$ lineaarimuodon f reaaliosa, siis $f_{\mathbf{R}}(x) = \operatorname{Re} f(x)$. Osoita, että osajoukko $H_{\mathbf{R}} = \{x \in E \bigm| f_{\mathbf{R}}(x) = 0\}$ on hypertaso reaalikertoimisessa topologisessa vektoriavaruudessa E, jota merkitsemme $E_{\mathbf{R}}$. Näytä samalla, että $H = H_{\mathbf{R}} \cap (iH_{\mathbf{R}})$.

4.5. Näytä, että jos E ja F ovat Fréchet'n avaruuksia ja $T : E \to F$ on lineaarikuvaus, niin kuvaaja $\operatorname{Gr} T$ on suljettu jos ja vain jos

$$(x_n, f(x_n)) \to (0, y) \implies y = 0.$$

(Päteekö tämä yleisemminkin?)

4.6. Kahden topologisen vektoriavaruuden suoraa lineaarialgebrallista summaa $E = M \oplus N$ sanotaan niiden *topologiseksi suoraksi summaksi*, mikäli se on varustettu tulotopologialla eli kuvaus $(x, y) \mapsto x + y$ on homeomorfismi tuloavaruudelta $M \times N$ suoralle summalle $M \oplus N$. Samaa ilmaistaan sanomalla, että N on M:n *topologinen supplementti*. Merkitään π:llä projektiota suoralta summalta $E = M \oplus N$ aliavaruudelleen M suuntaan N, siis $\pi(x + y) = x$, kun $x \in M$ ja $y \in N$.

a) Osoita, että jos M ja N ovat E:n topologisia ja lineaarialgebrallisia alivaruuksia, niin suora summa $E = M \oplus N$ on topologinen suora summa tasan sillä ehdolla, että π on jatkuva.

b) Näytä, että jos E on Fréchet'n avaruus, ja jos sekä M että N ovat suljettuja aliavaruuksia, niin π on jatkuva ja siis $M \oplus N$ topologinen suora summa. (Riittääkö olettaa, että toinen on suljettu?)

4.7. (jatkoa) c) Olkoon $T : E \to F$ jatkuva lineaarikuvaus, missä E ja F ovat topologisia vektoriavaruuksia. Osoita, että T:llä on jatkuva lineaarinen *oikeanpuoleinen käänteiskuvaus* eli jatkuva, lineaarinen $S : F \to E$, jolla $F \circ G = id_F$ jos T on avoin surjektio ja ytimellä $\ker T \subset E$ on topologinen supplelmentti.

4.8. a) Olkoon E vektoriavaruus, $\mathcal{B} = \{A \subset E \mid A$ on absoboiva, balansoitu ja konveksi$\}$. Näytä, että $\mathcal{B}$ määrää avaruuteen E lokaalikonveksin topologian $\mathcal{T}$, joka on kaikkein hienoin lokaalikonveksi topologia E:ssä.

b) Osoita, että jos F on lokaalikonveksi avaruus, niin jokainen lineaarikuvaus $E \to F$ on jatkuva.

4.9. Lisätehtävä viime kerralta jos halutaan ja ehditään. Olkoon $K \subset \mathbf{R}^n$ kompakti joukko. Avaruudessa

$$E = \mathcal{C}_c^\infty(K) = \{f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \mid f \in \mathcal{C}^\infty,\ \operatorname{supp} f \subset K\}$$

otetaan käyttöön seminormit

$$q_\alpha(f) = \sup_{x \in K} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha f(x) \right|,$$

missä $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(x)$ on multi-indeksiä $\alpha \in \mathbf{N}^n$ vastaava (korkeammanasteinen) osittaisderivaatta. Merkitään $\mathcal{Q} = \{q_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{N}^n\}$. Osoita, että $(E, \mathcal{Q})$ on Fréchet'n avaruus.

Ohjeita: Tyydy tilanteeseen $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}$, jos et halua käsitellä moniulotteista tapausta multi-indekseineen. Asiaan ei tule oleellisia eroja. Voit joko osoittaa suoraan, että E on lokaalikonveksi, metrisoituva ja (jono(!)-)täydellinen tai sitten tarkastaa, että E on tunnetun avaruuden $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n) = \{f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \mid f \in \mathcal{C}^\infty,\ \operatorname{supp} f \subset K\}$ suljettu aliavaruus. Avaruuden $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ *standarditopologian eli derivaattojen kompaktin konvergenssin topologian* määräävät seminormit $p_{n,K}(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|$ tai yhtä lailla normit $\|f\|_{m,K} = \sup_{n \le m} \sup_{x \in K} |f(x)|$, missä K käy läpi kompaktit reaalilukujoukot ja m luonnolliset luvut. Tässä topologiassa $\mathcal{C}^\infty$ on metrisoituva ja täydellinen — tämä voi olla tuttua analyysistä.)