JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Harjoitukset 3 **Topologiset vektoriavaruudet**
tiistai 12.10.2010 14.30-16.00 MaD-355

3.1. Jokainen kompakti joukko $K \subset \mathbf{R}^n$ määrää funktioavaruudessa $E = \mathcal{C}(\mathbf{R}^n) = \{f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}$ seminormin $p_K(f) = \sup f(K)\,(= \max f(K))$. Nämä seminormit määräävät avaruuteen E lokaalikonveksin topologian $\mathcal{T}$.

a) Onko $\mathcal{T}$ Hausdorff-topologia?

b) Suppeneeko funktiojono $f_n(x) = \frac{1}{n}e^x$ topologiassa $\mathcal{T}$?

c) Onko olemassa E:n normi, joka antaisi topologian $\mathcal{T}$, eli onko E normeerautuva? (vihje: ei)

3.2. Seminormit $p_n(f) = \sup_{0 \le t \le 1} |f^{(n)}(t)|$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$määräävät avaruuteen $E = \mathcal{C}^\infty([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbf{R} \mid f \text{ on äärettömän monta kertaa derivoituva }\}$ lokaalikonveksin topologian $\mathcal{T}$. Kun $f \in E$, merkitään

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

T on siis lineaarikuvaus (eli operaattori eli transformaatio) $E \to E$.

a) Onko T jatkuva?

b) Onko topologia $\mathcal{T}$ normeerautuva?

a) Onko T jatkuva?

b) Onko topologia $\mathcal{T}$ normeerautuva?

3.3. Olkoon E reaalikertoiminen lokaalikonveksi avaruus ja A sen konveksi osajoukko. Osoita, että A on suljettu, jos ja vain jos A joidenkin E:n suljettujen puoliavaruuksien leikkaus.

3.4. Olkoon E normiavaruus. Näytä, että normi $x \mapsto \|x\|$ ei ole jatkuva kuvaus E:n heikon topologian suhteen eli heikosti jatkuva. (Heikon topologian määräävinä seminormeina ovat jatkuvien lineaarimuotojen itseisarvot eli kuvaukset $x \mapsto |\langle x, x*\rangle|$, missä $x* \in E^*$.)

Entä onko normi tässä toplogiassa alhaalta puolijatkuva? Alhaalta puolijatkuvuudelle on riittävää olla jatkuvien kuvausten pisteittäinen supremum.

3.5. Olkoon (E, P) lokaalikonveksi avaruus. Osoita, että E:n jono $(x_n)_\mathbf{N}$ on Cauchy-jono, jos ja vain jos

$$\forall p \in P \text{ ja } \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N} \text{ s.e. } q, r \ge n_0 \implies p(x_q - x_r) \le \epsilon.$$

3.6. Olkoon $E = \prod_{i \in I} E_i$ topologisten vektoriavaruuksien tuloavaruus (tulotopologia!) ja $\pi_i : E \to E_i$ siihen liityvä projektio $(i \in I)$. Osoita, että $\mathcal{F}$ on Cauchyn filtteri E:ssä tasan silloin, kun jokainen $\pi(\mathcal{F}) \subset E_i$ on Cauchyn filtteri E_i:ssä. Jos äärettömän monen avaruuden tulotopologia ei ole tuttu, voit olettaa, että $I = \{1, 2\}$ eli tarkastella kahden avaruuden tuloa.

3.7. Jatkona edelliseen tehtävään, osoita että E on täydellinen aina ja vain, kun jokainen E_i on täydellinen.

3.8. Olkoon

$$E = \{f \in \mathcal{C}[0,1] \bigm| \exists \epsilon_f > 0 \text{ siten, että } f(t) = 0 \;\forall\, 0 \le t \le \epsilon(f)\}$$

varustettuna normilla $\|f\| = \sup |f|$. Onko joukko

$$T = f \in E \bigm| |f(\tfrac{1}{n}) \le \tfrac{1}{n} \,\forall\, n \in \mathbf{N}^*\}$$

tynnyri? Entä onko se origon ympäristö?

3.9. Esimekki lokaalikonveksin avaruuden osajoukosta, joka on jonotäydellinen, mutta ei täydellinen: $E = \mathcal{F}([0,1], \mathbf{R}) = \mathbf{R}^{[0,1]} = \{\text{kaikki funktiot } [0,1] \to \mathbf{R}\}$. Pistesuppenemisen topologia, eli seminormit $p_x = |f(x)|$. $M = \{f \in E \bigm| f(x) \neq 0$ vain enintään numeroituvan monella $x \in [0,1]\}$.

3.10. Lisätehtävä jos halutaan ja ehditään. Olkoon $K \subset \mathbf{R}^n$ kompakti joukko. Avaruudessa

$$E = \mathcal{C}_c^\infty(K) = \{f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \bigm| f \in \mathcal{C}^\infty,\ \operatorname{supp} f \subset K\}$$

otetaan käyttöön seminormit

$$q_\alpha(f) = \sup_{x \in K} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(x) \right|,$$

missä $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(x)$ on multi-indeksiä $\alpha \in \mathbf{N}^n$ vastaava (korkeammanasteinen) osittaisderivaatta. Merkitään $\mathcal{Q} = \{q_\alpha \bigm| \alpha \in \mathbf{N}^n\}$. Osoita, että $(E, \mathcal{Q})$ on Fréchet'n avaruus.

Ohjeita: Tyydy tilanteeseen $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}$, jos et halua käsitellä moniulotteista tapausta multi-indekseineen. Asiaan ei tule oleellisia eroja. Voit joko osoittaa suoraan, että E on lokaalikonveksi, metrisoituva ja (jono(!)-)täydellinen tai sitten tarkastaa, että E on tunnetun avaruuden $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n) = \{f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \bigm| f \in \mathcal{C}^\infty,\ \operatorname{supp} f \subset K\}$ suljettu aliavaruus. Avaruuden $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ *standarditopologian eli derivaattojen kompaktin konvergenssin topologian* määräävät seminormit $p_{n,K}(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|$ tai yhtä lailla normit $\|f\|_{m,K} = \sup_{n \le m} \sup_{x \in K} |f(x)|$, missä K käy läpi kompaktit reaalilukujoukot ja m luonnolliset luvut. Tässä topologiassa $\mathcal{C}^\infty$ on metrisoituva ja täydellinen — tämä voi olla tuttua analyysistä.)