**Harjoitukset 2****Topologiset vektoriavaruuDET**

tiistai 5.10.2010 16-18 MaD-355 tai - toivottavasti - jo klo 14-16 jossain salissa

**2.1.** Ratkaise muutama seuraavista: Onko balansoidun joukon kuva topologisten vektoriavaruuksien välisessä jatkuvassa lineaarikuvauksessa aina balansoitu? Entä miten on vastaavasti absorboivan, konveksin, suljetun, kompaktin joukon kuvan laita?

**2.2.** Ratkaise muutama seuraavista: Onko balansoidun joukon alkukuva topologisten vektoriavaruuksien välisessä jatkuvassa lineaarikuvauksessa aina balansoitu? Entä miten on vastaavasti absorboivan, konveksin, suljetun, kompaktin joukon alkukuva laita?

**2.3.** a) Konstruoi esimerkki konveksista joukosta, jonka balansoitu verho ei ole konvekksi.

b) Onko konvekssi joukko  $A \subset E$  balansoitu, jos  $\lambda A \subset A$  kaikilla  $\lambda \in \mathbf{K}$ , joille  $|\lambda| = 1$ ?

**2.4.** a) Osoita, että kompaktin joukon balansoitu verho on kompakti.

b) Konstruoi esimerkki suljetusta joukosta  $A \subset \mathbf{R}^2$ , jonka konvekssi verho ei ole suljettu.

**2.5.** Osoita, että vektoriavaruuden  $E$  seminormiperheen  $(p_i)_{i \in I}$  supremum  $p(x) = \sup_{i \in I} p_i(x)$  on seminormi, kunhan vain  $p(x) < \infty$  kaikilla  $x \in E$ .

**2.6.** Lokaalikonveksissa avaruudessa  $E$  jatkuvien seminormien kanta  $\mathcal{N}$  on joukko  $\mathcal{N}$  jatkuvia seminormeja siten, että jokaisella jatkuvalla seminormilla  $p$  on olemassa kantaseminormi  $q \in \mathcal{N}$  ja luku  $\lambda > 0$  siten, että  $p \leq \lambda q$ .

Osoita, että lokaalikonveksissa avaruudessa  $(E, \mathcal{T})$  jokainen jatkuvien seminormien kanta  $\mathcal{N}$  määrää saman lokaalikonveksin topologian  $\mathcal{T}$ .

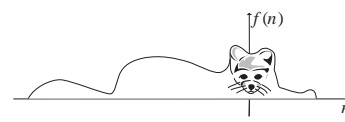
**2.7.** Näytä, että jos lokaalikonveksissa avaruudessa  $E$  on yksikin jatkuva normi, niin  $E$ :ssä on jatkuvien seminormien kanta  $\mathcal{N}$ , joka muodostuu normeista. Onko  $E$  välttämättä normiavaruus?

**2.8.** Olkoon  $E$  vektoriavaruus,  $M$  sen aliavaruus,  $p$  seminormi avaruudessa  $M$  ja  $q$  seminormi koko avaruudessa  $E$  siten, että  $p \leq q|_M$  eli  $p(x) \leq q(x) \forall x \in M$ . Osoita, että on olemassa koko avaruudessa  $E$  määritelty seminormi  $\bar{p}$  siten, että  $p = \bar{p}|_M$  ja  $p \leq q$ . (Tehtävässä ei tarvita tietoja valinta-aksioomasta!)

**2.9.** Olkoot  $(E, \mathcal{P})$  ja  $(F, \mathcal{Q})$  lokaalikonvekseja avaruuksia, missä  $\mathcal{P}$  ja  $\mathcal{Q}$  ovat jatkuvien seminormien kantoja. Osoita, että lineaarikuvaus  $T : E \rightarrow F$  on jatkuva, jos ja vain jos kaikilla  $q \in \mathcal{Q}$  on olemassa  $p \in \mathcal{P}$  ja  $\lambda > 0$  siten, että  $q(Tx) \leq \lambda p(x)$  kaikilla  $x \in E$ .

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA  
TILASTOTIETEEN LAITOS



**Exercise set 2**

**Topological Vector Spaces**

tuesday 10.5.2010 probably already 14-16 MaD-355 or somewhere else ??