JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Harjoitukset 2 **Topologiset vektoriavaruudet**
tiistai 5.10.2010 16-18 MaD-355 tai - toivottavasti - jo klo 14-16 jossain salissa

2.1. Ratkaise muutama seuraavista: Onko balansoidun joukon kuva topologisten vektoriavaruuksien välisessä jatkuvassa lineaarikuvauksessa aina balansoitu? Entä miten on vastaavasti absorboivan, konveksin, suljetun, kompaktin joukon kuvan laita?

2.2. Ratkaise muutama seuraavista: Onko balansoidun joukon alkukuva topologisten vektoriavaruuksien välisessä jatkuvassa lineaarikuvauksessa aina balansoitu? Entä miten on vastaavasti absorboivan, konveksin, suljetun, kompaktin joukon alkukuvan laita?

2.3. a) Konstruoi esimerkki konveksista joukosta, jonka balansoitu verho ei ole konveksi.

b) Onko konveksi joukko $A \subset E$ balansoitu, jos $\lambda A \subset A$ kaikilla $\lambda \in \mathbf{K}$, joille $|\lambda| = 1$?

2.4. a) Osoita, että kompaktin joukon balansoitu verho on kompakti.

b) Konstruoi esimerkki suljetusta joukosta $A \subset \mathbf{R}^2$, jonka konveksi verho ei ole suljettu.

2.5. Osoita, että vektoriavaruuden E seminormiperheen $(p_i)_{i\in I}$ supremum $p(x) = \sup_{i\in I} p_i(x)$ on seminormi, kunhan vain $p(x) < \infty$ kaikilla $x \in E$.

2.6. Lokaalikonveksissa avaruudessa E *jatkuvien seminormien kanta* $\mathcal{N}$ on joukko $\mathcal{N}$ jatkuvia seminormeja siten, että jokaisella jatkuvalla seminormilla p on olemassa kantaseminormi $q \in \mathcal{N}$ ja luku $\lambda > 0$ siten, että $p \leq \lambda q$.

Osoita, että lokaalikonveksissa avaruudessa $(E, \mathcal{T})$ jokainen jatkuvien seminormien kanta $\mathcal{N}$ määrää saman lokaalikonveksin topologian $\mathcal{T}$.

2.7. Näytä, että jos lokaalikonveksissa avaruudessa E on yksikin jatkuva normi, niin E:ssä on *jatkuvien seminormien kanta* $\mathcal{N}$, joka muodostuu normeista. Onko E välttämättä normiavaruus?

2.8. Olkoon E vektoriavaruus, M sen aliavaruus, p seminormi avaruudessa M ja q seminormi koko avaruudessa E siten, että $p \leq q\big|_M$ eli $p(x) \leq q(x) \forall x \in M$. Osoita, että on olemassa koko avaruudessa E määritelty seminormi $\bar{p}$ siten, että $p = \bar{p}\big|_M$ ja $p \leq q$. (Tehtävässä ei tarvita tietoja valinta-aksioomasta!)

2.9. Olkoot $(E, \mathcal{P})$ ja $(F, \mathcal{Q})$ lokaalikonvekseja avaruuksia, missä $\mathcal{P}$ ja $\mathcal{Q}$ ovat jatkuvien seminormien kantoja. Osoita, että lineaarikuvaus $T : E \to F$ on jatkuva, jos ja vain jos kaikilla $q \in \mathcal{Q}$ on olemassa $p \in \mathcal{P}$ ja $\lambda > 0$ siten, että $q(Tx) \leq \lambda p(x)$ kaikilla $x \in E$.

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Exercise set 2 **Topological Vector Spaces**
tuesday 10.5.2010 probably alraedy 14-16 MaD-355 or somewhere else ??