JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Harjoitukset 11 **Topologiset vektoriavaruudet**

Tiistai 7.12.2010 14.15-15.45 MaD-355

Numerointi muuttunut 1. painoksesta. Käytetään tätä.

11.1. Onko e^x hitaasti kasvava distribuutio? Entä $e^x \cos(e^x)$? (Onko johtopäätöksesi ristiriidassa Hahn-Banachin lauseen kanssa?)

11.2. Miksi seuraavat ovat hitaasti kasvavia distribuutioita:

a) kompaktikantajaiset distribuutiot

b) positiiviset Borel-mitat μ, joilla on olemassa $k \in \mathbb{N}$ siten, että:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{(1+|x|^2)^k} < \infty$$

c) mitalliset funktiot g, joilla on olemassa $p \in [1, \infty[$ ja $N > 0$ siten, että

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{g^p(x)}{(1+|x|^2)^N} \right)^p < \infty$$

d) polynomit.

Vihje. : (a) Käytä apufunktiota $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, joka saa arvon 1 avoimessa joukossa $U \supset K$. (c) On syytä käyttää Höderin epäyhtälöä.

11.3. Todista, että euraavat lineaarikuvaukset $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ovat jatkuvia:

(1) Derivointi.

(2) Kertominen polynomilla.

(3) Kertominen nopeasti vähenevällä funktiolla.

Vihje. : Tietenkin nämä kaikki ovat kuvauksia $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Jatkuvuuden toteamiseksi voi (mutta ei kai tarvitse) käyttää suljetun kuvaajan lauseen jonomuotoa:

Suljetun kuvaajan lauseen jonomuoto. Lineaarikuvaus $T : E \to F$ Fréchet-avaruudelta toiselle on jatkuva aina ja vain, kun kaikilla jonoilla $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset E$ pätee$(x_n, Tx_n) \to (0, y) \implies y = 0$.

11.4. Osoita, että hitaasti kasvavan distribuution derivaatta on hitaasti kasvava distribuutio.

Käännä

11.5. $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})-$funktioiden Fourier-muunnoksella $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ on mm. seuraavat ominaisuudet: Kaikilla $f,\, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ ja $x,\, t \in \mathbb{R}$:

a) $\mathcal{F}$ on lineaarinen
b) $(\tau_x f)\hat{} = e_{-x}\hat{f}$
c) $(e_x f)\hat{} = \tau_{-x}\hat{f}$
d) $(f \mathbin{\hat{*}} g)\hat{} = \hat{f}\,\hat{g}$
e) $(\frac{f}{\lambda})\hat{}(t) = \lambda\hat{f}(\lambda t)$, kun $\lambda > 0$.

Todistus. (a) on ilmeinen.

$$\text{(b)}\ (\tau_x f)\hat{}(t) = \int_{\mathbb{R}} (\tau_x f) e_{-t}\, dm = \int_{\mathbb{R}} f \tau_{-x} e_{-t}\, dm = \int_{\mathbb{R}} f e_{-t}(x) e_{-t}\, dm = e_{-x}(t)\hat{f}(t).$$

$$\text{(c)}\ (e_x f)\hat{}(t) = \int_{\mathbb{R}} (e_x f) e_{-t}\, dm = \int_{\mathbb{R}} f e_{-(t-x)}\, dm = \tau_{-x}(t)\hat{f}(t).$$

Todista (d) ja (e).

Vihje. : (d) Fubinin lause, (e) lineaarinen muuttujanvaihto. □

11.6. Valitse ja ratkaise yksi Rudinin kirjan harjoitustehtävistä. Liite)

11.7. Valitse ja ratkaise vielä yksi Rudinin kirjan harjoitustehtävistä. Liite)

Kurssin ryhmäopetus päättyy tähän. Monisteen teko jatkuu vielä viikon, pari, mutta toimitan pian kaikille kurssilaisille koko luentotekstin esipainoksen. Aion yhdistää lopulliseen versioon tehtävät ja kommentteja samaan tapaan kuin FAN monisteessa. Tehtävistä mukaan myös ratkaisuja – vai vain hyvät vihjeet? Otan hyvin mielelläni vastaan palautetta kaikesta.

Kiitos osallistumisesta kurssille — vieraat tekevät juhlan. L

Tenttikin on pidettävä. Pidän sen korpin mukaan 14.12. uusinta sopimuksen mukaan – ainakin englanninkielinen versio pidetään kevätlukukauden puolella.