GROUPS AND THEIR REPRESENTATIONS - FIFTH PILE

KAREN E. SMITH

32. Ryhmän $SL_2(\mathbb{R})$ esitykset

Example 32.1. Palautamme mieleen, että

$$SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \middle| \det A = xw - yz = 1 \right\} \text{ ja}$$
$$sl_2(\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \operatorname{Tr} A = a + d = 0 \right\}$$

Olemme jo (harjoituksissa!) löytäneet Lien ryhmälle $SL_2(\mathbb{R})$ seuraavat redusoitumattomat esitykset:

(1) Triviaali, siis yksiulotteinen esitys.
(2) Tautologinen, tässä tapauksessa siis kaksiulotteinen esitys.
(3) Edellisen symmetriset potenssit $Sym^d(\mathbb{R}^2)$, missä $d = 2, 3, \ldots$.

Seuraavassa osoitetaan, että muita ei ole olemassa. Tämä asia on kaikkea muuta kuin itsestäänselvä. Todistuksen ideana on käyttää hyväksi tietoa, että Lien ryhmän G esitys on redusoitumaton, jos sen derivaatta on Lien algebran $\mathcal{G}$ redusoitumaton esitys ja osoittaa, että Lien algebralla $sl_2(\mathbb{R})$ ei ole muita redusoitumattomia esityksiä kuin edellä lueteltujen derivaatt. Tämä tapahtuu selvittämällä vastaavan kompleksisen Lien algebran $sl_2(\mathbb{C})$ kaikki redusoitumattomat esitykset.

Proposition 32.2. *Lien ryhmän G redusoituvan äärellisulotteisen esityksen $\rho : G \to GL(V)$ derivaatta neuraalialkion kohdalla $d_e\rho : \mathcal{G} \to gl(V)$ on Lien algebran $\mathcal{G}$* redusoituva esitys *eli Lien algebrahomomorfismi, jolla on epätriviaali aliesitys.* [1]

Todistus. Olkoon $\rho : G \to GL(V)$ Lien ryhmän G redusoituva esitys.Redusoituvuus merkitsee, että on olemassa vektoriavaruuden V

[1] ρ:n redusoitumattomuus ja $d_e\rho$:n redusoitumattomuus ovat yhtäpitäviä, mutta sitä tietoa ei tarvita tässä.

aliavaruus $W \subset V$ siten, että $\rho_g(W) \subset W$ kaikilla $g \in G$, jolloin $\rho_W : g \mapsto (\rho_g\big|_W : W \to W)$ on G:n esitys, alkuperäisen aliesitys. Tämän esityksen derivaatta $d_e\rho_W : \mathcal{G} \to gl(W)$ on selvästikin derivaatan $d_e\rho : \mathcal{G} \to gl(W)$ aliesitys ja sellaisen olemassaolo merkitsee $d_e\rho$:n redusoitumattomuutta. □

Seuraavaksi laskemme edellä mainitujen redusoitumattomien esitysten derivaatat. Luettelon lyhentämiseksi merkitään tautologista esitystä $Sym^1(\mathbb{R}^2)$ ja triviaalia esitystä $Sym^0(\mathbb{R}^2)$. Avaruuden $\mathbb{R}^2$ standardikantavektoreita merkitsemme $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ja $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, jolloin symmetrisen tulon $Sym^d(\mathbb{R}^2)$ kantavektorit ovat $e_1^d, e_1^{d-1}e_2, e_1^{d-2}e_2^2, \dots, e_1e_2^{d-1}$ ja e_2^d ja matriisin $A \in SL_2(\mathbb{R})$ toiminta kantavektorilla $e_1^{d-i}e_2^i$ on

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} (e_1^{d-i}e_2^i) = (Ae_1)^{d-i}(Ae_2)^i = (xe_1 + ze_2)^{d-i}(ye_1 + we_2)^i.$$

Tämän derivointi sujuu käyttämällä toistuvasti bilineaarikuvauksen derivointia, josta saamme seuraavan lemman:

Lemma 32.3. *Olkoot V ja W Lien ryhmän G esityksiä.*

(a) Olkoon $V \otimes W$ esitysten tensoritulo, ts. $g(v \otimes w) = gv \otimes gw$ kaikilla $g \in G, v \in V, w \in W$. Derivoimalla neutraalialkion kohdalla saatava vastaava Lien algeban $\mathcal{G}$ esitys on

$$X(v \otimes v) = Xv \otimes w + v \otimes Xv,$$

missä kukin X on asianomaisen ryhmäesityksen derivaatta.

(b) Olkoon $Sym^d(V)$ esityksen V symmetrinen potenssi. Tästä neutraalialkion kohdalla derivoimalla saatava Lien algeban $\mathcal{G}$ esitys on

$$X(e_1^{a_1} \cdot e_2^{a_2} \dots e_d^{a_d}) = \sum_{k=1}^{d} a_k \, e_1^{a_1} \cdot e_2^{a_2} \dots e_k^{a_k - 1} \dots e_d^{a_d} \cdot Xe_k,$$

missä on tulkittava mahdollisesti esiintyvät e_j^0 puuttuviksi.

Todistus. Väite (a) seuraa helposti bilineaarikuvauksen derivointikaavasta. Väite (b) palautuu induktiolla väitteeseen (a) ja pieneen tekijäavaruustarkasteluun. □

Määrätään ensimmäiseksi tautologisen esityksen toisen symmetrisen potenssin derivaatta

$$d_e\rho : sl_2(\mathbb{R}) \to gl(Sym^2(\mathbb{R}^2)).$$

Lien algebralla $sl_2(\mathbb{R})$ on virittäjät $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ja $Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ja vektoriavaruutena kanta $\{X, Y, H\}$, missä $H = [X, Y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Lien algebran $sl_2(\mathbb{R})$ esitys $Sym^2(\mathbb{R}^2)$ määräytyy täysin näiden kantavektorien (Itse asiassa jo X:n ja Y:n) vaikutuksesta avaruuden $Sym^2(\mathbb{R}^2)$ kantavektoreihin $e_1^2, e_1 \cdot e_2$ ja e_2^2. Lasketaan ne käyttäen edellistä lemmaa **??**.

$$\begin{aligned} X(e_1^2) &= 2e_1 \cdot Xe_1 = 2e_1 \cdot 0 = 0 \\ X(e_1^2) &= Xe_1 \cdot e_2 + e_1 \cdot Xe_2 = 0 \cdot e_2 + e_1 \cdot e_1 = e_1^2 \\ X(e_2^2) &= 2e_2 \cdot Xe_2 = 2e_2 \cdot e_1 = 2e_1 \cdot e_2. \end{aligned}$$

Näistä kantavektorien kuvista saadaan X:n vaikutuksen matriisi

$$Mat(Sym^2(X)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vastaavasti lasketaan

$$Mat(Sym^2(Y)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lien algebran kolmannen kantavektorin H vaikutus on X:n ja Y:n vaikutusten klassinen Lien sulku, mutta voimme päätellä vaikutuksen suoraankin, ja tästä päättelystä on hyötyä myöhemminkin, sillä laskemme sen samantien mielivaltaisen korkealle symmetriselle potenssille $Sym^d(H)$ ja mielivaltaiselle kantavektorille:

$$\begin{aligned} H(e_1^{d-i}e_2^i) &= (d-i)e_1^{d-i-1}e_2^i He_1 + ie_1^{d-i}e_2^{i-1}He_2 \\ &= (d-i)e_1^{d-i-1}e_2^i e_1 - ie_1^{d-i}e_2^{i-1}e_2 \\ &= (d-i)e_1^{d-i}e_2^i - ie_1^{d-i}e_2^i \\ &= (d-2i)\, e_1^{d-i}e_2^i. \end{aligned}$$

Erityisesi tapauksessa $d = 2$ saadaan

$$Mat(Sym^2(H)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ja yleisessäkin tapauksessa huomataan, että $Mat(Sym^d(H))$ on tässä kannassa diagonaalinen ja diagonaalialkiot muodostavat tasavälisen jonon, jossa peräkkäiset alkiot eroavat toisistaan 2:lla: $d_{11} = d, d-2, d-4, \ldots, d_{dd}$.

Lemma 32.4. *Lien ryhmän $sl_2(\mathbb{R})$ kanta-alkio* $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ *toimii diagonaalisesti paitsi tautologisessa esityksessä, myös kaikissa muissa esityksissä.*

Todistus. Sivuutetaan kiireessä, ei toivottoman vaikea. □

Remark 32.5. (Itse asiassa kaikilla sl, jopa kaikilla ns. puoliyksinkertaisilla eli semisimppeleillä Lien algebroilla on sellainen ominaisuus, että jos jokin sen alkio H toimii diagonaalisesti tautologisessa esityksessä, niin se toimii diagonaalisesti kaikissa muissakin esityksissä.)

Seuraava tehtävä on osoittaa, että ei ole olemassa muita Lien algebran $sl_2(\mathbb{R})$ redusoitumattomia esityksiä kuin jo löytämämme. Koska kunnan $\mathbb{C}$ täydellisyyden takia on helpompi tutkia kompleksisia kuin reaalisia Lien algebroita, kompleksifioidaan $SL_2(\mathbb{R})$:

Remark 32.6. Olkoon V Lien algebran $sl_2(\mathbb{R})$ esitys. Silloin $V \otimes \mathbb{C}$ eli "sama vektoriavaruus kompleksikertoimin" on kompleksisen Lien algebran $sl_2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$ esitys.

Jos W on Lien algebran $sl_2(\mathbb{R})$ esityksen[2] V aliesitys, niin $W \otimes \mathbb{C}$ on Lien algebran $sl_2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$ esityksen $V \otimes \mathbb{C}$ aliesitys. Jos siis $V \otimes \mathbb{C}$ on redusoitumaton, on siis myös alkuperäinen esitys V redusoitumaton. [3]

Siksi sen näyttämiseen, että löytämämme Lien algebran $sl_2(\mathbb{R})$ redusoitumattomat esitykset ovat ovat ainoat, riittää todistaa, että niiden kompleksifioinnit ovat Lien algebran[4] $sl_2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$ ainoat redusoitumattomat esitykset. Tämä on seuraavan lauseen sisältö.

Theorem 32.7. *Lien algebran $sl_2(\mathbb{C})$ ainoat äärellisulotteiset redusoitumattomat esitykset ovat tautologisen esityksen symmetriset potenssit $Sym^d(\mathbb{C}^2)$, (joiden esitysmatriisit ovat samat kuin vastaavat reaaliset, siis edellä tutkitut.)*

Todistus. Tarkastellaan Lien algebran $sl_2(\mathbb{C})$ äärellisulotteista kompleksista esitystä V. Muistetaan, että Lien algebran $sl_2(\mathbb{C})$ generoivat matriisit $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ja $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Selvitetään ensin H:n

[2] Eiköhän tähän sopisi minkä tahansa Lien algebran esitys.

[3] Sama ei päde kääntäen; harjoitustehtävänä olemme jo konstruoineet Lien algebran $sl_2(\mathbb{R})$ redusoitumattoman esityksen, jonka kompleksifiointi on redusoituva.

[4] joka on sama kuin $sl_2(\mathbb{C})$

toimintaa V:ssä. Lemman**??** mukaan toiminta on diagonaalista, joten V hajoaa (äärelliseksi, tietenkin) suoraksi summaksi $\oplus_{\alpha \in \mathbb{C}} V_\alpha$, missä H toimii aliavaruudessa H_α kertomisena luvulla α eli V_α on H:n ominaisavaruus ominaisarvolla α. Selvitetään seuraavaksi X:n toimintaa kussakin V_α osoittamalla, että $Xv \in V_{\alpha+2}$, kun $v \in V_\alpha$. Tämä onkin ovela tarkastus: Olkoon $v \in V_\alpha$, jolloin $Hv = \alpha v$.

$$HXv = [H, X]v + XHv,$$

mutta ryhmässä $GL_2(\mathbb{R})$ on

$$[H, X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2X,$$

joten $[H, X] = 2X$ pätee esitysmatriisellekin ja siis

$$HXv = [H, X]v + XHv = 2Xv + X\alpha v = (2 + \alpha)Xv.$$

Siis $Xv \in V_{\alpha+2}$.

Vastaavasti todetaan, että $Y : V_\alpha \to V_{\alpha-2}$. Näistä tiedoista voidaan tehdä huomattavia johtopäätöksiä:

Olkoon $\alpha_0 \in \mathbb{C}$ jokin H:n ominaisarvo eli $V_{\alpha_0} \neq \{0\}$. Silloin suora summa

$$\oplus_{m \in \mathbb{Z}} V_{\alpha_0 + 2m} \subset V$$

on V:n aliesitys, koska molemmat Lien algebran $sl_2(\mathbb{R})$ generaattorit[5] X ja Y kuvaavat sen itselleen. Mutta olemme olettaneet, että tutkittava esitys on redusoitumaton ja $V_{\alpha_0} \neq \{0\}$. Siksi

$$\oplus_{m \in \mathbb{Z}} V_{\alpha_0 + 2m} = V$$

Koska V oletettiin äärellisulotteiseksi, jokainen H:n ominaisavaruus V_{α_0+2m} on äärellisulotteinen ja vain äärellisen moni eroaa nolla-avaruudesta. Toisin sanoen

$$V = V_\lambda \oplus V_{\lambda+2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda+2n}.$$

Koska esitysmatriisit ovat kääntyviä, ovat $V_\lambda, V_{\lambda+2}, \ldots, V_{\lambda+2n} = V_\mu$ nollasta eroavia.[6]

Olkoon $v \in V_\mu$. Silloin $\langle v, Yv, Y^v, \ldots, Y^n v \rangle = V$, sillä tämäkin on tutkittavan redusoitumattoman esityksen invariantti alivaruus, mikä johtuu siitä, että Y ja H tietenkin kuvaavat sen itselleen, mutta myös X tekee niin, sillä

$$X(Y^p v) = p(\mu - p + 1)(Y^{p-1} v),$$

[5] Määrittele, jos ei jo ole

[6] Samalla perusteella kaikki $V_{\lambda+2m} \neq \{0\}$, missä $m \in \mathbb{Z}$. Ristiriita! Missä virhe?

joka vaatii pienen perustelun vaikkapa induktiolla:

Tapaus p=0: Huomataan, että $XY^pv = XY^0v = Xv = 0$, sillä oletettiin, että $v \in V_\mu$. Siis väite pätee, kun $p = 0$.

Induktioaskel: Oletetaan, että

$$XY^{p-1}v = (p-1)(\mu - (p-2))Y^{p-2}v.$$

Lasketaan käyttäen induktio-oletusta ja tietoa $Y : V_\alpha \to V_{\alpha-2}$:

$$\begin{aligned}
XY^pv &= XYY^{p-1}v \\
&= [X,Y]Y^{p-1}v + (XY - [X,Y])Y^{p-1}v \\
&= [X,Y]Y^{p-1}v + (YX)Y^{p-1}v \\
&= [X,Y]Y^{p-1}v + YXY^{p-1}v \\
&= HY^{p-1}v + Y(p-1)(\mu - (p-2))Y^{p-2}v \\
&= (\mu - 2(p-1))Y^{p-1}v + (p-1)(\mu - (p-2))Y^{p-1}v \\
&= \big((\mu - 2(p-1)) + (p-1)(\mu - (p-2))\big)\, Y^{p-1}v \\
&= \big(\mu p - p^2 + p + 0\big)\, Y^{p-1}v \\
&= p(\mu - p + 1)Y^{p-1}v,
\end{aligned}$$

joka on induktioaskelen väite.

Tulos $\langle v, Yv, Y^v, \dots, Y^nv\rangle = V$ merkitsee, että avaruudet V_α ovat yksiulotteisia.

Valitsemalla $p = (\frac{1}{2}(\mu - \lambda) + 1)$ saadan $Y^{p-1}v \in V_\lambda$, siis $Y^pv = 0$ ja

$$0 = X(0) = X(Y^pv) = p(\mu - p + 1)(Y^{p-1}v),$$

josta $(\mu - p + 1) = 0$ eli $0 = (\mu - \frac{1}{2}(\mu - \lambda) - 1 + 1) = \frac{1}{2}(\mu + \lambda)$, toisin sanoen $\lambda = -\mu$, joten V on seuraavanlainen summa H:n yksiulotteisista ominaisavaruuksista:

$$V = V_{-\mu} \oplus V_{-\mu+2} \oplus \cdots \oplus V_{\mu-2} \oplus V_\mu.$$

Erityisesti ominaisarvot ovat kaikki parillisia tai kaikki paritomia kokonaislukuja sen mukaan onko 0 ominaisarvo vai ei.

Nyt on täysin selvitetty lien algebran $gl_2(\mathbb{C})$ redusoitumattomien esitysten rakenne. Tästä voi päätellä, että ne ovat edellä konstruoidut eikä muita ole. (Harjoitustehtävä: Tee se!

H:n ominaisvektorin $v \in V_\alpha$ ominaisarvoa sanotaan muuten yleensä sen *painoksi*. Luku $\mu \in \mathbb{N}$ on tutkittavan esityksen suurin paino. Mikä on sen yhteys esitystä vastaavan symmetrisen tulon potenssiin?)

$\square$