JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

ESITYSTEORIA **Harjoitus 6 / 2009**
D 355 tiistai 27.10 klo. 8-10.

1. *Lineaarikuvausten* $T_1 : V_1 \to W_1$ *ja* $T_2 : V_2 \to W_2$ *tensoritulo* on lineaarikuvaus

$$T_1 \otimes T_2 : V_1 \otimes V_2 \to W_1 \otimes W_2$$
$$x_1 \otimes x_2 \mapsto T_1(x_1) \otimes T_2(x_2) \quad \text{(Tässä kantavektorien kuvat).}$$

Tarkasta, että tensoritulon matriisi on matriisien tensoritulo. (Voit laskea 2-ulotteisille V_i, mutta kirjoita tulos n-ulotteisillekin.)

Mietittävää. ”Onko $\otimes$ assosiatiivinen? Entä kommutatiivinen”?

2. Olkoon $\{e_i\}_{i_1,\dots,n}$ vektoriavaruuden V kanta, jolloin $\{e_i \otimes e_j\}_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2}$ on tensoritulon $V \otimes V$ eli $V^{\otimes 2}$ kanta. Määritellään lineaarikuvaus $\theta : V \otimes V \to V \otimes V$ asettamalla kantavektoreile kuvat $e_i \otimes e_j \mapsto e_j \otimes e_j$.

Tensori $z \in V \otimes V$ on *symmetrinen*, mikäli $\theta(z) = z$ ja *antisymmetrinen* eli *alternoiva*, mikäli $\theta(z) = -z$. Osoita, että jokainen tensori $z \in V \otimes V$ voidaan yksikäsitteisellä tavalla lausua summana symmetrisestä ja antisymmetrisestä tensorista eli että

$$V \otimes V = \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \mathrm{Alt}^2(V),$$

missä on merkitty

$$\mathrm{Sym}^2(V) = \{z \in V \otimes V \mid z \text{ on symmetrinen } \} \text{ ja}$$
$$\mathrm{Alt}^2(V) = \{z \in V \otimes V \mid z \text{ on antisymmetrinen } \}.$$

3. (jatkoa) a) Muodosta $R^2 \otimes R^2$:n tensorin $(1,2)\otimes(3,4) + 2\,(5,6)\otimes(7,8)$ hajotelma symmetriseksi ja antisymmetriseksi osaksi .

b) Osoita suoraan laskemalla (niin pitkälle kuin tuntuu järkevätä), että matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (Kronecker- eli) tensoritulo itsensä kanssa $A \otimes A$ kuvaa $\mathrm{Sym}^2(\mathbb{R}^2) \to \mathrm{Sym}^2(\mathbb{R}^2)$ ja $\mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^2) \to \mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^2)$.

4. Tutki, onko yleensäkin niin, että lineaarikuvauksen tensorituloneliö $T \otimes T : V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$ kuvaa $\mathrm{Sym}^2(V) \to \mathrm{Sym}^2(V)$ ja $\mathrm{Alt}^2(V) \to \mathrm{Alt}^2(V)$.

5. a) Onko jokainen homomorfismi $G \to \mathbb{C}$ luokkafunktio?

b) Onko jokainen homomorfismi $G \to \mathbb{C}$ jonkin esityksen karakteeri?

c) Onko jokainen homomorfismi $G \to \mathbb{C}$ joidenkin esitysten karakteerien lineaarikombinaatio? (Tähän pelkkä vastaus)

6. Todista, että kahden neliömatriisin tensoritulon jälki on niiden jälkien tulo. Onko siis kahden (äär.ul.) esityken tensoritulon karakteeri esitysten karakteerien tulo?

7. Serren tehtävä 2.1 sivulla 12.

8. Serren tehtävä 2.2 sivulla 12.

9. Serren tehtävä 2.3 sivulla 12.

10. Serren tehtävä 2.4 sivulla 12.