JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

ESITYSTEORIA **Harjoitus 4 / 2009**

D 355 tiistai 27.10 klo. 8-10.

1. Olkoot V ja W n-ulotteisia vektoriavaruuksia. Keksi lineaarinen bijektio eli isomorfismi $V \to W$. (Miksi muuten isomorfiset avaruudet ovat aina samaulotteisia?)

2. Olkoot V ja W isomorfisia vektoriavaruuksia. Osoita, että vektoriavaruudet $\mathrm{Hom_L}(V,V) = \{T : V \to V \mid T \text{ on lineaarikuvaus}\}$ ja $\mathrm{Hom_L}(W,W)$ ovat isomorfisia. (Outo lisäkysymys: Ovatko $\mathrm{Hom_L}(V,W)$ ja $\mathrm{Hom_L}(W,V)$ isomorfisia?)

3. Olkoon V n-ulotteinen vektoriavaruus ja $\{e_1,\ldots,e_n\}$ sen kanta. Keksi kanta vektoriavaruudelle $\mathrm{Hom_L}(V,V)$.

4. Kuvausten yhdistäminen tekee joukosta $\mathrm{GL}(V) = \{T \in \mathrm{Hom_L}(V,V) \mid T \text{ on kääntyvä}\}$ ryhmän. Itse asiassa $\mathrm{GL}(V)$ muodostuu kaikista äärettömään symmetriseen ryhmään $S_V =$ bijektiot $V \to V$ kuuluvista lineaarikuvauksista ja on S_V:n aliryhmä. Osoita, että jos V ja W ovat isomorfisia vektoriavaruuksia, niin ryhmät $\mathrm{GL}(V)$ ja $\mathrm{GL}(W)$ ovat isomorfiset.

5. Olkoon V n-ulotteinen (kanta $\{e_1,\ldots,e_n\}$). Keksi kaksi eri isomorfismia $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(n) = \{M \mid M \text{ on kääntyvä } n \times n - \text{matriisi}\}$.

Vihje: Tehtävä on helppo. Voit kokeilla ensin tapausta n=2 ja jotain konkreettista isomorfismia $T \in \mathrm{GL}(V)$. Jos teoria on hauskempaa kuin kokeileminen, mieti seuraavaa: Olkoon vektoriavaruudella lisäksi myös kanta $\{f_1,\ldots,f_n\}$. Millä ehdolla jokaista - tai edes yhtä - lineaari-isomorfismia $T \in \mathrm{GL}(V)$ ”esittää kummassakin kannassa sama matriisi.”)

6. Kertaa lineaarikuvauksen kannanvaihtokaavan johto.

7. Muodosta matriisien $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

a) tulo, joka on 3×2-matriisi

b) suora summa joka on 5×4-matriisi

c) tensoritulo $A \otimes B$, joka on 6×4-matriisi.

8. Matriisin A edustaman lineaarikuvauksen $T \to V$ *redusoimmilla* tarkoitetaan sellaisen kannan valitsemista, jossa T esiintyy suorana summana kahdesta (tai useammastakin) matriisista. Keksi tässä mielessä redusoitumaton lineaarikuvaus $T : R^2 \to R^2$. Onko olemassa redusoituva 2×2-matriisi, jossa kaikki matriisielementit ovat nollasta eroavia.

9. Kuten edellinen tehtävä, mutta $T : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ (kerroinkuntana $\mathbf{C}$).

10. Viime kerran tehtävät 8 ja 9