JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

ESITYSTEORIA **Harjoitus 3 / 2009**
D 355 tiistai 20.10 (!!) klo. 8-10.

1. Isomorfismilauseista

Normaalia aliryhmää merkitään $N \trianglelefteq G$ (toisissa teksteissä vain $N \triangleleft G$).

Peruslause. Homomorfismin $\varphi : G \to H$ ydin on normaali aliryhmä ja kuvaus $\varphi(g) \mapsto [g] = gH$ on isomorfismi

$$\varphi(G) \to G/\ker\varphi$$

Erikoistapaus/sovellus: Lineaarikuvauksen kuvan ja ytimen dimensioiden summa on lähtöavaruuden dimensio.

Toinen isomorfismilause. Olkoot B ryhmän G aliryhmä ja $A \trianglelefteq B$, jolloin A on G:n aliryhmä. (Ei muuten välttämättä normaali aliryhmä, vaikka B olisi normaali G:ssä.) Silloin $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ on G:n aliryhmä, $B \trianglelefteq AB$, $A \cap B \trianglelefteq A$ ja

$$\frac{AB}{B} \cong \frac{A}{A \cap B}.$$

(Oletusta $A \trianglelefteq B$ voi vähän lieventää: riittää olettaa, että A on G:n aliryhmä ja $A \subset N_G(B)$.)

1. Täydennä toisen isomorfialauseen todistusta näytämällä, että jos A ja B ovat G:n aliryhmiä, niin $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ on aliryhmä aina ja vain, kun $AB = BA$.

Kolmas isomorfismilause. Olkoot $H \trianglelefteq G$ ja $K \trianglelefteq G$siten, että H on K:n aliryhmä. Silloin K/H on G/H:n normaali aliryhmä ja

$$\frac{G/H}{K/H} \cong G/K.$$

2. Täydennä kolmannen isomorfialauseen todistusta näytämällä, että lauseen oletuksin K/H on G/H:n normaali aliryhmä.

Neljäs isomorfismilause. Olkoon $N \trianglelefteq G$. Silloin on olemassa bijektio

$$\psi : \{A \subset G \mid A \text{ on aliryhmä ja } N \subset A\} \to \{G/N\text{:n aliryhmät }\}$$

jolla on seuraavat ominaisuudet: (A ja $B \in \{A \subset G \mid A \text{ on aliryhmä ja } N \subset A\}$)

(1) $A \subset B \iff \psi(A) \subset \psi(B)$
(2) Jos $A \subset B$, niin $\#\{bA \mid b \in B\} = \#\{b\psi(A) \mid b \in \psi(B)\}$
(3) $\psi(< A \cup B >) =< \psi(A) \cup \psi(B) >$
(4) $\psi(A \cap B) = \psi(A) \cap \psi(B)$
(5) $A \trianglelefteq B \iff \psi(A) \trianglelefteq \psi(B)$

3. Todista näistä jokin kohta.

KÄÄNNÄ

Luokkayhälöstä

Luokkayhtälö.

$$\#G = \#Z_G + \sum_{O_a \text{ on rata ja } a \notin Z_G} \#O_a = \#Z_G + \sum_{O_a \text{ on rata ja } a \notin Z_G} \frac{\#G}{\#G_a}$$

4. Todista luokkayhtälön avulla, että jos $\#G = p^\alpha$ jollekin alkuluvulle p, niin G: n keskukseen Z kuuluu muitakin alkioita kuin neutraalialkio.

5. Todista samaan tapaan, että jos $\#G = p^2$ jollekin alkuluvulle p, niin G on kommutatiivinen eli abelin ryhmä. (Onko tämä ilmeistä jotenkin muutenkin? Minusta ei.)

6. Määrää kaikki konjugointiluokat ja niiden koot ryhmässä a) S_4 b) A_4.

7. (Jatkoa)/quad c) $\mathbf{Z}_2 \times S_3$ d) $S_3 \times S_3$.

Toiminnat permutaatioina

Viime kerralla ehdittiin käsitellä vielä tämä. Symmetrinen ryhmä $S_A = \{$bijektiot $A \to A\}$ toimii määritelmänsä mukaisesti joukossa A, erityisesti S_n joukossa $\{1, \ldots, n\}$.

Määrää symmetrisen ryhmän S_n toiminnan ydin ja radat sekä pisteiden stabilisaatorit ja niiden indeksit. Onko toiminta uskollinen? Entä transitiivinen?

Huom. Symmetrisen ryhmän $S(A)$ aliryhmää sanotaan toisinaan *transitiiviseksi aliryhmäksi*, jos se toimii transitiivisesti joukossa A.

8. Olkoon $\sigma \in S_n$ ja $G =< \sigma >$ sen virittämä (syklinen) aliryhmä (ts. $G = \{\sigma^k \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Yleisestikin, jos jokin ryhmä toimii jossain joukossa A, niin tietenkin myös jokainen sen aliryhmä toimii A:ssa. Erityisesti siis nyt tarkasteltava $< \sigma >$ toimii joukossa $A = \{1, \ldots, n\}$.

Periytyyko S_n:n toiminnan transitiivisuus? Määrää esimerkiksi aliryhmän $< (345) > \subset S_6$. radat - tai ainakin yksi rata.

9. (jatkoa) Olkoon $\mathcal{O} \subset A$ jokin $< \sigma >$:n toiminnan radoista joukossa $A = \{1, \ldots, n\}$ ja olkoon $a \in \mathcal{O}$. ”Tärkeän pienen lauseen”(ed kerran tehtävä = prop. 2 sivu 114) todistuksen mukaan kuvaus $\mathcal{O} = G_a \to \{\text{vas. } G_a\text{-sivuluokat}\} : \sigma^k a \mapsto \sigma^k G_a$ on bijektio.

Koska $G =< \sigma >$ on syklinen ja siis abelin ryhmä, niin stabilisaattori G_a on sen <u>normaali</u> aliryhmä.

Osoita, että tekijäryhmä G/G_a on syklinen ja kertalukua (alkioiden lukumäärä) $d = \min\{m \in \mathbf{N} \mid \sigma^m \in G_a\}$ (joka on äärellinen, sillä viimeistään $\sigma^{\#G} = 1 \in G_a$.)

Seuraus: $d = \#(G/G_a) \overset{\text{em. lause}}{=} \#\mathcal{O}$, eli radalla $\mathcal{O}$ on d alkiota, joten

$$\mathcal{O} = \{a, \sigma a, \sigma^2 a, \ldots, \sigma^{d-1} a\}$$

ja — kun radan alkiot nimetään näin — alkuperäinen syklisen ryhmän alkio σ toimii (kullakin)radallaan $\mathcal{O}$ kuten syklinen permutaatio.

Näin on tullut todistetuksi, että symmetrisen ryhmän alkiot voi kirjoittaa tunnetulla tavalla syklihajoitelmina. Syklit ovat toiminnan radat.