JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

ESITYSTEORIA **Harjoitus 2 / 2009**
D 355 tiistai 6.10 klo. 8-10.

Kertausta aliryhmistä

1. Mitkä seuraavista ovat aliryhmiä?

a) Muotoa $(a + ai)$ olevat kompleksiluvut ryhmässä $(\mathbf{K}, +)$.
b) $\{z \in \mathbf{K} \mid |Z| = 1\}$ ryhmässä $(\mathbf{K}, \cdot)$.
c) Vaihtojen joukko $\{(i, j) \mid i \neq j\}$ symmetrisessä ryhmässä S_n.
d) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 \in \mathbf{Q}\}$ ryhmässä $(\mathbf{K}, +)$.
e) $\{(g, 1) \in G \times H \mid g \in G\}$ *tulorymässä* $G \times H$, joka on tulojoukko $G \times H$ varustettuna pisteittäisin laskutoimituksin: $(g, h) \circ (g', h') = (g \circ g', h \circ h')$.
f) Äärettömän monen aliryhmän leikkaus.
g) Kahden eri aliryhmän yhdiste. (Tässä on pieni juju.)
h) $\{$yläkolmiomatriisit$\}$ ryhmässä $GL_n = \{$kääntyvät $n \times n$-matriisit$\}$.

2. Muistetaan, että jos $H \subset G$ on aliryhmä ja $g \in G$, niin $H \to G : h \mapsto gh$ on bijektio H:lta kuvajoukolleen gH, jota sanotaan H:n vasemmaksi sivuluokaksi. Kaikki vasemmat sivuluokat ovat siis yhtä mahtavia joukkoja, erityisesti jos $\#H = n < \infty$, niin kussakin on n alkiota. Lisäksi vasemmat sivuluokat ovat erillisiä, minkä voi todistaa suoraan toteamalla, että samaan sivuluokkaan kuuluminen on ekvivalenssirelaatio, mutta myös huomaamalla, että vasemmat sivuluokat ovat ratoja toiminnassa, jossa H toimii joukossa G siten, että $\varphi(h) : g \mapsto gh^{-1}$. Totea tämä!

Päättele tästä *Lagrangen lause*, jonka mukaan äärelliselle ryhmälle pätee $\#G = \#H \times \#\{\text{vasemmat sivuluokat } gH\}$, erityisesti $\#G$ on jaollinen $\#H$:lla. Sivuluokkien lukumäärä

$$\mathrm{ind}(H) = \frac{\#G}{\#H}$$

on aliryhmän H *indeksi.*

Todista edelleen, että jos $\#G$ on alkuluku, niin G:llä ei ole muita aliryhmiä kuin triviaalit kaksi — ts. G on *yksinkertainen*

Lagrangen lause ei päde kääntäen: ei ole yleisesti totta, että jos n jakaa kertaluvun $\#G$, niin olisi aina olemassa aliryhmä, jossa olisi nuo n alkiota. Mutta äärelliselle ryhmälle G pätee kuitenkin (tod myöh.) seuraavat:

(1) Jos G on abel (hiukan vähempikin riittää), niin ylläoleva on totta kuitenkin.
(2) (Cauchyn lause): Jos n on alkuluku, niin niin ylläoleva on totta kuitenkin.
(3) (Sylowin lause): Jos $\#G = p^\alpha m$, missä p on alkuluku, joka ei ole m:n tekijä, niin ylläoleva on totta luvulle p^α. (Cauchyn lause on erikoistapaus tästä.)

Keskittäjät ja normalisoijat

Muistetaan seuraavat määritelmät. Olkoon $A \subset G$ ryhmän osajoukko, $a \in A$ ja $g \in G$.

$C_G(A) = \{g \in G \mid a = gag^{-1} \,\forall\, a \in A\}$ (A:n *keskittäjä* on kaikkien A:n alkioiden kanssa kommutoivien alkioiden joukko). Erityisesti yhden alkion keskittäjä $C_G(\{a\}) = C_G(a)$ on $\{g \in G \mid a = gag^{-1}\}$ eli sama kuin a:n stabilisaattori $G_a = \{g \in G \mid \varphi(g)a = a\}$ konjugointitoiminnassa $a \mapsto gag^{-1}$. (Vrt demot 1 ja alla) Toisena äärimmäisenä erikoistapauksena osajoukon keskittäjästä on ryhmän kaikkien alkioiden kanssa kommutoivien alkioiden joukko, ryhmän *keskus* $Z(G) = C_G(G) = \{g \in G \mid a = gag^{-1} \,\forall\, a \in G\}$.

$N_G(A) = \{g \in G \mid A = gAg^{-1}\}$ on A:n *normalisoija.*

Selvästi

$$\bigcap_{a \in A} C_G(a) = C_G(A) \subset N_G(A).$$

Ei ole vaikeaa näyttää suoraan, että $C_G(a)$ ja $N_G(A)$ ja siis myös $C_G(A)$ ja $Z(G)$ ovat G:n aliryhmiä, mutta saamme saman tiedon seuraavasta yhteydestä toimintoihin:

Totesimme edellä, että ryhmän G toimiessa joukossa A alkion $a \in A$ stabilisaattori $G_a = \{g \in G \mid ga = a\}$, on G:n aliryhmä (Demot 1, teht. 4b) ja että erityisesti tämä koskee toimintaa G:tä konjugoimalla $\phi(g)(a) = gag^{-1}$ jossa alkion $a \in G$ stabilisaattori on $C_G(a)$. Siis $C_G(a)$ on aliryhmä. Samoin tällaisten leikkaus $C_G(A)$, erityisesti $Z(G)$ on aliryhmä. Lopulta $N_G(A)$ on alkion (!) A stabilisaattori G:n toimiessa G:n kaikkien osajoukkojen joukossa eli potenssijoukossa $\mathcal{P}(G)$ toimintana $A \mapsto gAg^{-1}$, siis sekin aliryhmä.

Esimerkki: Neliön symmetriaryhmä, dihedraalinen ryhmä D_8, permutoi neliön kärkiä isometrisesti. (Demot 1) Kärjen a stabilisaattori muodostuu niistä isometrioista, joilla ao. kärki ei liiku, jolloin vastakkainenkaan kärki ei liiku – siis vain identtisestä kuvauksesta ja peilauksesta näiden kärkien kautta kulkevan suoran suhteen.
Tehtäviä:

3. Todista keskittäjä $C_G(A)$ normalisoijan $N_G(A)$ (jopa normaaliksi, ks. kohta (6) alla) aliryhmäksi tutkimalla $N_G(A)$:n toimintaa konjugointina joukossa A.

4. Onko $C_G(A) = \{g \in G \mid a = g^{-1}ag \,\forall\, a \in A\}$?

5. Osoita, että $C_G(Z_G)) = G$ ja siis myös $N_G(Z(G)) = G$.

***Syy nimeen. En ole miettinyt tätä. Ei käsiteltäne. Ks seur.** Osoita, että jos $H \subset G$ on aliryhmä, niin $N_G(H))$ on suurin sellainen G:n aliryhmä, jonka normaalina aliryhmänä on H. (Suurin on siis olemassa!)

6. (TÄRKEÄ PIENI LAUSE) Toimikoon äärellinen ryhmä G joukossa A ja olkoon $a \in A$. Todista, että a:n radassa $\mathcal{O} = Ga$ on yhtä monta alkiota kuin on olemassa sivuluokkia gG_a, missä G_a on a:n stabilisaattori. Väite sanoo siis, että

$$\#\mathcal{O} = \operatorname{ind} G_a,$$

kun $\mathcal{O}$ on a:n rata ja G_a on a:n stabilisaattori.

Ohje: Tutki kuvausta $\mathcal{O} = Ga \to \{\text{vas. sivuluokat}\} : ga \mapsto gG_a$.

Normaalit aliryhmät

Seuraavat ovat tunnetusti yhtäpitäviä aliryhmälle $N \subset G$

(1) $N \trianglelefteq G$ eli N on G:n *normaali aliryhmä*, mikä merkitsee, että $gNg^{-1} = N$ kaikille $g \in G$
(2) $N_G(N) = G$
(3) $gN = Ng$ kaikille $g \in G$, ts. vasemmat ja oikeat sivuluokat ovat samoja.
(4) edustajittainen laskutoimitus $[g][h] = [gh]$ on hyvin määritelty ja tekee (vasempien) sivuluokkien joukosta $\{[g] = gN \mid g \in G\}$ ryhmän, jota sitten merkitään G/N.
(5) $gNg^{-1} \subset N$ kaikille $g \in G$
(6) N on jonkin homomorfismin ydin. Erityisesti siis jokaisen toiminnan ydin on normaali aliryhmä.

7. Todista kohdat (2) ja (6) yhtäpitäviksi muiden kanssa (voit olettaa muut yhtäpitäviksi keskenään tai todistella niitäkin).

Toiminnat permutaatioina

8. Symmetrinen ryhmä $S_A = \{\text{bijektiot } A \to A\}$ toimii määritelmänsä mukaisesti joukossa A, erityisesti S_n joukossa $\{1, \ldots, n\}$.

Määrää symmetrisen ryhmän S_n toiminnan ydin ja radat sekä pisteiden stabilisaatorit ja niiden indeksit. Onko toiminta uskollinen? Entä transitiivinen?

Huom. Symmetrisen ryhmän $S(A)$ aliryhmää sanotaan toisinaan *transitiiviseksi aliryhmäksi*, jos se toimii transitiivisesti joukossa A.

9. Olkoon $\sigma \in S_n$ ja $G =< \sigma >$ sen virittämä (syklinen) aliryhmä (ts. $G = \{\sigma^k \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Yleisestikin, jos jokin ryhmä toimii jossain joukossa A, niin tietenkin myös jokainen sen aliryhmä toimii A:ssa. Erityisesti siis nyt tarkasteltava G eli $< \sigma >$ toimii joukossa $A = \{1, \ldots, n\}$.

Periytyyko S_n:n toiminnan transitiivisuus? Määrää esimerkiksi aliryhmän $< (345) > \subset S_6$. radat - tai ainakin yksi rata.

10. (jatkoa) Olkoon $\mathcal{O} \subset A$ jokin $< \sigma >$:n toiminnan radoista joukossa $A = \{1, \ldots, n\}$ ja olkoon $a \in \mathcal{O}$. Edellä esitetyn tärkeän pienen lauseen todistuksen mukaan kuvaus $\mathcal{O} = G_a \to \{\text{vas. } G_a\text{-sivuluokat}\} : \sigma^k a \mapsto \sigma^k G_a$ on bijektio.

Koska $G =< \sigma >$ on syklinen ja siis abelin ryhmä, niin stabilisaattori G_a on sen normaali aliryhmä.

Osoita, että tekijäryhmä G/G_a on syklinen ja kertalukua (alkioiden lukumäärä) $d = \min\{m \in \mathbf{N} \mid \sigma^m \in G_a\}$ (joka on äärellinen, sillä viimeistään $\sigma^{\#G} = 1 \in G_a$.)

Seuraus: $d = \#(G/G_a) \overset{\text{em. lause}}{=} \#\mathcal{O}$, eli radalla $\mathcal{O}$ on d alkiota, joten

$$\mathcal{O} = \{a, \sigma a, \sigma^2 a, \ldots, \sigma^{d-1} a\}$$

ja — kun radan alkiot nimetään näin — alkuperäinen syklisen ryhmän alkio σ toimii (kullakin)radallaan $\mathcal{O}$ kuten syklinen permutaatio.

Näin on tullut todistetuksi, että symmetrisen ryhmän alkiot voi kirjoittaa tunnetulla tavalla syklihajoitelmina. Syklit ovat toiminnan radat.

11. Toimikoon G joukossa A. Muistetaan, että alkion $a \in$ stabilisaattori on $G_a = \{g \in G \mid ga = a\}$. Todista, että jos $a, b \in A$ ja $b = ga$ jollekin $g \in G$, niin $G_b = gG_a g^{-1}$.

12. Olkoon G joukon A *permutaatioryhmä*, ts. symmetrisen ryhmän aliryhmä $G \subset S_A = \{\sigma \mid \sigma : A \to A \text{ on bijektio }\}$. Olkoon $\sigma \in G$ ja $a \in A$. Todista, että $\sigma G_a \sigma^{-1} = G_{\sigma a}$ ja päättele tästä, että jos G toimii transitiivisesti A:ssa, niin

$$\bigcap_{\sigma \in G} \sigma G_a \sigma^{-1} = 1 \quad [= G : \text{n neutraalialkio}].$$

13. (jatkoa) Olkoon G symmetrisen ryhmän S_A kommutatiivinen, transitiivinen aliryhmä. Osoita, että $\sigma a \neq a$ kaikille $a \in A$ ja $\sigma \in G \setminus \{1\}$. Päättele, että $\#G = \#A$.

14. Tarkastellaan ryhmän S_3 toimintaa järjestettyjen parien joukossa $\Omega = \{1,2,3\}^2 = \{(i,j) \mid 1 \leq i,j \leq 3\}$: $(i,j) \overset{\sigma}{\mapsto} (\sigma i, \sigma j)$. Numeroi Ω:n alkiot luvuin $0 \ldots 9$. Määrää kunkin $\sigma \in S_3$ syklihajoitelma tässä toiminnassa eli kun σ tulkitaan S_9:n alkioksi. Määrää radat, poimi jokaiselta radalta jokin a ja määrää sen stabilisaattori $(S_3)_a \subset S_3$.

15. (jatkoa) Kuten edellinen tehtävä, mutta

a) S_3 toimii vastaavalla tavalla 27-alkioisessa joukossa $\{1,2,3\}^3$.

b) S_3 toimii samaan tapaan 7-alkioisessa joukossa $\mathcal{P} \setminus \emptyset = \{\text{joukon } \{1,2,3\} \text{ epätyhjät osajoukot}\}$.

1. Googlen välimuistitallenne kohteesta http://en.wikipedia.org/wiki/Centralizer and normalizer.

In group theory, the centralizer and normalizer of a subset S of a group G are subgroups of G which have a restricted action on the elements of S and S as a whole, respectively. These subgroups provide insight into the structure of G. Definitions

The centralizer of an element a of a group G (written as $C_G(A)$) is the set of elements of G which commute with a; in other words, $C_G(A) = \{x \in G : xa = ax\}$. If H is a subgroup of G, then $C_H(a) = C_G(A)?H$. If there is no danger of ambiguity, we can write $C_G(A)$ as C(A). More generally, let S be any subset of G (not necessarily a subgroup). Then the centralizer of S in G is defined as $C(S) = \{x?G : \forall s \in S, xs = sx\}$. If S = a, then C(S) = C(a).

C(S) is a subgroup of G; since if x, y are in C(S), then xy ?1s = xsy ?1 = sxy ?1 for all s in S.

The center of a group G is $C_G(G)$, usually written as Z(G). The center of a group is both normal and abelian and has many other important properties as well. **We can think of the centralizer of a as the largest (in the sense of inclusion) subgroup H of G having a in its center, Z(H)**.

A related concept is that of the normalizer of S in G, written as $N_G(S)$ or just N(S). The normalizer is defined as N(S) = $\{x?G : xS = Sx\}$. Again, N(S) can easily be seen to be a subgroup of G. The normalizer gets its name from the fact that if S is a subgroup of G, then N(S) is the largest subgroup of G having S as a normal subgroup. The normalizer should not be confused with the *normal closure* in Galois Theory.