JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

ESITYSTEORIA **Harjoitus 10 / 2009**
D 355 tiistai 8.12 klo. 8-10.

Korpin mukaan kurssille kuuluu 12 luennot (viimeinen 8.12) ja demot (viimeinen 15.12). Kumpiakin on yhdet rästissä. Lienee luonnollista jatkaa luentoja 15.12 asti. Pitäisimmekö 12. demot ennen vai jälkeen vai emme ollenkaan? Minusta parsta olisi: Jälkeen, siis 15. tai mieluummin 16.12.

Tentti pidettäisin sitten keskiviikkona 17.12. ja uusinta kevätlukukauden alussa. Mitä arvelette?

Onko ketään halukasta esitelmöimään esityksistä fysiikassa tai kemiassa?

Vektoriavaruuksien ja esitysten leikkaus ja suora summa

Olkoon $\rho : G \to GL(V)$ esitys.

1. Osoita tai muista, että mv (jopa äärettömän) monen invariantin aliavaruuden leikkaus on invariantti aliavaruus. Osoita tämän avulla, että on olemassa pienin invariantti aliavaruus $W(A)$, joka sisältää annetun joukon $A \subset V$.

2. (jatkoa) Onko $\rho : GL(W(A)) \to GL(W(A))$ redusoitumaton?

3. Onko olemassa (aliavaruuksien inkluusion mielessä, tottakai) suppein annetun vektorin sisältävä esitys? Entä onko olemasa suppein annetun vektorin sisältävä redusoitumaton esitys?

4. Olkoon W redusoitumaton (tulkitse merkintä oikein!), V invariantti ja $W \cap V \neq \emptyset$. Osoita, että $W \subset V$.

5. (Lineaarialgebran kertausta) Olkoot U ja V kaksi vektoriavaruutta. Niiden *suora summa* $U \oplus V$ on joukko $U \times V$ laskutoimituksin $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ ja $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$, jotka tekevät siitä vektoriavaruuden. Alkiota $(x, y) \in U \oplus V$ merkitään useimmiten $x \oplus y$ tai vain $x + y$, joka tosin on hankalasti kaksimerkityksinen esim silloin, kun $U = V$, mitä tilannetta alla tarkastelemmekin.

Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä vektoriavaruuksille U, V ja W:

(1) W:llä on U':n ja ja V':n kanssa isomorfiset aliavaruudet U ja V siten, että $< U \cup W >= W$ ja $U \cap W = \{0\}$.
(2) W:llä on U':n ja ja V':n kanssa isomorfiset aliavaruudet U ja V siten, että jokainen $x \in W$ on tasan yhdellä tavalla lausuttavissa summana $x = u + v$, missä $u \in U$ ja $v \in V$.
(3) W:llä on aliavaruudet U ja V siten, että nollavektori $0 \in W$ on tasan yhdellä tavalla lausuttavissa summana $0 = u + v$, missä $u \in U$ ja $v \in V$.
(4) W on isomorfinen suoran summan $U' \oplus V'$ kanssa.

Lisätietoja: Vektoreita u ja v sanotasn tällöin x:n *komponenteiksi* suorassa simmassa $U \oplus V$. Vastaavat tulokset, merkinnät ja nimet pätevät usean vektoriavaruuden suorassa summassa $\bigoplus_i V_i$. Vektoriavaruus on siis kantavektoriensa virittämien 1-ulotteisten avaruuksien suora summa. Kun muistamme mikä on Hamelin kanta niin ymmärräämme, miksi *äärettömän monen avaruuden suora summa* määritellään ottamalla mukaan niiden tulosta vain termit, joilla on äärellisen monta nollasta eroavaa komponenttia. Se ei siis ole sama kuin avaruuksien karteesinen tulo. Emme myöskään tarvitse sitä.)

Kahden ryhmän suora tulo määritellään samalla tavalla kuin vektoriavaruuksien suora summa: tulojoukkona, jossa on komponenteittaisen laskutoimitus.

Esityksen kanonisen hajoitelman osien konstruktio

Nämä kysymykset asetin jo kierroksella 9, mutta ei ehditty tehdä mitään. Postilaatikossa on ratkaisut niihin kierroksen 9 kysymyksiin, jotka ehdittiin käsitellä. Niistä voi olla apua seuraavien kahden tekoon, mutta laitan tähänkin ohjeita.

6. Serren tehtävä 2.9) sivulla 24: Ei enää työläs!

Voit olettaa, että tutkittava esitys $\rho : G \to GL(V)$ redusoituu isomorfisten redusoitumattomien esitysten $\rho_W : G \to GL(W)$ suoraksi summaksi: $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$, missä siis kaikki rajoittumat $\rho_i : G \to GL(W_i)$ ovat isomorfisia keskenään ja $\rho_W : G \to GL(W)$:n kanssa. Tämä tarkoittaa mm sitä, että kaikilla $s \in G$, $i = 1 \ldots m$ ja $x \in W_i$ pätee $\rho_i sx = \rho x \in W_i \subset V$, missä on lopuksi samaistettu $W_i = 0 \oplus \cdots \oplus W_i \oplus \cdots \oplus 0 \subset W_1 \oplus \cdots \oplus W_m = V$.

Prop 8 mukaan kirjassa määritellyillä kuvauksilla $p_{\alpha\beta} : V \to V$ $(\alpha, \beta = 1 \ldots n = \dim W = \dim V/m)$ on mm seuraavat ominaisuudet:

(1) On olemassa keskenään isomorfiset aliavaruudet $U_\alpha \subset V$ siten, että $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$ ja $p_{\alpha\beta}$ kuvaa U_β:n isomorfisesti U_α:lle ja muut U_γ:t nollaksi.

(2) Kuvaukset $p_{\alpha\beta} : U_\beta \to U\alpha$ toteuttavat : $p_{\gamma\alpha} \circ p_{\alpha\beta} = p_{\gamma\beta}$.

(3) Kun $x \in U_1$, niin $(p_{11}x, p_{21}x, \ldots, p_{n1}x)$ on kanta redusoitumattomalle W:n kanssa isomorfiselle esitykselle $< p_{11}x, p_{21}x, \ldots, p_{n1}x >$. (Tulkitse taas oikein!) Merkitään sitä $W(x)$.

Erityisesti, jos $(x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(m)})$ on U_1:n kanta (mv!), niin sen kuvina saadaan kannat $< p_{\alpha 1}x_1^{(1)}, \ldots, p_{\alpha 1}x_1^{(m)} >\subset W(x_1^{(i)})$, joissa kaikissa $(i = 1 \ldots n)$ esityksellä ρ on sama matriisi (kuin se, jonka avulla kuvaukset $p_{\alpha\beta}$ on määritelty kirjassa).

Tässä mielessä W_i:ksi voi ajatella valitun (tai nyt valita) juuri avaruuden $W(x_1^{(i)})$. Näin merkitsemmekin tästä pitäen. Koska syntyneet redusoitumattomat esitykset ovat isomorfisia (W:n kanssa) voimme sotkuitta **merkitä niiden kantavekoreita samoilla symboleilla $e_\alpha = p_{\alpha 1}x_1^{(i)}$ kaikissa W_i.**

(4) $U_\alpha \cap W(x_1^{(i)}) =< p_{\alpha 1}x_1^{(i)} >$, siis yksiulotteinen. Vektorit $p_{\alpha 1}x_1^{(i)}$ muodostavat koko nm-ulotteisen avaruuden V kannan $(i = 1 \ldots m$ ja $\alpha = 1 \ldots n)$.

(5) Kun redusoitumattonam esityksen matriisi $(r_\alpha\beta)(s)$ on annettu kaikilla $s \in G$, niin U_1:n kannan $(x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(m)})$ valinta siis ratkaisee, miten V (oikeastaan ρ) on jaettu W:n (oikeastaan ρ_W:n) kanssa isomorfisiksi osiksi.

Tehtävä: Määritellään $H = \{h : W \to V \mid h \circ \rho_s = \rho_s \circ h \quad \forall s \in G\}$. Olkoon $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$. Osoita, että kuvaus $\Phi_\alpha : H \to V : h \mapsto h(e_\alpha)$ on lineaari-isomorfismi. Vihje : Valitse H:lle edullinen kanta (demo 9!) ja katso sen kuvaa. (Demon 9 käyttöä helpottaa merkinnöissä, jos oletat, että n=2, kuten malliratkaisussani.)

7. Serren tehtävä 2.10) sivulla 24 (jatkoa, perustapaus) Olkoon $x \in V = \bigoplus_{i=1}^m W_i$ ja olkoon $V(x)$ suppein annetun vektorin x sisältävä esitys.

Valitaan kaikilla $\alpha = 1, \ldots, m$:

$$y_1^\alpha = p_{1\alpha} x, \text{ jolloin } \quad y_1^\alpha \in U_1.$$

Osoita, että

$$V(x) = \bigoplus_{\alpha=1}^{n} W(y_1^\alpha).$$

8. (jatkoa) Osoita, että $V(x)$ on suora summa enintään $n = \dim V/|dimW$ kappaleesta W:n kopioita.

9. (jatkoa) Miksi ”enintään”?

10. Kierroksen 8 tehtävä 3) jäi sekin edelleen vielä hieman vastausta vaille.