JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Johdatusta ryhmien esitysteoriaan **Harjoitus 1 / 2009**
D380 ??? tiistaisin 8-10.

1. Olkoon $\mathbf{K}$ kunta ja $\mathbf{K}^* = \{g \in \mathbf{K} \mid g \neq 0\}$ sen multiplikatiivinen ryhmä. Osoita, että kuvaus $\varphi : \mathbf{K}^* \to \mathcal{F}(\mathbf{K}, \mathbf{K}) : (\varphi(g))(x) = gx$ on ryhmän $\mathbf{K}^*$ toiminta joukossa $\mathbf{K}$.

2. Onko kuvaus $\varphi : \mathbf{Z} \to \mathcal{F}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) : (\varphi(g))(x) = g + x$ ryhmän $(\mathbf{Z}, +)$ toiminta joukossa $\mathbf{Z}$?

3. Onko kuvaus $\varphi : \mathbf{R} \to \mathcal{F}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2) : (\varphi(g))(x, y) = (x + gy, y)$ ryhmän $(\mathbf{R}, +)$ toiminta joukossa $\mathbf{R}^2$?

4. Toimikoon ryhmä G joukossa J ja olkoon $a \in J$. Osoita, että seuraavat ovat G:n aliryhmiä:
a) $\{g \in G \mid gx = x \text{ kaikilla } x \in J\}$
b) $\{g \in G \mid ga = a\}$.
Jälkimmäinen on nimeltään a:n *stabilisaattori* (suomentakaapa!). Entä mikä on a)-kohdan aliryhmä nimeltään? Entä mikä se on, jos *toiminta* on uskollinen?

5. Mitkä tehtävien 1)-3) *toiminnoista* ovat uskollisia?

6. Olkoon A epätyhjä joukko, $k \in \{1, 2, \ldots, \#A\}$ ja $J_k = \{B \subset A \mid \#B = k\}$. Osoita, että $\sigma(\{a_i, \ldots a_k\}) = (\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_k)\}$ on symmetrisen ryhmän S_A toiminta joukossa J_k. Millä k:n arvoilla toiminta on uskollinen?
Näytä eksplisiittisesti, miten S_4:n alkio (12) vaikuttaa joukon $\{1, 2, 3, 4\}$ kuuteen 2-alkioiseen osajoukkoon. Entä miten alkio $(1, 2, 3)$ vaikuttaa niihin?

7. Miten edellisessä tehtävässä käy, jos osajoukot korvataan järjestetyillä jonoilla ja siis J_k(!!!) joukolla A^k?

8. Neliön symmetriaryhmä eli sen isometristen isomorfismien ryhmä on nimeltään *dihedraalinen ryhmä* D_8. Tulkitse sen kaikki 8 alkiota kulmien 1, 2, 3 ja 4 permutaatioiksi ja kirjoita ne näkyviin syklihajoitelmina, siis esimerkiksi kuvaus $1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 4,\ 4 \mapsto 1\}$ muotoon (1,3,4).

9. 2n-kulmion symmetriaryhmä, *dihedraalinen ryhmä* D_{4n} toimii luonnollisella tavalla joukossa, jonka alkioina ovat vastakkaisten kulmien parit. Määrää tämän *toiminnan* ydin.

10. Olkoon G ryhmä ja $\varphi(g)a = ag$ kaikilla $a, g \in G$. Osoita, että φ ei ole (!) G:n toiminta ellei Gole kommutatiivinen. Entä millä ehdolla $\varphi(g)a = ag^{-1}$ määrittelee ryhmän G toiminnan joukossa G?

11. Olkoon G ryhmä ja $\varphi(g)a = gag^{-1}$ kaikilla $a, g \in G$. Osoita, että φ on G:n toiminta G:llä. Tätä toimintaa sanotaan *konjugoinniksi.*
Osoita edelleen, että kiinteällä alkiolla $g \in G$ konjugointi $\varphi(g)$ on ryhmäisomorfismi $G \to G$ eli ryhmän G *automorfismi*. Näytä tämän avulla, että
a) G:n alkioilla a ja gag^{-1} on sama kertaluku.
b) $\forall\ A \subset G$ on $\#(A) = \#gAg^{-1}$, missä on merkitty $gAg^{-1} = \{gag^{-1} \mid a \in A\}$.

12. Toimikoon ryhmä H joukossa A. Osoita, että joukon A relaatio $a \sim b \iff a = hb$ jollekin $h \in H$ on ekvivalenssi. Vastaavat ekvivalenssiluokat ovat *toiminnan radat*. Radat muodostavat siis A:n osituksen.

13. (jatkoa) Olkoon $H \subset G$ äärellisen ryhmän aliryhmä ja toimikoon se G:ssä kertolaskuna vasemmalta. Olkoon $\mathcal{O}$ alkion $x \in G$ rata. Osoita, että kuvaus

$$H \to \mathcal{O} : h \mapsto hx$$

on bijektio, joten kaikki radat ovat yhtä mahtavia (kuin H). Todista tämän avulla *Lagrangen lause*, jonka mukaan $\#G$ on jaollinen $\#H$:lla.

14. Osoita, että kuution symmetriaryhmä eli sen isometristen isomorfismien ryhmä on ryhmänä isomorfinen S_4:n kanssa. Entä oktaedrin?

15. (jatkoa) Kuution symmetriarymä toimii myös vastakkaisten kärkien parien joukossa, mutta tämä toiminta eii ole uskollinen. Miksi?