MATEMAATTINEN ONGELMANRATKAISU 2005

Jyväskylän yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos,
koonnut Pentti Suomela ja päivittänyt Lauri Kahanpää

0. Kurssitiedot

0.1 Esitiedot. Matematiikan approbatur. Myös matematiikan cl-kurssit, etenkin geometria, disreetti matematiikka ja todennäköisyyslaskenta ovat hyödyksi.

0.2 Suositukset. Sopii valinnaiseksi matematiikan cum-laudeen erityisesti opettajiksi aikoville.

0.3 Opetus. Luennot 24 h ; 4 h/vko: tiistaisin ja torstaisin klo. 14-16 MaD 259.
Harjoitukset 12 h ; 2 h/vko: keskiviikkoisin klo 8-10 ja toinen ryhmä klo 16-18.
Pakollisuus ja pisteet: ks. “Suoritus”

0.4 Alustavaa sisältöä. (Luvut viittaavat lukuihin. Lähdeluettelo on viimeisellä sivulla.). (H= How to Solve It, D= Mathematical Discovery, P= Proofs and Refutations)

1. Ongelmanratkaisun esittelyä
2. Harppi- ja viivoitingeometrian pikakurssi
3. Polyan taktiikka
4. Kahden uran menetelmä
5. Algebra heuristisena keinona Cartesiuksen mukaan (D, 2)
6. Rekursio ja induktio (D, 3)
7. Kombinointi, lineaariset menetelmät (D, 4)
8. Todistustekniikka, todistusten lukeminen ja laatiminen (D, 2, P)
9. Heuristiikka ja matematiikan edistyminen, yleisen menetelmän etsintä (D, 5-6)
10. Keksimisen ja oppimisen psykologiaa, suurten matamaatikoiden opetuksia (D, 10-13)
11. Kertaus, ongelmien ratkaisemisen opettaminen, (D, 14)

0.5 Suoritus. On kaksi vaihtoehtoa:

i) pelkkä loppukoe
ii) osallistuminen harjoituksiin ja luentoihin (3 poissaoloa sallitaan) ja essee/kotitentti.

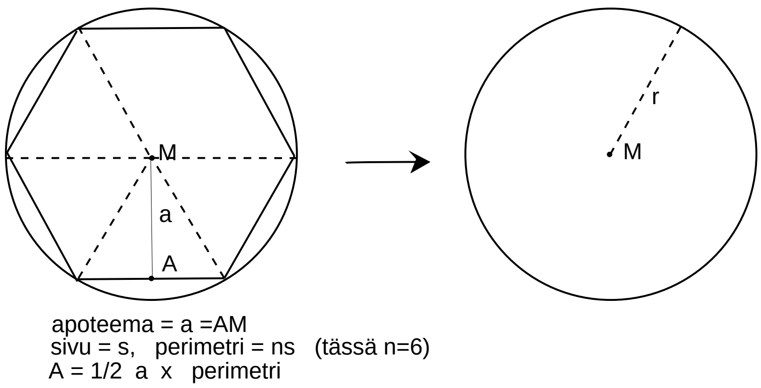
Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

1 Ongelmanratkaisun esittelyä

1.1 Esimerkkiongelmia.

Esim. 1.1 Ympyrän pinta-alan ja kehän yhteys. Säännöllisessä monikulmiossa A= 1/2 apoteema $\times$ perimetri.

Kulmia lisättäessä apoteema $\rightarrow$ säde ja perimetri $\rightarrow$ kehä. Ympyrän ala on siis varmaankin 1/2 säde $\times$ kehä.



Kuva 1: Ympyrän alan ja kehän yhteys.

Tuloksen tulkinta: Kehällä ja alalla "sama vakio" π.

Esim. 1.2 a. Kolmannen asteen yhtälön ratkaisun olemassaolo.

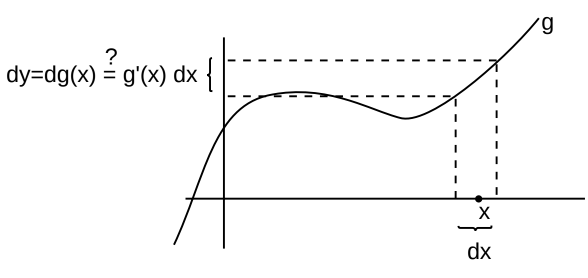
Kolmannen asteen yhtälöllä on ainakin yksi ratkaisu, koska kolmannen asteen polynomi $x^3 + ax^2 + bx + c$ saa tarpeeksi suurella x positiivisen arvon ja tarpeeksi pienellä (siis itseisarvoltaan suurella, mutta negatiivisella) x negatiivisen arvon ja koska sen kuvaaja on jatkuva funktio.

Esim. 1.2 b. Analyysin peruslause. Luennolla esitettiin edellisen yleistyksenä kompleksianalyyttinen todistus, joka perustuu kierroslukuun.

Esim. 1.3. Integraalin muuttujanvaihto. (Ei esitetty vuonna 2005.)

$$\int f(y)\,dy \rightarrow= \int f(g(x))g'(x)\,dx, \quad \text{missä } y = g(x)$$

Tämän kaavan perustelu tulee siitä, että "käyrä yhtyy tangenttiinsa lyhyillä etäisyyksillä"



Kuva 2: Integraalin muuttujanvaihto.

$$d(g(x)) = \frac{dg(x)}{dx}\,dx = g'(x)\,dx$$

Tämä merkintätapa oli joskus maailmassa sisällyksellinen kaava: tangentin kulmakerroin on ”äärettömän pienten erotusten eli differenssien suhde”.

1.2 Heuristiikka eli ongelmanratkaisu.

Tällä kurssilla *heuristiikka* on matemaattisten ongelmien ratkaisutaito, siihen tarvittavien keinojen ja menetelmien tuntemus. Käytännön puheessa toisalta *heuristinen* usein tarkoittaa samaa kuin epätäsmällinen, ainakin matemaattisesa mielessä. Heuristisessa päättelyssä ei (vielä) esitä täsmällistä todistusta. Sanan ”heuristiikka” sukulaisia:

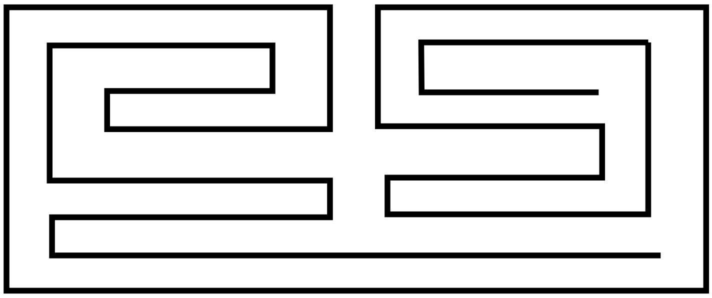
$$\begin{aligned} \epsilon o\rho\iota\sigma\kappa o &= \text{(heurisko)} = \text{keksiä, löytää} \\ \epsilon o\rho\iota\sigma &= \text{(heuris)} = \text{hyvänenäinen, tarkkavainuinen} \\ \epsilon o\rho\iota\kappa\alpha &= \text{(heureka)} = \text{olen keksinyt} \end{aligned}$$

Heureetikko on ratkaisun löytäjä. *Heureema* on heuristinen ratkaisu, ratkaisu syntymistilassa.

$$\text{probleema} \xrightarrow{\text{heuristiikka}} \text{heureema} \xrightarrow{\text{formalismi}} \text{teoreema}$$

Heuristiikkaan on matematiikan historian aikana kiinnitetty huomiota vaihtelevassa määrin. Eukleideen *synteettinen* esitystapa, jossa aksioomista lähtien järjestelmällisesti **edetään** kohti uusia tuloksia, kätkee kokonaan, miten todistukset on keksitty, eli esityönä tehdyn ongelmien *analyysin*. Heureetikot kapinoivat tätä vastaan. Arkhimedeen klassiset julkaisut eivät sisällä mitään vihjeitä siitä, miten tulokset onkeksiitty, muttaa (vuonna 1906 löytyneessä!) teoksessaan 'Menetelmä' hän delittää asian ja erottaa toisistaan heuristiikan ja demonstratiivisen tieteen. Myös Newton tekee tämän eron. *Kepler* puolestan kertoo julkaisuissaan kaikista työnsä välivaiheista. Tiedefilosofi Lakatos (Kurssikirja!) pohtii deduktiivisen tyylin ja formaalin, jopa formalistisen matematiikan olemusta heuristiselta kannalta vuorottelemalla mielenkiintoisella tavalla todistuksia ja vastaesimerkkejä. Syntyykö heureemasta lopultakaan teoreemaa? Onko matematiikka lopulta sittenkään formaalia? Onko tilanne muuttunut Lakatosin ajoista tietokoneiden yleistyessä? (Pohdittavaa: Mikä yleensäkin on koneiden ja heuristiikan yhteys).

Onko ongelmanratkaisuun olemassa yleispäteviä sääntöjä? Onko edes joidenkin ongelmatyyppien ratkaisemiseen olemassa varmoja keinoja? Onko ongelmanratkaisu yleisesti prosessina ulospääsyn etsintää pulmatilanteessa, siis periaatteessa samanlaista kuin selviytyminen labyrintista?



Kuva 3: Labyrintti

Ainakin yhdellä viivalla piirretystä labyrintista pääsee varmasti ulos: käsi seinään ja kävelemään!

Entä yleensä? Vuorenvarmoja keinoja on ainakin etsitty kauan: *Suuren Taidon* etsintä on viehättänyt ihmisiä, etenkin filosofeja ja matemaatikoita. Erityisesti vuorenvarmaa keinoa etsivät Descartes, Leibnitz ja Bolzano:

(1) Descartes: Säännöt, metodin esitys (Ks. esim Klinen mat. historia, sivut 304-316) /it Kartesiolainen menetelmä esitellään tällä kurssilla myöhemmin.
(2) Leibnitz: *Universaalin logiikan* kolme osaa ovat Leibnitzin mukaan:
  - symbolinen kieli
  - logiikka
  - ideoiden yhdistäminen.
(3) Bolzano: 'Wissenschaftslehre' (1837) Tähän palataan lopuksi.

Meitä kiinnostaa ensisijaisesti hieman vaatimattomampi tavoite, *käytännön ohjeet ongelmanratkaisuun.* Hyviä ajatuksia tästä on esittänyt unkarilainen matemaatikko George Polya. Myöhemmät kirjoitukset kommentoivat usein Polyaa, joka on hyvä tuntea siitäkin syystä. Polya esittää yleisen strategian ja taktiikan, johon kuuluvat mm. erinäiset keksimisen apukeinot kuten vertaaminen aikaisempiin vastaavanlaisiin ongelmiin, joko yleisen tai ongelmakohtaisen menetelmän etsintä, ratkaisuprosessin suunnittelu ja työn edistymisen suunnittelu ja seuranta sekä ratkaisun saavuttamisen jälkeiset toimet. Polyan tavoitteena on:

- ratkaisutaidon edistäminen
- ratkaisutaidon opettamisen edistäminen
- minimitavoite: joidenkin muidenkin ongelmaratkaisukeinojen kuin sattumanvaraisen kokeilun tunteminen
- yleistavoite: metodisuus ongelmien ratkaisussa ja joukko keinoja, jotka käyvät kaikkien järkeen
- ideaalitavoite: matemaattisen tiedonhalun lisääminen ja matemaattisen taidon (know-how) lisääminen. Tätä taitoa on kyky
  - ratkaista ongelmia
  - keksiä todistuksia
  - kritisoida perusteluja ja tuloksia
  - soveltaa tuloksia/keksintöjä uusiin ongelmiin
  - käyttää matemaattista kieltä
  - tunnistaa matemaattisia käsitteitä ja rakenteita käytännössä
  - soveltaa matematiikkaa käytäntöön
  - välittää osaamistaan toisille

2. Harppi- ja viivoitingeometrian pikakurssi

Seuraavassa esitetään joitakin alkeisgeomterian perustietoja, joita tarvitaan sisältönä eli materiaalina useissa tämän kurssin esimerkkiprobleemoissa. Muita esimerkkejä tulee lukiossa paremmin käsitellyiltä matematiikan aloilta kuten todennäköisyyslaskennasta.

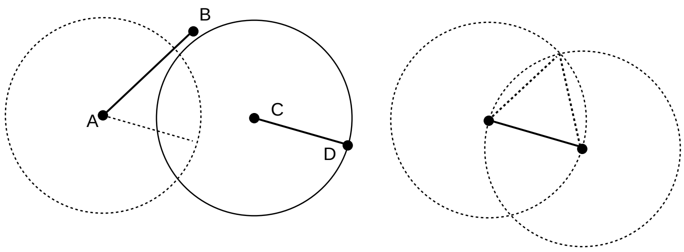
2.1 Konstruktiosäännöt.

Viivaimella saa piirtää **kahden pisteen kautta** suoran. *Harpilla* saa piirtää ympyrän, kun on annettuna **keskipiste** ja **kehäpiste tai säde**. *Säde* on jonkin *janan pituus* eli pisteparin etäisyys toisistaan. *Pisteet* saadaan joko aluksi annettuina tai kahden *uran* eli suoran tai ympyrän leikkauspisteinä. *Pisteiden järjestys suoralla* eli *välissäolo* oletetaan itsestäänselväksi käsitteeksi.

2.2 Konstruktioita ja teoreemoja.

Tehtävä 2.1: Kahden eri janan pituuden vertaaminen.

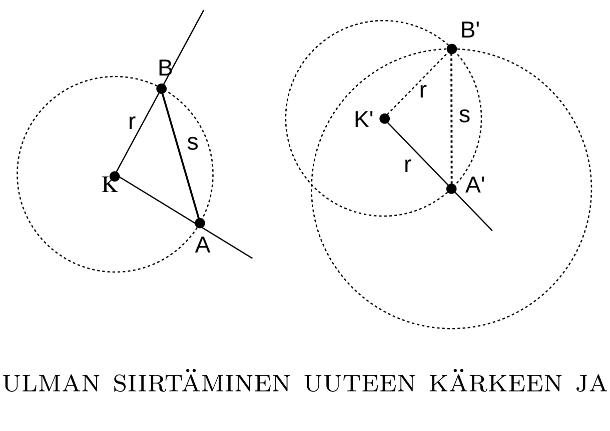
Jos A-keskinen BC-säteinen ympyrä leikkaa janaa AB, niin AB on pitempi kuin CD. Tämän idean avulla voi todeta myös, milloin janat ovat yhtä pitkät ja sitten konstruoida tasasivuisen kolmion tunnetulla tavalla kahdella harpinpyöräytyksellä.



Kuva 4: Pituuksien vertaaminen ja tasasivuinen kolmio.

Tehtävä 2.2: Kulman tai kaaren siirtäminen alkavaksi annetulta janalta.

Kulmat ovat yhtä suuret, kun ne leikkaavat yhtäsuurista ympyröistä yhtä pitkät jänteet.



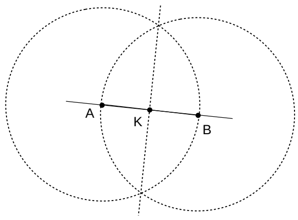
Kuva 5: Kulman siirtäminen uuteen kärkeen ja kylkeen.

Edelliseen konstruktioon perustuu kulmien vertailu, mittaaminen ja erityisesti kulman puolittaminen:

Tehtävä 2.3: Kulman puolittaminen.

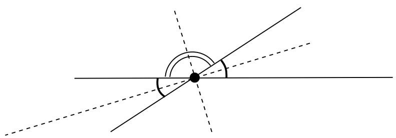
Tunnettu konstruktio.
Seuraus: Puolittamalla *oikokulma* eli 180 astetta saadaan *suora kulma* ja siis *normaali* annetulle suoralle.

Tehtävä 2.4: Janan puolittaminen ja keskinormaali.



Kuva 6: Janan AB keskinormaalin konstruktio.

Lause 2.5: Ristikulmat ovat yhtä suuret ja vieruskulmien summa on 180 astetta.
Lisäksi vieruskulmien puolittajat ovat toistensa normaalit. Todista! (Näinkin voi siis konstruoida suoran kulman.)

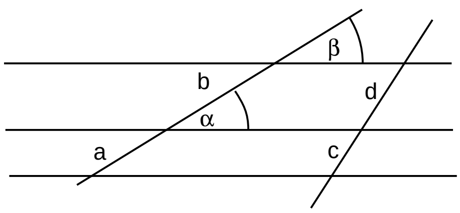


Kuva 7: Ristikulmien puolittajat.

Tehtävä 2.6: Pisteen P kautta on piirrettävä normaali annetulle suoralle s.
Piirrä tarpeeksi suuri P-keskinen ympyrä. Se leikkaa suoraa s kahdessa pisteessä. Näiden keskinormaali kelpaa.

Tehtävä 2.7: (Tärkeä) Pisteen P kautta on piirrettävä *yhdensuuntainen* annetulle suoralle s. Piirrä normaali kuten tehtävässä 6. Piirrä sitten normaali sillekin pisteeseen P. Se kelpaa. (Onko muita? Ei, mutta se ei ole itsestäänselvää. Vai onko?)

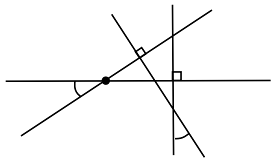
Lause 2.8: (Eukleideen harppu). Kuvion tilanteessa *vuorokulmat* ovat yhtä suuret, $\alpha = \beta$, ja parvi yhdensuuntaisia jakaa kummankin niitä leikkaavan suoran samassa suhteessa, $a : b = c : d$.



Kuva 8: Eukleideen harppu.

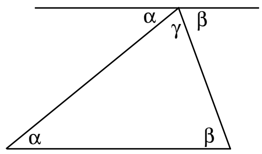
Tehtävä 2.9: Jaa Eukleideen harpun avulla annettu jana annetussa suhteessa, esimerkiksi kolmeen yhtä suureen osaan. (Kulman kolmiajako harpilla ja viivaimella on muuten yleensä mahdotonta.)

Lause 2.10: Kahden suoran normaalit leikkaavat toisensa samassa kulmassa kuin alkuperäiset suorat.



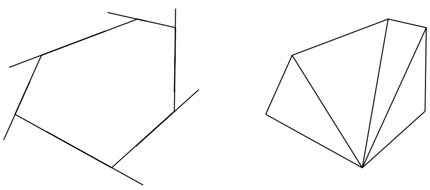
Kuva 9: Normaalien kulma.

Lause 2.11: Kolmion kulmien summa on 180 astetta. Miksi?



Kuva 10: Kolmion kulmasumma.

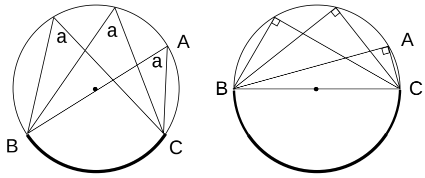
Lause 2.12: n-kulmion kulmien summa on $(n-2)\times 180$ astetta. Miksi? Esitetään kaksi eri perustelua, joista toinen perustuu edelliseen lauseeseen, toinen ulkokulmiin, joiden summa selvästi on 360 astetta!



Kuva 11: Kaksi tapaa laskea n-kulmion kulmasumma.

Lauseet 2.13: Muita tunnettuja lauseita.

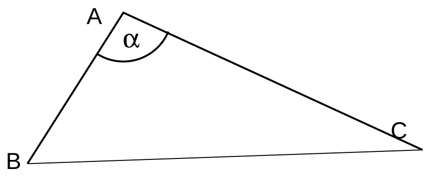
- Kolmio on tasakylkinen, kun sillä on kaksi yhtä suurta kulmaa.
- Ympyrän tangentti on vastaavan säteen normaali.
- Ympyrän sekantti kulkee kokonaan ympyrän sisäpuolella.
- Samaa kaarta vastaavat *kehäkulmat* ovat yhtäsuuret, erityisesti puoliympyrään liittyy suora kulma.



Kuva 12: Kehäkulmat.

Tehtävä 2.14: Piirrä ympyrän ulkopuolisesta pisteestä tangentti ympyrälle. Vihje: Perustuu kahteen edellisistä.

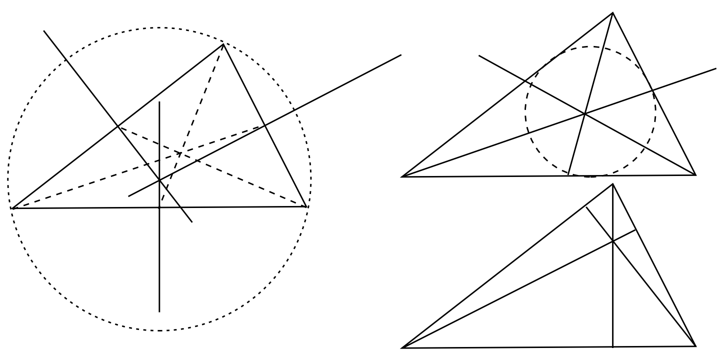
Tehtävät/lauseet 2.15: Yhtenevyyslauseet. Kolmion voi konstruoida, kun tunnetaan sivuista ja kulmista yhteensä kolme — ei kuitenkaan pelkästään kulmia (kolmannenhan voi sitä paitsi laskea kahdesta muusta, joten kolmatta ei voi valita vapaasti eikä sen tietäminen tuo informaatiota.) Tämä lause on muutenkin vielä yhdessä tapauksessa **hiukan väärä.** Missä vika?



Kuva 13: Yhtenevyyslause SKS.

Lauseet 2.16: Lisää tunnettuja lauseita.

- Kolmion alan kaava.
- Pythagoraan lause.
- Yhdenmuotoisuuslauseet.
- Homotetia on yhdenmuotoisuuskuvaus.
- Kolmion keskijanat leikkaavat toisensa "painopisteessä", joka jakaa jokaisen keskijanan suhteessa 1:2



Kuva 14: Kolmion merkillisiä pisteitä.

- Kolmion sivujen keskinormaalit leikkaavat toisensa pisteessä, joka on *"ympäri piirretyn ympyrän"* eli kärkien kautta kulkevan ympyrän keskipiste.
- Kolmion kulmien puolittajat leikkaavat toisensa pisteessä, joka on *"sisään piirretyn ympyrän"* eli kaikkia sivuja sisäpuolelta sivuavan ympyrän keskipiste.
- Kolmion korkeusjanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

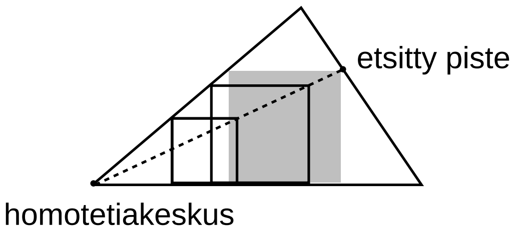
3. Polyan taktiikka

3.1 Jäsentelyperiaatteet. How to Solve it, luku 1. Yhteenveto tästä on myös erikseen jaetussa monisteessa, joka on em. kirjasta.
Lyhyesti sanoen: tarkastellaan ongelmatilannetta, jossa

- jotain kysytään (tuntematon T)
- jotain on annettuna (data A)
- jotkin ehdot sitovat tuntemattoman annettuun (ehdot E)

3.2 Jäsentelyperiaatteet käytännössä: geometrinen alkuesimerkki.
Harjoituksissa ja seuraavissa esimerkeissä tarkastellaan tehtäviä – toisinaan valmiiksi ratkaisujakin – ja analysoidaan niiden asettelusta, mitä on annettu, mitä kysytään ja mitkä ovat ehdot.

ESIMERKKI 3.1: PIIRRÄ KOLMIOON NELIÖ SITEN, ETTÄ KAKSI SEN KÄRJISTÄ OVAT KOLMION YHDELLÄ SIVULLA JA TOISET KAHDELLA MUULLA.
(A)nnettu: kolmio
(T)untematon: neliö
(E)hdot: 2 kärkeä yhdellä sivulla
kärki toisella sivulla
kärki kolmannella sivulla
(R)atkaisumalli (Ei malliratkaisu!!) Homotetiaan perustuva kuvio. Täytetään ehto kerrallaan! (Kolme ehtoa!) Käy ratkaisun vaiheet läpi Polyan tyyliin!



KUVA 15: HOMOTETIA APUNA

3.2 Toinen periaate: Aloita tavoitteesta.
Polyan vanhan kirjan pääsääntö on: Tuijota tavoitetta! Hankaluudet voivat kyllä olla myös aineistossa tai ehdoissa.

(1) Jos (A) on runsas, paloittele aineisto. (Vrt. rahanjakotehtävä harjoitussarjassa 1)
(2) Jos (T) on laaja, aseta välitavoitteita ja pyri elimininoimaan turhia osia.
(3) Jos (E) on mutkikas, jäsentele ehto osaehtoihin ja ota ne käyttöön yksi kerrallaan. (Äskeisen harjoituksen teema.)

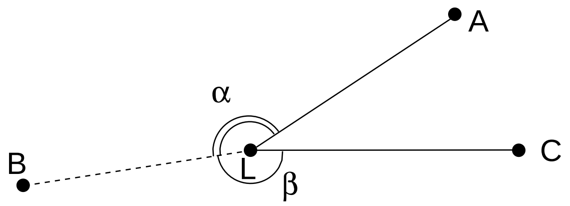
Edellisiä seikkoja miettiessä on hyvä ajatella aluksi, mistä joukosta *kohdejoukosta* $\mathcal{T}$ ("search space") ratkaisua haetaan. Esimerkiksi harjoitussarjan 1 tehtävissä kohdeavarudet ovat noppakasojen, algoritmien, mahdollisten shakkipelinjatkojen ja luonnollisten lukujen jonojen joukko. *Ratkaisujoukoksi* sanotaan todellisten, siis ehdot toteuttavien ratkaisujen joukkoa $\mathcal{R} = \{T \in \mathcal{T} \mid T \text{ toteuttaa ehdot } E\}$. Tietysti $\mathcal{R}$ voi ola tyhjäkin. Eräs tehtävän vaikeuden mitta on todennäköisyys, että umpimähkäinen kohdejoukon alkio on ratkaisu, siis (äärellisessä klassisessa tapauksessa)

$$\frac{\#\text{r}atkaisujoukko}{\#\text{k}ohdejoukko} = \frac{\#\mathcal{R}}{\#\mathcal{T}}.$$

4. Kahden uran menetelmä

4.1. Kaksi esimerkkiä. Seuraavassa vaaditaan harppi- ja viivoitinkonstruktioita. Periaatteessa kahden (tai useamman) uran menetelmä yleistyy muuhunkin ongelmanratkaisuun: Kunkin ehdon toteuttavien kohdejoukon alkioiden joukkoa voi nimittäin pitää ao. ehdon määräämänä ”urana”.

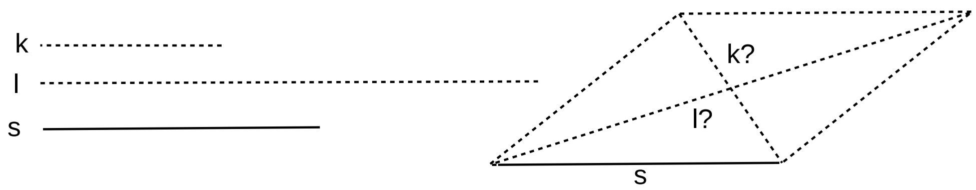
Esimerkki 4.1: Majakkatehtävä. (a) Laivasta näkyy 3 majakkaa. Mitataan kulmat. Verrataan kartalle. Missä laiva on? (Kompassi on rikki.)



Kuva 16: Majakkaongelman ratkaisuidea.

(A) 3 pistettä, A, B, C ja kulmaa, α, β ja γ (2 riittää, onhan $\gamma = 360 - \alpha - \beta$.)
(T) yksi piste L
(E) kulmat: $\measuredangle ALB = \alpha, \measuredangle BLC = \beta$ (2 ehtoa. Luvassa 2 **uraa**.)
(R)atkaisu: Kaksi uraa! Ensimmäinen on tietenkin $\{L \mid \measuredangle ALB = \alpha\}$ ja toinen on $\{L \mid \measuredangle BLC = \beta\}$. Toteutus edellyttää tietoa: kumpikin ura on kehäkulmalauseen nojalla ympyrän kaari. Keskipisteen ja säteen konstruointi jää harjoitustehtäväksi.

Esimerkki 4.2: Piirrä suunnikas, kun tiedät yhden sivun ja molemmat lävistäjät.
(A) 3 janaa, s, l ja k
(T) suunnikas $ABCD$
(E) $|AB| = |s|$, $|BC| = |l|$, $|AB| = k$. (3 ehtoa!)
(R)atkaisu: Valitaan sivuksi AB jana s itse. Se onkin valmiiksi piirrettynä.



Kuva 17: Suunnikasongelma.

Idea: Muistetaan, että lävistäjät puolittavat toisensa. Etsitään ensin **keskipiste** K. Se löytyykin kahden uran periaatteella helposti ; $|BK| = |l|/2$ ja $|AK| = |k|/2$. **Ongelma on palautunut** tunnettuun SSS-konstruktioon.

4.2. Esimerkistä malliksi. Edellisiä ratkaisuja tarkastellessa huomaa, että niitä keksiessä on ehkä noudatettu seuraavia neuvoja:

a) Palauta tehtävä(n osa) yhden pisteen löytämiseksi
b) Jaa ehto kahdeksi osaksi, joista kumpikin antaa yhden uran etsittävälle pisteelle. (Alkeisgeometriassa ura on ympyrä tai suora).

Näissä vaiheissa saattaa olla hyötyä seuraavista apukeinoista, joita voi yrittää soveltaa tietoisesti:

(1) Muistatko samanlaisen?
(2) Toiveajattelu apukeinona: Lopusta alkuun
(3) Yhdenmukaisuuden käyttö: Mittakaavan unohtaminen
(4) Ongelman muuntaminen toiseksi, ehkä helpommaksi. Ääritapaukset, symmetriset erikoistapaukset yms.
(5) Apukuvion ja -laskelman käyttö ongelman muuntamiseksi

Seuraavissa tehtävissä on esimerkkejä näistä menettelyistä

TEHTÄVÄ 4.3 "MUISTATKO SAMANLAISEN". Piirrä kahta yhdensuuntaista suoraa sivuava ympyrä, joka kulkee niiden välissä olevan pisteen kautta.

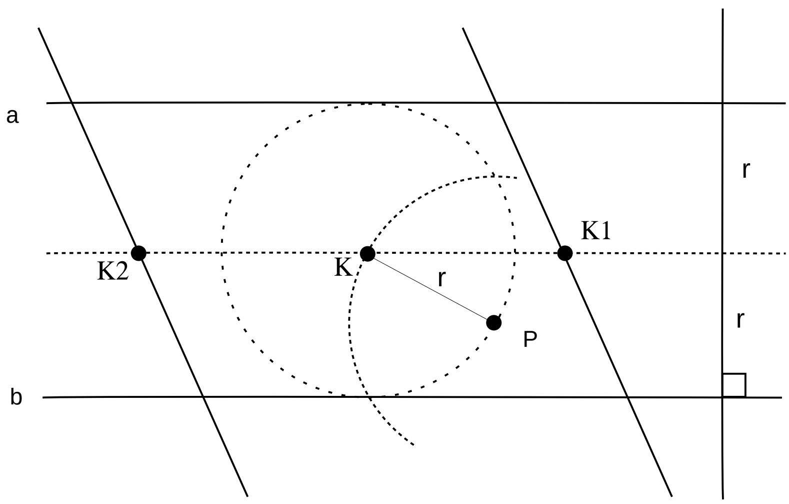
(A) Yhdensuuntaiset a ja b. Piste P.
(T) Ympyrä (Riittää: Keskipiste K)
(E) K:n etäisyydet annetuista samat (2 ehtoa; luvassa 2 uraa?)
Ehdon tulkinta:

(E-1) : $|Ka| = |Kb|$
(E-2) : $|KP| = |Ka|$,

(Vai ehkä (E-3): $|KP| = |Kb|$??)

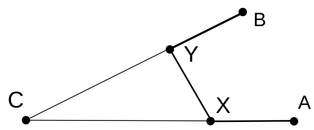
(E-1) antaa keskipisteelle uraksi yhdensuuntaisten puolivälissä olevan yhdensuuntaisen c. (E-2) (ja (E-3)) antaisivat uraksi parabelin. Ei käy!

Mutta nyt huomataan: **sädehän tunnetaan nyt**, onhan r puolet a:n ja b:n etäisyydestä. Toinen ura on siis P-keskinen r-säteinen ympyrä.



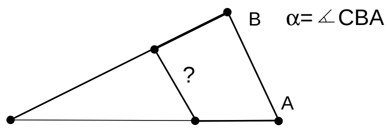
KUVA 18: SIVUAMISONGELMAN RATKAISU.

4.3 "Toiveajattelu apukeinona, lopusta alkuun". Annettu kulma, sen kärki O ja eri kyljiltä pisteet A ja B. Etsittävä kyljiltä pisteet X ja Y siten, että $|AX| = |XY| = |YB|$.



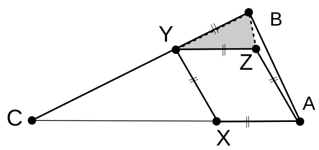
Kuva 19: Kulmaongelman tavoite.

(A),(T), (E) selvät.
(R) Älä lue, vaan YRITÄ ITSE
Kirjassa (Discovery) on pitkä selostus tästä.
Yritetään ensin tehdä, mitä osataan: jana AB.



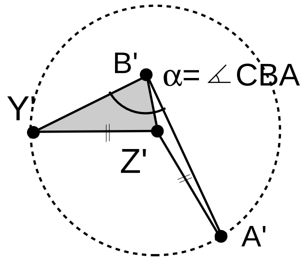
Kuva 20: Kulmaongelma. Vaihe 1.

Toiveena on valmis tavoitteen mukainen kuva



Kuva 21: Kulmaongelma. Vaihe 2.

Sitä voi vähän täydennellä. Päätellään takaperin tavoitteesta: Mikä riittäisi ratkaisun saavuttamiseen? Suunnikas – itse asiassa vinoneliö – näyttää hyvältä, varsinkin, kun samalla syntyy tasakylkinen kolmio BYZ. Saisikohan tämän piirrettyä oletuksista? Suunnikas ei löydy vielä, mutta varjostetun kolmion muoto onnistuu, ovathan sen kyljet alkuperäisten suuntaiset, joten kaikki kulmat "tunnetaan". Luovutaan yrittämästä oikeaa mittakaavaa ja piirretään apukuvioksi erikseen edes varjostetun kanssa yhdenmuotoinen kolmio $B'Y'Z'$. Täydennetään tämä tavoitteen mukaiseksi — joskin vääränkokoiseksi — kuvioksi. Pitää siis keksiä, miten piirretään tähän puuttuva suunnikas. Puuttuva piste A' löytyy ilmeisesti kahden uran menetelmällä: Kulma $\measuredangle CBA$ antaa suoran ja etäisyys $|ZY| = |ZA|$ ympyrän.



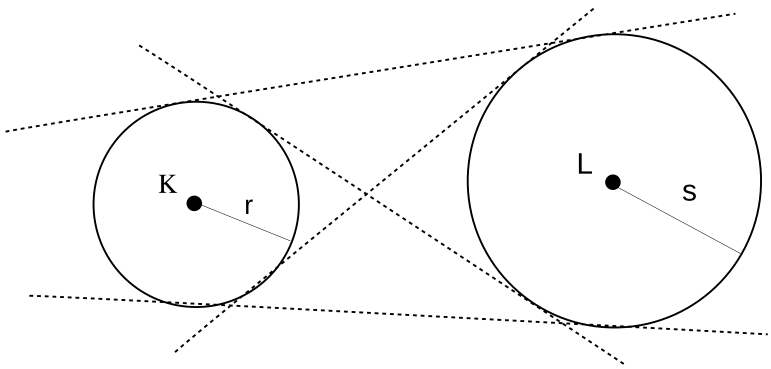
Kuva 22: Kulmaongelma. Vaihe 3.

Lopuksi kuva on vain suurennettava alkuperäiseen kokoon. Tähän auttaa tunnetusti homotetian käyttö.

1.5 "Yhdenmukaisuuden käyttö, mittakaavan unohtaminen". Emme nyt esitä uutta esimerkkiä, vaan tarkastelemme aikaisempia, sillä tätä keinoa juuri äsken jo käytettiin. Vielä aikaisemmin oli esimerkki, jossa yhdenmuotoisuus saatiin — kuten usein — homotetiasta. Esimerkki oli numero 3.1, jossa piti sijoittaa neliö kolmioon.

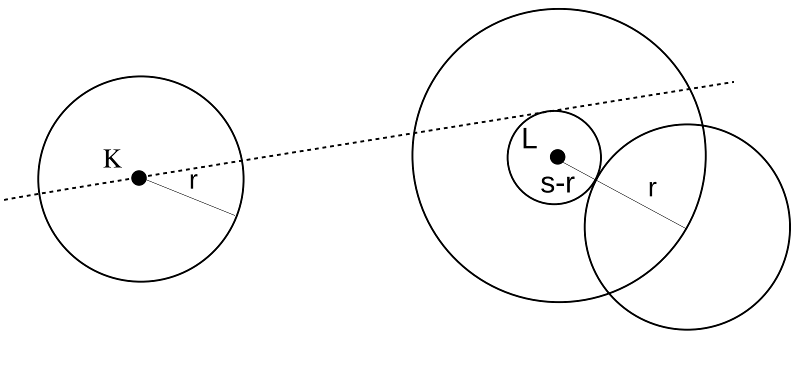
1.6 "Ongelman muuntaminen toiseksi". Konstruoi kahden ympyrän yhteiset tangentit.

(A) Kaksi ympyrää, so. keskipisteet K ja L ja säteet r ja s.
(T) Suora
(E) Sivuaa molempia (2 ehtoa!)



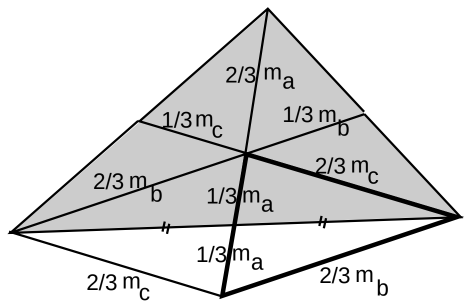
Kuva 23: Tangenttiongelman tavoite.

(R) Mieti erikoistapauksia: Aluksi vaikka yhtä suuret ympyrät. (Helppo! Mutta ei auttane.) Sitten toisen säde voisi olla suorastaan nolla: Osaathan piirtää tangentit pisteestä ympyrälle (Tehtävä oli geometrialuvussa!). Voisiko ongelman ratkaista samalla tavalla tai palauttaa tähän? Jälkimmäinen strategia onnistuu:



Kuva 24: Tangenttiongelman ratkaisu.

1.7 "Apukuvion ja -laskelman käyttö". Konstruoi kolmio, kun on annettu mediaanit. Tässä taas on iloa siitä, että muistaa mediaanien jakavan toisensa suhteessa 1:2. Tämä antaa aiheen piirrellä apukuvioita, esimerkiksi



Kuva 25: Keskijanaongelman ratkaisu.

ja tässä on pienen laskelman perusteella kolmio, jonka sivut tunnetaan. Miksi?

Heuristiikan historiaa

Heuristiikka hellenismin kaudella.

• Alojen rinnakkain asettelu (parabole ton khorion, harppi- ja viivainratkaisuja toisen asteen yhtälöille)

• Pintojen ja kappaleiden viipalointi ”ärettömän ohuisiin” siivuihin (ensimmäisiä käyttäjiä Demokritos: pyramidien ja kartioiden tilavuudet)

• Käyrien ja pintojen approksimointi murtoviivoilla ja monitahokkailla (Khioksen Hippokrates ja sofisti Antifon: ympyröiden vertaaminen vertaamalla sisäänpiirrettyjä säännöllisiä monikulmioita.

• Mekaniikan käyttö (janat homogeenisina tankoina jne. , ensimmäisiä käyttäjiä Arkhytas ja Eudoksos; Arkhimedes yhdisti 'Menetelmässään' viipaloinnin ja punnituksen)

• Analyysin menetelmä. Pappoksen mukaan Analyysi *lähtee siitä mitä etsitään, ikäänkuin se olisi annettu, ja etenee sen peräkkäisten seurausten kautta johnkin, joka on annettu synteesin tuloksena; sillä analyysissä me oletamme sen mitä etsitään ikäänkuin tehdyksi ja kysymme, mistä se seuraa ja mikä on sitä edeltävä syy jne., kunnes taaksepäin kukien tulemme johonkin tunnettuun tai sellaiseen, mikä kuuluu ensimmäisiin prinsiippeihin; tällaista menetelmää me kutsumme analyysiksi eli taaksepäin ratkaisemiseksi. Mutta* synteesissä *me käännämme prosessin ja oletamme tehdyksi sen, mihin viimeksi päädyimme analyysissä, ja järjestämällä luonnolliseen järjestykseen seurauksiksi ne mitkä ennen olivat edeltäviä syitä ja liittämällä ne toinen toiseensa me lopulta päädymme sen konstruktioon, jota etsimme; tätä me kutsumme synteesiksi.*

Miksi kreikkalaisen geometrian kehitys pysähtyi pian Arkhimedeen jälkeen.

Eräs näkökohta: *Matematiikassa ei voida vahingoitta antaa keksimisen ja todistamisen etääntyä toisistaan. Suopeina aikoina matemaatikon riittää kirjata ideansa jokseenkin sellaisina kuin hän ne käsittää, ilman että se merkitsisi tinkimistä tarkkuuden vaatimuksista; toisinaan hän voi saavuttaa ajattelun ja ilmaisun sopusoinnun hyväksytyn kielen ja merkintöjen onnistuneella muutoksella. Mutta usein hänellä on vain kaksi vaihtoehtoa: epäkelpo mutta hedelmällinen esitystapa tai kelvollinen mutta hänen ajattelutavalleen väkivaltaa tekevä esitystapa, johon hän kykenee mukautumaan vain suurin ponnistuksin. Kreikkalaiset noudattivat jälkimmäistä tapaa, ja ehkä siitä pikemmin kuin roomalaisvalloituksen lamauttavasta vaikutuksesta* *on etsittävä syytä heidän matematiikkansa yllättävään pysähtymiseen pian loistavan kukoistuksen jälkeen. On arveltu, eikä aiheetta, että* ARKHIMEDEEN *ja* APOLLONIOKSEN *seuraajien suullisiin opetuksiin on voinut sisältyä uusia tuloksia, jotka ovat jääneet kirjaamatta vain siksi, että niiden* julkaiseminen hyväksytyn kaanonin mukaisesti olisi vaatinut keksijöiltä kohtuuttomia ponnistuksia. *Tämänkaltaiset estot eivät pidätäneet 17. vuosisadan matemaatikkoja, kun he lukuisien uusien ongelmien pakottamina lukivat ahkerasti Arkhimedeen kirjoituksia ja etsivät keinoja päästä niistä eteenpäin.* (Bourbaki, m.t., ss. 220 - 221)

Heuristiikan läpimurto uuden ajan alussa. NICOLAUS CUSANUS (1401-1469): Jos kerran ympyrä on monisivuisin säännöllinen monikulmio, niin sen ala on voitava laskea kuten minkä tahansa säännöllisen monikulmion ala kaavalla ”ala on puolet apoteeman ja perimetrin tulosta”, siis ympyrän ala on puolet säteen ja kehän pituuden tulosta. Cusanus todisti kuitenkin tuloksen vielä epäsuorasti kreikkalaisten tapaan. STEVIN, KEPLER ja muutamat muut 1500-luvun matemaatikot **eivät nähneet enää ekshaustiotodistusta tarpeelliseksi** vaan hyväksyivät rajallemenon.

Käännekohta: Arkhimedeen teosten painatus vuonna 1544. *Pian tämän jälkeen Kepler ja muut tekivät lukuisia yrityksiä korvata Arkhimedeen melkein pitkästyttävän tarkat todistukset uusilla menetelmillä, jotka olisivat yhtäpitäviä aikaisempien kanssa mutta jotka olisivat niitä yksinkertaisempia ja helpompia soveltaa uusiin ongelmiin.* Juuri tämä korvikkeiden etsintä, *skolastikkojen spekulaatioiden auttamana,* oli seuraavalla vuosisadalla johtava analyysin (ts. differentiaali- jaintegraalilaskennan) menetelmien kehittymiseen. (Boyer, m.t., s. 95)

Tyypillinen mielipide 1600-luvulta: *Eksperttien luottamuksen saavuttamiseksi ei ole suurta väliä sillä, esitämmekö heille pitävän todistuksen vai sellaisen perustelun, jonka nähtyään he eivät epäile etteikö täydellistä todistusta voitaisi esittää. Olen halukas myöntämään, että todistus tulisi esittää selkeästi, elegantisti ja oivaltavasti siihen tapaan kuin Arkhimedes on tehnyt töissään. Mutta päällimmäinen ja tärkein seikka on sittenkin keksimisen tapa, jonka selville saamisesta kaikki oppineet ilahtuvat. Näyttää siis siltä, että meidän on viisainta seurata sitä menetelmää, jolla keksimisen tapa voidaan tehdä ymmärrettäväksi ja selvittää sitä menetelmää, jolla keksimisen tapa voidaan tehdä ymmärrettäväksi ja esittää suppeimmin ja selkeimmin. Niin me säästämme itseltämme kirjoittamisen vaivaa ja toisilta lukemisen vaivaa — niiltä toisilta nimittäin, joilla ei ole aikaa perehtyä siihen valtavaan geometristen keksintöjen määrään, joka kasvaa päivä päivältä ja joka tänä oppineisuuden vuosisatana näyttää ylittäneen kaikki rajat, jos meidän on käytettävä kreikkalaisten turhan tarkkaa ja täydellistä menetelmää.* (CHRISTIAAN HUYGENS, lainattu Struikilta, m.t. s. 189)

René Descartes (1596-1650). Descartesin ainoa matemaattinen teos on 'Geometria', joka ilmestyi 'Metodin esityksen' (1637) ensimmäisenä liitteenä; teoksen kaksi muuta liitettä olivat 'Dioptriikka' (mm. oikea taittumislaki) ja 'Meteorit' (maailmankaikkeuden pyörreteoria). Descartesin merkitys matematiikan kehitykselle oli enemmän algebrallisen tarkastelutavan tuomisessa geometriaan, metodisen ajattelun korostamisessa ja geometrian asettamisessa metodiseksi ihanteeksi kuin joissakin uusissa tuloksissa. Heuristiikan kannalta kiintoisa teos on 'Säännöt' (kirjoitettu 1623, julkaistu postuumisti 1701.)

Poimintoja Descartesin teoksista. *Minua miellytti erityisesti matematiikka sen perusteiden varmuuden ja selvyyden takia, mutta en vielä havainnut siitä koituvaa todellista hyötyä. Ajattelin sen palvelevan vain mekaanisia taitoja ja ihmettelin ettei niin varnalle ja vankalle perustalle ollut rakennettu mitään suurempaa.* ('Metodin esitys', suom. kokoelmassa 'Teoksia ja kirjeitä', WSOY 1956, s. 13)

Kun nämä ajatukset aritmetiikan ja geometrian erityiskysymyksistä olivat johtaneet minut pohtimaan matematiikkaa yleisemmin, kysyin ensimmäiseksi, mitä tällä nimityksellä oikein ymmärrettiin ja miksi ei vain mainittuja tieteenaloja vaan myös astronomiaa, musiikkia, optiikkaa, mekaniikkaa ja erinäisiä muita kutsuttiin matematiikan haaroiksi. Tässä ei riitä viitata sanan alkuperään; sillä kun sana mathesis *tarkoittaa oppia yleensä, voitaisiin mitä tahansa tiedettä nimittää matematiikaksi siinä kluin geometriaakin (...) Asiaa tarkemmin mietittyäni minulle kävi selväksi, että vain kaikki se mikä tutkii* järjestystä *ja* mittaa *kuuluu matematiikkaan, siitä riippumatta etsitääni mittaa luvuista, kuvioista, tähdistä, äänistä tai muista kohteista, ja että sen mukaisesti täytyisi olla olemassa jokin yleistiede, joka selvittelisi kaikkea sitä, mikä kuuluu järjestystä ja mittaa koskeviin ongelmiin olematta silti suunnattu mihinkään erityiseen kohteeseen, ja että sille tieteelle olisi jo nimikin valmiina, nimittäin* mathesis universalis (Sananmukaisesti: yleinen oppiaine)*, sillä perusteella, että se käsittäisi juuri sen minkä vuoksi toisia tieteitä sanotaan matematiikan haaroiksi.* ('Regulae at directionem ingenii', julk 1701, nejännen säännön liitteestä) Vrt. 'Teoksia ja kirjeitä', ss 23 - 24.

Olen päättänyt jättää vain abstraktin geometrian, se on sellaisten kysymysten pohtimisen jotka palvelevat vain hengen harjoitusta, ja tämän voidakseni tutkia toisenlaista geometriaa, jonka kohteena on luonnon ilmiöiden selittäminen. (Lähde tuntematon, lainattu Klinelta, m.t. s 303)

Vrt. Pascalin hyvästijättöön abstrakteille tieteille (*Olin käyttänyt paljon aikaa abstraktien tieteiden tutkimiseen ...* 'Mietteitä', WSOY 1952, s 78) ja Pascalin kirjeeseen Fermat'lle 10.8.1660: *Sillä puhuakseni Teille vilpittömästi geometriasta, pidän sitä korkeimpana hengen harjoituksena; mutta samalla minä tiedän sen niin hyödyttömäksi, että en tee suurtakaan eroa pelkän matemaatikon ja pystyvän käsityöläisen välillä. Sanon sitä myös kauneimmaksi ammatiksi maailmassa, mutta lopulta se on vain ammatti; ja olen usein sanonut, että siihen on hyvä kokeilla voimiaan, mutta että siihen ei pidä voimiaan tuhlata — niin että en ottaisi kahta askelta geometrian takia, ja olen vakuuttunut, että Te olette kanssani samaa mieltä.*

Myös Descartes on verrannut matematiikkaa käsityötaitoihin rinnastaessaan aritmetiikan ja "lukujen kombinoinnin" niihin *taitoihin, (...), joissa järjestys on hallitseva piirre, niin kuin se on kankaan- tai matonkutojien ja brodeeraajien tai pitsinnypläyksen taidoissa.* (Bourbakin mukaan, m.t., s.35)

Analyyttinen geometria. Nimitys on syytä ottaa tarkasti: analyyttisyys viittasi aluksi kreikkalaisten analyysin ja synteesin käsitteisiin ja koordinaattigeometria esitettiin tässä mielessä analyyttisenä keinona geometristen ongelmien ratkaisemiseksi. Tarvittava algebrallinen symbolismi kehittyi arabialaisten ja italialaisten algebrikkojen ja lopulta FRANÇOIS VIÉTEN (1540-1603) ja hänen seuraajiensa toimesta. Teoksessa 'In artem analyticem isagoge' (1591 Viéte referoi PAPPOKSEN metodisia tekstejä, merkitsee tunnettuja ja tuntemattomia suureita kirjaimin, mutta erottaa numeeriset kertoimet geometrisista suureista. Nykyinen symbolismi on suurelta osin peräisin Descartesilta. Koordinaatteja (pituus- ja leveyspiirejä) oli kartografiassa käytetty jo Ptolemaioksesta alkaen, mutta koordinaattigeometrian perustaina on pidettävä DESCARTESIA ('La géométrie' 1643) ja FERMAT'TA ('Ad locos planos et solidos isagoge', n. 1637, julk. 1679). Descartesin geometria oli kaksiulotteista, Fermat hahmotteli (eräässä kirjeessä 1643) myös kolmiulotteista koordinaattigeometriaa.

Descartes: *Jos sitten haluamme ratkaista jonkin probleeman, oletamme sen ensin ratkaistuksi ja annamme nimet kaikille viivoille, jotka näyttävät konstruktiossa tarpeellisilta — niin tuntemattomille kuin tunnetuille. Sitten, tekemättä eroa tunnettujen ja tuntemattomien viivojen välillä, meidän on selvitettävä ongelma millä tahansa tavalla, joka luonnollisimmin paljastaa näiden viivojen väliset relaatiot,* **kunnes huomaamme voivamme lausua yhden suureen kahdella tavalla.** *Näin muodostuu se mitä sanomme yhtälöksi, siksi että toisen lausekkeen termit ovat yhtäsuuria toisen termien kanssa. Ja me etsimme yhtä monta yhtälöä kuin on tuntemattomia; mutta jos kaiken asiaan kuuluvan läpi käytyämme emme voi löytää niin monta yhtälöä, on ilmeistä, että kysymys ei ole täysin yksikäsitteinen. Siinä tapauksessa voimme mielivaltaisesti valita jonkin pituisen viivan jokaiseksi tuntemattomaksi, jolle ei ole yhtälöä." ('Geometrian' I kirjasta, lainattu Struikilta, m.t. s. 152)*

Blaise Pascal (1623-1662).

Matemaattisia kirjoituksia:

- *'Essee kartioleikkauksista' (1640, ns. Pascalin lause → projektiivinen geometria).*
- *Kirjeenvaihto* PIERRE DE FERMAT'N *kanssa kahdesta chevalier* DE MÉRÉN *ongelmasta (1654, → todennäköisyyslaskenta).*
- *'Tutkielma aritmeettisesta kolmiosta' (1654, ns. Pascalin kolmion generaattori numeerisena indivisiibelinä, kolmion luvut (a) kuviolukuina, (b) kombinatorisina lukuina, (c) binomikertoimina. Sovelluksena mm. de Mérén toisen ongelman ratkaisu).*
- *Dettonvillen kirjeet (1658-59, tutkielmia ruletista eli sykloidista ja ympyräneljänneksen sinistä: karakteristisen kolmion käyttö, osittaisintegrointi geometrisesti, lähellä analyysin peruslausetta → Leibnitz).*

Poimintoja Pascalin teksteistä. *"Yhtä ja samaa asiaa voi käsitellä lukemattomilla eri tavoilla: tässä siitä esimerkki, ja minulle niin kunniakas. Sama lause, jota tässä olen pyöritellyt moneen suuntaan, on välähtänyt myös kuulun touloselaisen neuvonantajamme, M. de Fermat'n mieleen, ja mikä ihastuttavaa, antamalla minulle asiasta pienintäkään vihjettä, hän pani maaseudulla paperille sen minkä minä keksin Pariisissa, tarkalleen samaan aikaan, niin kuin ristiin menneet kirjeemme todistavat (...)*

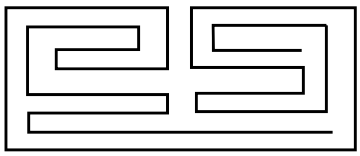
En viivy enempää tässä niin soveliaassa tavassa käsitellä asioita, vaan jätän kunkin omaan valtaan harjoittaa neroaan näissä tutkimuksissa, joista geometrikon työn on rakennuttava: sillä jos ei osaa pyöritellä lauseita joka suuntaan ja jos pysähtyy ensimmäiseen näkökulmaan, jolta asioita katsoi, ei koskaan pääse kovin pitkälle: juuri erilaiset polut ne johtavat uusiin seurauksiin ja liittävät erilaisten formulointien kautta toisiinsa lauseita, joilla ei alkuperäisessä muodossaan näytä olevan mitään tekemistä toistensa kanssa " ('Traité des ordres numériques', 1654).

"Totuuden harrastamisessa voi itselleen asettaa kolme päätavoitetta: sen löytämisen, kun sitä etsii; sen todistamisen, kun se on tiedossa; ja sen erottamisen väärästä, kun sitä tutkii.

En puutu lainkaan ensimmäiseen: tarkastelen erityisesti toista, ja kolmas sisältyy siihen. Sillä, jos menetelmä totuuden todistamiseksi taidetaan, osataan se myös erottaa väärästä, sillä samalla kun tarkastetaan onko annettu todistus sopusoinnussa tiettyjen sääntöjen kanssa, tulee selvitetyksi onko se tarkalleenn todistettu.

Geometria, joka on ylittämätön näissä kolmessa lajissa, on selvittänyt tuntemattomien totuuksien löytämisen taidon; sitä se kutsuu analyysiksi (...) Taito todistaa löydetyt totuudet ja kirkastaa ne niin, että todistus olisi vastaansanomaton, se on kaikki mitä haluan esittää, ja sitä varten minun ei tarvitse kuin selittää se menetelmä, jota geometria tässä asiassa noudattaa, sillä se opettaa sen täydellisesti, vaikka ei sitä suoranaisesti esitäkään. Ja koska tämä taito koostuu kahdesta pääasiasta, toisaalta jokaisen lauseen todistamiesta erikseen ja toisaalta lauseiden järjestämisestä parhaalla tavalla, jaan esitykseni kahteen osaan, joista ensimmäinen käsittää geometrisen, siis metodisen ja täydellisen todistuksen säännöt ja toinen geometrisen, siis metodisen ja viimeistellyn järjestyksen säännöt. Nämä kaksi asiaa yhdessä sisältävät kaiken mikä on tarpeen argumentoinnin suorittamiseksi totuuksien todistamisessa ja erottamisessa, ja ne minä aion täydellisesti esittää." (Alkusanat tutkielmaan 'Geometrisesta hengestä', joka lienee aiottu esipuhe Pascalin toimittamaan geometrian alkeiskirjaan)

Kertaus

1. Heuristiikka. *Mitä on ratkaisun etsiminen? Eikö se ole ulospääsyn etsimistä pulmatilanteesta, jonkinlaisesta kysymysten ja vastausten sokkelosta? Kynää nostamatta piirretystä sokkelosta*  *pääsee varmasti ulos kättä seinästä irrottamatta lähtemällä vain seuraamaan jotakin seinää johnkin suuntaan. Useammalla viivalla piirretyissä sokkeloissa tarvitaan avuksi muutakin, ehkäpä jopa* Ariadnen *lanka, jolla merkitään paluureitti sisään tullessa.*

Onko ongelmanratkaisemiseen olemassa vastaavanlaista reseptiä kuin yksinkertaiselle sokkelolle? Tähän kysymykseen ovat Suuren Taidon tai Menetelmän etsijät, alkemisteista nykyisiin tekoälyn tutkijoihin, hakeneet vastausta. Mitään viisasten kiveä ei heuristiikka eli ratkaisukeinojen ja -menetelmien tutkimus voi osoittaa. Niin kuin "käsi seinään"- sääntö johtaa ulos vain tietynlaisista sokkeloista, niin myös yleisimmät ratkaisumallit soveltuvat vain tiettyihin tilanteisiin. Ariadnen lankakeräkään ei auta sokkelosta ulos ilman nokkeluutta sen käytössä.

Heuristiikka on vahvasti kokemusperäinen tieteenalku. Sen opettama ratkaisutaito on vielä kaukana kaikkivoivasta Suuresta Taidosta, mutta se voi kuitenkin opettaa muitakin keksimisen keinoja kuin kylpyammeeseen tai omenapuun varjoon istumisen.

2. Polyan menetelmä. *hyvä tapa käydä ongelmaan käsiksi on jäsentää se (A) annettuun aineistoon, (T) tavoitteseen ja (E) ehtoihin, jotka sitovat tavoitteen aineistoon. Tämä jäsentely on syytä kirjoittaa selkeästi paperille jo sen tarkastami-*

seksi, että koko aineisto ja kaikki ehdot ovat mukana. Ratkaisuidean etsimiselle tarjoutuu silloin kolme lähtökohtaa:

- **aineiston** *ottaminen mukaan vähitellen*
- **tavoitteen** *yksinkertaistaminen asettamalla välitavoitteita*
- **ehtojen** *ottaminen huomioon yksi kerrallaan*

Ongelman muuntelu tältä pohjalta saattaa johta heureemaan, ratkaisuideaan, josta ehkä tarkastusten jälkeen kiteytyy teoreema todistuksineen.

3. Ongelman muuntelu. *Seuraavassa $\mathcal{T}$ tarkoittaa kohdejoukkoa ja $\mathcal{R}$ ratkaisujoukkoa $\mathcal{R} = \{x \in \mathcal{T} \mid x$ toteuttaa ehdon $E\}$. Jos ehdon E osat $E_1, E_2 \ldots$ ja E_k ovat sellaisia, että osaratkaisut $\mathcal{R}_i = \{x \in \mathcal{T} \mid x$ toteuttaa ehdon $E_i\}$ ovat tavoitettavissa sallituin ja hallituin keinoin, niin on hyötyä siitä tiedosta, että ratkaisu $\mathcal{R}$ saadaan joukko-opillisena leikkauksena $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{R}_k$. Geometriassa osaratkaisuilla $\mathcal{R}_i$ on usein "uran " merkitys.*

Joskus riittää yhden osaehdon, sanokaamme E_k:n, unohtaminen hetkeksi. Osaratkaisu $R'_k = \{x \in \mathcal{T} \mid x$ toteuttaa ehdot $E_1 \ldots E_{k-1}\}$ saattaa koostua esimerkiksi homoteettisista kuvioista, jolloin ratkaisu saattaa löytyä viimeisen ehdon määräämällä homoteettisella kuvauksella (homotetiamenetelmä). Homoteettisen rakenteen sijalla saattaa tietysti olla jokin muu selväpiirteinen struktuuri, esimerkiksi voi jäljellä olla enää pieni äärellinen määrä vaihtoehtoja.

Jos tavoite on monimutkainen, on syytä asettaa yksinkertaisempia (tutumpia) välitavoitteita ja käyttää niitä apupiirroksina tai muunlaisina askelina kohti täydellistä ratkaisua. Aineiston tai tavoitteiden yksinkertaistaminen saattaa tapahtua myös lisäämällä niihin jotakin (apupiirrokset, apumuuttujat, aputuntemattomat jne. Myös erikoistapaukset voi tulkita näin: On lisätty ehtoja!)

4. Kartesiolainen menetelmä. *keskeneräiseksi jääneessä teoksessaan 'Regulae' Descartes esitti 21 sääntöä keksimiskyvyn käyttämiseksi. Hänen kuvailemansa menetelmä oli kolmivaiheinen: ensin ongelmat matematisoidaan, sitten matemaattiset ongelmat algebrallisoidaan ja lopuksi algebralliset ongelmat pelkistetään yhden yhtälön ratkaisemiseen. Yhtälöiden asettaminen tapahtuu pitämällä ongelmaa ratkaistuna ja käsittelemällä tuntemattomia suureita tunnettujen tapaan.*

'Metodin esityksessä' (1637) säännöt ovat vähentyneet neljään:

(1) *Ensimmäinen sääntö on se, etten koskaan katsoisi todeksi mitään, minkä en ilmeisesti tietäisi totta olevan:; toisin sanoen, että karttaisin huolellisesti hätäilyä ja ennakkokäsityksiä enkä sisällyttäisi arvostelmiin mitään muuta kuin sen, mikä näyttäytyy hengelleni niin kirkkaasti ja selkeästi, ettei minulla olisi aihetta sitä epäillä.*

(2) *Toinen oli se, että jakaisin jokaisen tutkimani ongelman niin moneen osaankuin mahdollista ja kuin olisi tarpeen, jotta kykenisin ne paremmin ratkaisemaan.*

(3) *Kolmas oli se, että noudattaisin ajattelussani järjestystä aloittamalla yksinkertaisimmista ja helpoiten ymmärrettävistä seikoista ja kohoamalla vasta vähitellen, kuin asteittain, monisyisempiä asioita koskevaan tietoon; ja että olettaisin järjestystä olevan niidenkin seikkojen kesken, jotka eivät luonnostaan seuraa toinen toisistaan.*

(4) *Viimeinen oli se, että tekisin kaikkialla niin täydellisiä luetteloita ja niin yleisiä katsauksia, että varmasti tietäisin ottaneeni kaiken huomioon.*

LEIBNITZIN *kommentti toiseen sääntöön: "Tästä Descartesin säännöstä ei ole paljoa apua, ellei jakamisen taitoa selitetä. Jakamalla ongelmansa sopimattomiin osiin kokematon ongelmanratkaisija saattaa päinvastoin lisätä vaikeuksiaan."*

HENRI POINCARÉ *Descartesiin viitaten: "Menetelmä, joka pelkistää keksimisen yhdenmukaisten sääntöjen noudattamiseksi ja joka siis tekee kärsivällisestä soveltajasta geometrikon, ei oikeastaan ole luova menetelmä."*

5. Rekursio ja induktio. *Rekursio muodostuu alkuehdoista ja jatkosäännöstä tai, mikä on sama asia, alkuarvoista ja palautuskaavasta. Rekursiivisuutta on sanan laveassa mielessä myös kaikki aiemmin selvitettyyn vetoaminen.*

Yksityisestä yleiseen etenevä "epämatemaattinen" induktio on heuristinen keino, joka on erotettava matemaattisesta eli täydellisestä induktiosta.

Sekä matemaattinen induktio että rekursiivinen laskutapa esiintyvät ensimmäistä kertaa puhtaaksi viljeltyinä Blaise Pascalilla (1654).

6. Erikoistapausten kautta yleiseen tapaukseen. *Joskus koko ongelma voidaan pelkistää yhden erikoistapauksen ratkaisemiseen, josta yleinen tapaus saadaan yksinkertaisella muunnoksella. Useammin on ratkaistava kaksi tai useampia erikoistapauksia, joista yleinen tapaus saadaan yhdistämällä. Tällaisia ovat tyypillisesti esim. "virittävät tapaukset" lineaarisissa ongelmissa, "ääritapaukset" konvekseissa ratkaisujoukoissa jne.*

7. Monipuolisimmin Polyan taktiikkaa valaiseva tehtävä. *lienee ollut harjoitusten matriisitehtävä. Siinä tarkastettiin ensin erikoistapaus $m = 0$. Kun sekään ei ratkea välittömästi, vihjettä haetaan tapauksesta $m = 0, n = 2$. Matriisin kahdesti stokastisuus tulee nyt vahvasti käyttöön ja johtaa arvaukseen, että yleisen n:n tpauksessa ratkaisuna on vektori $(1/n, \ldots, 1/n)$. Tarkastus osoittaa, että tämä on todella yksittäinen ratkaisu. Mutta onko se ainoa ratkaisu? Vastaus on myöntävä, mutta vaikeasti tavoitettava ilman joltisiakin lineaarialgebran tietoja. Tapaus $n = 0$ kuitataan analogialla. Näiden kahden erikoistapauksen perusteella on helppo muodostaa kaksi virittävää ratkaisua, joiden konvekseiden kombinaatioiden joukko on haettu ratkaisujoukko.*

References

Kurssikirjat (**Lue 2 kpl., Lainaa yksi kerrallaan kirjaston kuormituksen alentamiseksi!**)

[H] G. Polya, *How to solve it. A new aspect of mathematical method*, (paperback 1973), Princeton UP, 1954.

[D] George Polya, *Mathematical Discovery. On Understanding, Learning, and Teaching Mathematics*, (paperback 1981), Wiley, 1961-67.

[L] I. Lakatos, *Proofs and refutations — the logic of mathematical discovery*, Cambridge UP, 1976.

Vaihtoehtoiset kurssikirjat - jos sattuu löytymään:

[Hadamard] 3) J. Hadamard, *The psychology of invention in the mathematical field*, (Dover - paperback), Princeton UP, 1945.

[Hintikka] 4) J. Hintikka & U. Remes, *The method of analysis — its geometrical origin and its general significance*, Reidel, 1974.

[Solow] D. Solow, *How to read and do proofs — an introduction to mathematical thought process*, Wiley, 1982.

Historia:

a) Oppikirjat ja antologiat: (Lista on vielä puutteellinen)

[Bourbaki]
[Boyer]
[Kline]
[Struik]

b) Alkuperäisemmät lähteet:

[Bolzano]
[Descartes]
[Fermat]
[Huygens]
[Leibnitz]
[Pascal]
[Poincar'e]