JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Matemaattinen ongelmanratkaisu **Ohjaus 6 (10.12.2007)**

1. Lineaarinen yhdistely

1.1. Neliömatriisi P on lohkomuotoa $P = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, missä A ja B ovat positiivisia *kahdesti stokastisia* neliömatriiseja, toisin sanoen niiden alkiot ovat positiivisia ja rivi- ja sarakesummat ykkösiä. On etsittävä kaikki *todennäköisyysvektorit* x (alkiot ei-negatiivisia ja niiden summa =1), joille

$$Px = x$$

eli

$$\sum_{i=1}^{m+n} P_{ij} x_j = x_i \quad \text{kaikilla } (j = 1, \ldots, m+n).$$

Tässä A on $m \times m$- matriisi ja B on $n \times n$-matriisi.

Millaiseen tilanteeseen tämä tehtävä voisi liittyä? Anna tarvittaessa matriisin alkioille numeroarvoja.

Ratkaisuprosessi

Seuraavat ongelmat ovat sinänsä helppoja, mutta tehtävänä on nyt ratkaisuprosessin tarkka seuraaminen ja selkeän ratkaisusuunnitleman *kirjaaminen* sen pohjalta. Kannattaa kiinnittää erityistä huomiota seuraaviin seikkoihin:

- mitä löydettiin taaksepäin työskentelemällä
- mitä löydettiin eteenpäin työskentelemällä
- mikä on ratkaisun juju
- miten tapahtui lopullisen ratkaisusuunnitelman valinta

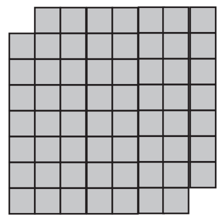
1.2. Nim-peli. Pöydällä on 15 kolikkoa. Kaksi pelaajaa ottaa pöydältä vuorotellen vähintään yhden, mutta korkeintaan viisi kolikkoa. Voittaja on se, joka saa viimeisen kolikon. Onko pelissä sellaista strategiaa, jolla aloittaja aina selviytyisi voittajaksi? Jos on, niin mikä? Jos ei, niin onko strategiaa, jolla toinen pelaaja aina selviäisi voittajaksi? Jos on, niin mikä?

1.3. 24:stä kolikosta 23 on keskenään samanlaista ja yksi muita painavampi. On etsittävä ”väärä” raha käyttämällä tasavartista vaakaa ilman punnuksia. Ei pidä tyytyä triviaaliin ratkaisuun vaan on etsittävä parasta ja kauneineta. Miten tehtävä muuttuu, jos ei etukäteen kerrota, onko ”väärä” kolikko painavampi vai kevyempi?

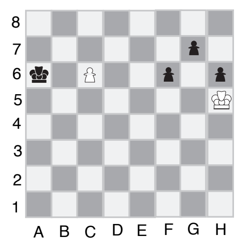
Todistamisesta

Selvitä seuraavien niukkasanaisten todistusten juonet ja poimikaa niistä esiin tutut ajattelumallit, siis *eteen- ja taaksepäin työskentely, ongelman muuntelu, apukuvion käyttö, rekursio, induktio*,.... Kirjoita todistukset uudelleen sillä tavalla kuin haluaisit ne ensikertalaiselle esitettävän.

1.4. Jos $2n \times 2n$ kokoisesta neliönmuotoisesta laudasta poistetaan yksikköneliöt kahdesta vstakkaisesta kulmasta, niin lovettua lautaa ei voida enää peittää 1×2-kokoisilla laatoilla, joita on käytettävissä $2n^2 - 1$ kpl.



Ratkaisu. Ajatellaan laudalle mustavalkoinen *šakkiruudutus* eli *palttinaruudutus*. Jokainen



kaksiruutuinen *dominolaatta* peittää yhden mustan ja yhden valkoisen ruudun. Poistetut ruudut ovat samanvärisiä, joten lovetussa laudassa on eri määrä mustia ja valkoisia ruutuja. Väite seuraa tästä. □

1.5. Otanta takaisin pannen. Kuinka monta erilaista (järjestämätöntä) n:n alkion otosta voidaan poimia $M : n$ eri alkion joukosta, kun otanta tapahtuu alkio kerrallaan ja takaisin pannen? Vastaus on taulukkokirjan mukaan $\binom{m+n-1}{n}$ eli $\binom{m+n-1}{m-1}$.

Ratkaisu (Fellerin kirjan mukaan). Esitetään perusjoukon alkiot $(m+1)$:n vierekkäisen viivan väliin jäävinä lokeroina ja merkitään poimitut alkiot palloina lokeroihin, k kertaa poimittu alkio k:na pallona, tähän tapaan:

$$|\circ\circ|\circ\circ\circ|||\circ\circ\circ\circ||\circ|.$$

Esimerkissä $m = 7$ ja $n = 10$. Kaksi viivaa kuuluu laitoihin, mutta loput $m - 1$ viivaa ja n palloa voivat esiintyä niiden välissä missä järjestyksessä tahansa. Haettu lukumäärä on siis $\binom{m+n-1}{n}$ eli $\binom{m+n-1}{m-1}$. □

1.6. Tulon odotusarvo. Todista, että jos $X_1, \dots, X_n$ ovat riippumattomia rajoitettuja satunnaismuuttujia, niin $E(X_1 \dots X_n) = E(X_1) \dots E(X_n)$.

Ratkaisu . Väite riittää todistaa oikeaksi kahden riippumattoman satunnaismuuttujan X ja Y tapauksessa ja niillekin vain siinä tapauksessa, etä ne ovat riippumattomien tapahtumien *indikaattoreita*[1], $X = I_A$ ja $Y = I_B$. Tällöin todistus on toisaalta helppo: Riippumattomuuden perusteella

$$E(XY) = E(I_A I_B) = E(I_{A \cap B}) = P(A \cap B) = P(A)P(B) = E(I_A)E(I_B) = E(X)E(Y).$$

□

[1] eli mittateorian mielessä karakteristisia funktioita