Harjoitukset 3 / 2011 RATKAISUT Lukuteoria

1. *Keksi perusteluja kaavalle* $\zeta(2) = \pi^2/6 = 0.607...$

1. perustelu: Matematiikan (ja tilastotieteen) laitoksen "virallisessa"collegepuserossa on kolme kaunista kaavaa, nimittäin

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

$$e^{i\pi} = -1 \text{ ja}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad \square$$

2. perustelu: Katsopa http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunctionZeta2.html

Numeriikkaa on aika helppo perustella: lasketaan riittävän monta termiä ja arvioidaan jäännöstermiä esim Lagrangen kaavalla.—-

2. *Todista, että yhtälöt*

$$(1) \quad f(x) = \sum_{n \le x} g\left(\frac{x}{n}\right) \quad (x \ge 1),$$

$$(2) \quad g(x) = \sum_{n \le x} \mu(n) f\left(\frac{x}{n}\right)$$

ovat ekvivalentit. (Vihje: $\mu * E = E_0$*)*

Tulkinta: $n \in \mathbb{N}$, funktiot f ja g määritellyt vähintään ao. pisteissä, esimerkikiksi kaikille positiiviluvuille. Kiinteällä $x \in \mathbb{R}$ on $n \mapsto f(\frac{x}{n})$ lukuteoreettinen funktio.

Oletetaan (1) ja lasketaan yhtälön (2) oikea puoli:

$$\begin{aligned}
\sum_{n \le x} \mu(n) f\left(\frac{x}{n}\right) &= \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \mu(n) f\left(\frac{x}{n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \mu(n) \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{x}{n} \rfloor} g\left(\frac{x}{nm}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} g\left(\frac{x}{k}\right) \sum_{n|k} \mu(n) \\
&= \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} g\left(\frac{x}{k}\right) (E * \mu)(k) \\
&= \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} g\left(\frac{x}{k}\right) (E_0(k)) \qquad = g\left(\frac{x}{1}\right) = g(x).
\end{aligned}$$

Toiseen suuntan samaan tyyliin.

3. *Todista, että*

$$\sum_{n \le x} \mu(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = 1.$$

Edellinen sovellettuna funktioon $f(x) = \lfloor x \rfloor$ antaa, että seuraavat ovat yhtäpitäviä:

$$(1) \quad \lfloor x \rfloor = \sum_{n \le x} g\left(\frac{x}{n}\right) \quad (x \ge 1),$$
$$(2) \quad g(x) = \sum_{n \le x} \mu(n) \lfloor \frac{x}{n} \rfloor$$

Valitaan kaikilla $x \in \mathbb{R}$ $g(x) = 1$ ja saadaan yhtäpitäöviksi

$$(1) \quad \lfloor x \rfloor = \sum_{n \le x} 1 \quad (x \ge 1),$$
$$(2) \quad 1 = \sum_{n \le x} \mu(n) \lfloor \frac{x}{n} \rfloor$$

(Jutilan monisteessa mainitaan, että yhtälö

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0$$

on ekvivalentti "alkulukulauseen"kanssa. Ks alla. En tältä istumalta tiedä, mitä versiota alkulukulauseesta Jutila mahtaa tarkoittaa?)

4. Seulaperiaate. *Olkoon $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$ äärellinen joukko ja $P \in \mathbb{Z}$, $P \neq 0$. N on niiden lukujen $a \in \mathcal{A}$ lukumäärä , joille $(a, P) = 1$ ja A_d niiden lukujen $a \in \mathcal{A}$ lukumäärä, joille $d|a$. Todista, että $N = \sum_{d|P} \mu(d) A_d$.*

$$N = \sum_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ (a,P)=1}} 1 = \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{d|(a,P)} \mu(d) = \sum_{d|P} \mu(d) \sum_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ d|a}} 1 = \sum_{d|P} \mu(d) A_d. \quad \square$$

5. *Määritelmä:* von Mangoldtin funktio *on*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \textit{jos } n = p^m, \\ 0 & \textit{muulloin}; \end{cases}$$

tässä p^m käy läpi (aidot) alkulukupotenssit, ts. $p \in \mathbb{P}$ ja $m \ge 1$.

Todista, että $\log n = (\Lambda * E)(n)$.

$$(\Lambda * E)(n) = \sum_{d|n} E(\frac{n}{d}) \Lambda(d) = \sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{d|n, d=p^a} \Lambda(p^a) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{d|n, d=p^a} \log p = \log n.$$

6. *Todista*

$$\Lambda(n) = -\sum_{d|n} \mu(d) \log d$$

Edellisen tehtävän nojalla

$$\begin{aligned}\Lambda(n) &= (\Lambda * E_0)(n) = (\Lambda * E * \mu)(n) = (\log * \mu)(n)\\
&= \sum_{d|n} \mu(d)\log(n/d) = \sum_{d|n} \mu(d)(\log(n) - \log(d)) =\\
&= \sum_{d|n} \mu(d)\log n - \sum_{d|n} \mu(d)\log d\\
&= \log n \sum_{d|n} \mu(d) - \sum_{d|n} \mu(d)\log d = 0 - \sum_{d|n} \mu(d),\end{aligned}$$

koska $\log n = 0$, kun $n = 1$ ja $\sum_{d|n} \mu(d) = E_0(n) = 0$ muilla $n \in \mathbb{N}$.

von Mangoldtin funktio näyttelee tärkeää osaa alkulukuteoriassa, sillä alkulukulause on ekvivalentti asymptoottisen relaation

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\le x} \Lambda(n) = 1$$

kanssa.

7. *Selvästi* $641 = 2^4 + 5^4 = 5 \cdot 2^7 + 1$. *Osoitetaan, että* $2^{32} = 641k - 1$ *jollain* $k \in \mathbb{N}$ *eli että* $2^{32} \cong -1 \pmod{641}$.

$$\begin{aligned}5 \cdot 2^7 = 640 &\equiv -1 \pmod{641} \textit{ (oletus)}\\
5^4 \cdot 2^{28} = (5 \cdot 2^7)^4 &\equiv (-1)^4 = 1 \pmod{641}\\
2^4 &\equiv -5^4 \pmod{641} \textit{ (oletus)}\\
5^4 \cdot 2^{32} &\equiv -5^4 \pmod{641}\\
2^{32} &\equiv -1 \pmod{641} \textit{ (koska } (5, 641) = 1)\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 \equiv -1 + 1 = 0 \pmod{641}$.