Exercise set 3 **Number Theory**
Tuesday OCT 4 2011 at 4 pm. Sharp **in MaD-302**

1. *Why is*

$$a) \quad \zeta(2) = \pi^2/6\,?$$

If you cannot solve this, try at least to justify, why

$$b) \quad \zeta(2) = 0.607...$$

2. *By the* **first** *Möbius inversion formula the following are equivalent for number theoretic fuctions f and g:*

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N},$$

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d)\mu(n/d) \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

By the **second** *Möbius inversion formula the following are equivalent for number theoretic fuctions f and g:*

$$f(x) = \sum_{n \le x} g\left(\frac{x}{n}\right) \quad (x \ge 1),$$
$$g(x) = \sum_{n \le x} \mu(n) f\left(\frac{x}{n}\right)$$

Prove the second! Hint: $\mu * E = E_0$

3. *Use the previous to prove the interesting formula:*

$$\sum_{n \le x} \mu(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = 1,$$

where $\lfloor x \rfloor$ denotes the integrer part of x.

(Jutila's lectures mention that the equation

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0$$

is equivalent to the "prime number theorem"below. I have not checked which version of the theorem.)

4. The sieve principle. *Let $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$ be a finite set and $P \in \mathbb{Z}$, $P \ne 0$. The question is, how many of the numbers $a \in \mathcal{A}$ have $(a, P) = 1$. Let A_d be the number of $a \in \mathcal{A}$ for which $d|a$. Then the* sieve principle *says, that the number is*

$$N = \sum_{d|P} \mu(d) A_d. \tag{1}$$

Prove the sieve principle!

Hint : EASY:

$$N = \sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\(a,P)=1}} 1 = \sum_{a\in\mathcal{A}} \sum_{d|(a,P)} \mu(d) = \cdots = \sum_{d|P} \mu(d) A_d.$$

5. *Määritelmä:* von Mangoldt's function *is*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \textit{if } n = p^m, \\ 0 & \textit{else}; \end{cases}$$

here p^m $p \in \mathbb{P}$ *and* $m \geq 1$.

Prove $\log n = (\Lambda * E)(n)$.

6. *von Mangoldt's function plays an important rôle in prime number theory, since the prime number theorem is equivalent to*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} \Lambda(n) = 1.$$

The Möbiuksen and von Mangoldtin functions are related by the formula

$$\Lambda(n) = -\sum_{d|n} \mu(d) \log d.$$

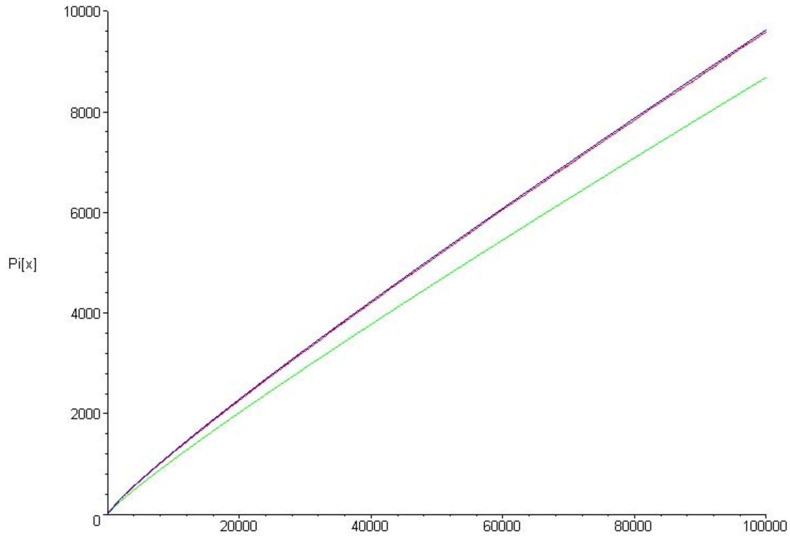
Prove this by using the previous exercise, ie. $\log n = (\Lambda * E)(n)$.

7. *Use the equation* $641 = 2^4 + 5^4 = 5 \cdot 2^7 + 1$ *to prove thata* $2^{32} = 641k - 1$ *for some* $k \in \mathbb{N}$. *(this implies that the Fermat number* $F_5 = 2^{2^5} + 1$ *is divisible by* 641.*)*

8. *Lue:*

Alkulukulause (Wikipedia)

Lukuteoriassa alkulukulause antaa alkulukujen jakauman asympoottisen arvion. Karkeasti ottaen alkulukulauseen mukaan satunnaisesti valittu positiivinen kokonaisluku N *on todennäköisyydellä* $1/\log N$ *alkuluku, missä* $\log N$ *on* N*:n luonnollinen logaritmi.* N*:n kasvaessa alkuluvut käyvät yhä harvemmiksi. Esimerkiksi kun* $N = 10000$, *keskimäärin joka yhdeksäs luku on alkuluku, kun taas arvolla* $N = 1000000000$ *suunnilleen joka* 21. *luku on alkuluku. Alkulukulause antaa arvion tälle harvenemisnopeudelle.*



KUVA 1. Funktioiden $\pi(x)$, $\frac{x\, x}{\log x}$ and $Li(x)$ kuvaajat.

LAUSE. **(Alkulukulause)** *Olkoon* $\pi(x)$ *lukua* $x+1$ *pienempien alkulukujen lukumäärä. Tällöin alkulukulauseen mukaan osamäärän* $\pi(x)\log(x)/x$ *raja-arvo on 1, kun* x *kasvaa rajatta. (Tämä ei tarkoita sitä, että näiden funktioiden erotus lähenee nollaa.)*

Lauseen otaksui Adrien-Marie Legendre *vuonna 1796, and sen todistivat* Jacques Hadamard *and* Charles-Jean de la Vallée-Poussin *toisistaan riippumatta vuonna 1896. Molempien todistus perustuu funktioteoriaan. Tarkemmin sanottuna he osoittivat (lemman), että Riemannin zeeta-funktiolla* $\zeta(s)$ *ei ole nollakohtia* $s = x + iy$, *joilla* $x = Re(s) = 1$.

$\pi(x)$ logaritmisten integraalien avulla

Carl Friedrich Gauss *otaksui alkulukulausetta tarkemman asymptoottisen arvion. Määritellään* logaritminen integraali $Li(x)$ *asettamalla*

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{(\log x)^k} = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{(\log x)^2} + \frac{x}{(\log x)^3} + \dots.$$

Alkulukulause voidaan kirjoittaa myös muodossa $\pi(x)\ Li(x)$. *Tämän etuna on se, että arvion virhetermiä voidaan pienentää. Hadamard and de la Vallée Poussin todistivat, että*

$$|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| \le Cxe^{-a\sqrt{\log x}}$$

jollain positiivisella vakiolla a. *Arviota myöhemmin yhä parannettu. Paras arvio riippu* "Riemannin hypoteesista". *Jos se pätee, niin* $|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| \le C\cdot\sqrt{x}\cdot\log x$

Logaritminen integraali $\mathrm{Li}(x)$ *on suurempi kuin* $\pi(x)$ *kaikilla riittävän pienillä luvuilla* x. *Vuonna 1914* J. E. Littlewood *todisti, että lausekkeiden suuruusjärjestys vaihtuu riittävän suurella luvulla. Ensimmäisen kerran tämä tapahtuu, kun* x *on suuruusluokkaa* 10^{316}.

Parempi selostus on englanninkielisellä sivulla, joka löytyy googlaamalla "prime number theorem".