JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Logiikka **6. harjoitustehtävät**

AJAT JA SALIT : to 25.10. klo 16-18 MaD 380

ma 29.10. klo 10-12 MaD 381

Maanantaina 22.10. ei pidetä harjoituksia eikä tiistaina 23.10 luentoa.

1. (3.2.5) Osoita, että $\neg P_1(c_0)$ ei ole lauseiden $P_0(c_0)$ ja $\neg\exists x_0(P_1(x_0) \wedge \neg P_0(x_0))$ looginen seuraus. (Laadi semanttinen puu lauseiden $P_0(c_0)$, $\neg\exists x_0(P_1(x_0) \wedge \neg P_0(x_0))$ ja $\neg\neg P_1(c_0)$ konjunktiolle ja konstruoi puun lopullisen avoimen oksan avulla asiaankuuluva malli.)

2. (3.3.1)
$\{\forall x_0(\neg P_0(x_0) \to P_1(x_0)), \forall x_1 \neg P_0(x_1)\} \vdash \forall x_0 P_1(x_0)$

3. (3.3.3) Seuraavissa kolmessa päättelyssä on kussakin virhe. Mikä?

$$\frac{\dfrac{\forall x_0 \exists x_1 R_0(x_1, x_0)}{\exists x_1 R_0(x_1, x_0)}\forall E \qquad \dfrac{[R_0(x_0, x_0)]}{\exists x_0 R_0(x_0, x_0)}\exists T}{\exists x_0 R_0(x_0, x_0)}\exists E \tag{3.32}$$

$$\frac{\exists x_0 P_0(x_0) \dfrac{\dfrac{[P_0(x_0)] P_1(x_0)}{P_0(x_0) \wedge P_1(x_0)}\wedge T}{\exists x_0(P_0(x_0) \wedge P_1(x_0))}\exists T}{\exists x_0(P_0(x_0) \wedge P_1(x_0))}\exists E \tag{3.33}$$

$$\frac{\exists x_0 R_0(x_0, x_0) \dfrac{[R_0(x_0, x_0)]}{\exists x_1 R_0(x_0, x_1)}\exists T}{\exists x_1 R_0(x_0, x_1)}\exists E. \tag{3.34}$$

4. (3.3.7) Osoita, että ekvivalenssirelaatioiden teorian $\mathcal{T}_\sim$ aksioomista mikään ei ole pääteltävissä muista.

5. (3.4.1) ja (3.4.2)
a) $\vdash \forall x_1(A \to B) \to (\exists x_1 A \to B)$, kun x_i ei esiinny vapaana kaavassa B.
b) $\vdash \exists x_1(A \to B) \to (\forall x_1 A \to B)$, kun x_i ei esiinny vapaana kaavassa B.

6. (3.4.6) Osoita, että teoria, jonka aksioomat ovat

$$\begin{gathered}\forall x_0 P_0(x_0),\\ \exists x_0(P_0(x_0) \leftrightarrow R_0(x_0, c_0)),\\ \forall x_0 \forall x_1(\neg R_0(x_0, x_1) \vee R_0(x_1, x_0)),\\ \forall x_0 \neg R_0(c_0, x_0)\end{gathered}$$

on ristiriitainen.

7. (3.4.7) Osoita, että teoria, jolla on malli, on ristiriidaton.

8. (3.4.13) Todista kompaktisuuslause: Jos teorian $\mathcal{T}$ jokaisella äärellisellä osajoukolla on malli, niin teorialla $\mathcal{T}$ on malli.