Logiikka **5. harjoitustehtävät**
15.10.2007

Maanantaina 22.10. ei pidetä harjoituksia eikä tiistaina 23.10 luentoa. (Olen virkamatkalla) Viimeiset eli kierroksen 6 harjoitukset pidetään myöhemmin ilmoitettavana aikana — todennäköisesti ainakin yksi ryhmä maanantaina 29.10.

1. (3.1.4) *Lauseiksi* sanotaan predikaattilogiikassa sellaisia kaavoja, joissa ei esiinny vapaita muuttujia ja joiden totuus siis ei riipu tulkintajonosta, vaan pelkästään mallista. Laadi malli, jossa lause $\forall x \exists y (R(x,y) \wedge \neg R(y,x) \wedge \neg R(x,x))$ on tosi, mutta lause $\forall x \forall y (R(x,y) \wedge \neg R(y,x))$ on epätosi. Keksimistä helpottaa ehkä, jos piirrät relaatiot nuolina.

2. (3.1.6) L-kaavan A sanotaan olevan *validi*, jos se on tosi **kaikissa malleissa ja tulkintajonoissa**. Kaavan validisuus nähdään siis osoittamalla, että mielivaltainen tulkintajono mielivaltasiessa mallissa toteuttaa kaavan. Epävalidisuus todetaaan esittämällä malli ja tulkintajono, joissa lause ei ole tosi. Onko kaava

$$\exists x_0 \forall x_1 A \to \forall x_1 \exists x_0 A$$

validi? Miksi? (Entä kaava $\exists x_i \forall x_j A \to \forall x_j \exists x_i A$?)

L-kaavan B sanotaan olevan *kaavojen* $A_1, \ldots, A_n$ *looginen seuraus*, eli $\{A_1, \ldots, A_n\} \implies B$, jos $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to B$ on validi. Päteekö $\exists x_0 \forall x_1 A \implies \forall x_1 \exists x_0 A$?

3. (3.1.7) Osoita, että $(\forall x_0 P_0(x_0) \to \forall x_0 P_1(x_0)) \not\Rightarrow \forall x_0 (P_0(x_0) \to P_1(x_0))$.

4. (3.1.8) Todista $\forall x_i (A \to B) \implies (\forall x_i A \to \forall x_i B)$.

5. (3.1.9) Osoita, että

$$\exists x_0 \forall x_1 ((R_0(x_0,x_1) \wedge \neg R_0(x_1,x_0)) \to (R_0(x_0,x_0) \leftrightarrow R_0(x_1,x_1)))$$

ei ole validi.

6. (3.2.1) Esitä semanttinen todistus lauseelle $P_0(c_0)$ lauseista $\forall x_0 (P_0(x_0) \vee P_1(x_0)$ ja $\neg P_1(c_0)$

7. (3.2.2) Esitä semanttinen todistus lauseelle $\neg \exists x_0 \forall x_1 R_0(x_0,x_1) \to \forall x_0 \exists x_1 \neg R_0(x_0,x_1)$

8. (3.2.3) Esitä semanttinen todistus lauseelle $(P_0(c_0) \wedge \exists x_0 A) \to \exists x_0 (P_0(c_O) \wedge A)$.

9. (3.2.4) Osoita semanttisen puun avulla, että lauseella

$$P_0(c_1) \wedge \forall x_0 A \wedge \neg \forall x_0 (P_0(c_1) \leftrightarrow A)$$

ei ole mallia.

Tehtävän 4.4 ratkaisu:

Olkoot $A_1, \ldots, A_n$ propositiolauseita. Osoita, että seuraavat ehdot ovat ekvivalentteja:

(a) $\{A_1, \ldots, A_n\}$ on ristiriidaton.
(b) $\nvdash \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$
(c) $\nvdash (A_1 \wedge \cdots \wedge A_{n-1}) \to \neg A_n$

Vaihtoehto 1) "päättelyt":

Koska väitteet ovat "negaatioita"on houkuttelevaa todistella epäsuorasti, käytännössä todistamalla, että seuraavat ovat yhtäpitäviä keskenään:

(a') $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ on ristiriitainen (RR).
(b') $\vdash \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$
(c') $\vdash (A_1 \wedge \cdots \wedge A_{n-1}) \to \neg A_n$

(b'$\mapsto$ a'): Oletetaan, että b') on totta ja todistetaan lausejoukon $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ ristiriitaisuus: Peräkkäisillä konjunktion tuonneilla saadaan $\mathcal{A} \vdash (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$ ja vastaoletuksen b') mukaan $\vdash \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$ ja siis samalla päättelyllä $\mathcal{A} \vdash \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$. Kaikenkaikkiaan on $\mathcal{A}$:sta päätelty B ja $\neg B$, (missä $B = (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$) joten $\mathcal{A}$ on RR.

(a'$\mapsto$ c'): Oletetaan, että a') on totta eli että $\mathcal{A}$ on RR ja päätellään tyhjästä $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_{n-1}) \to \neg A_n$. Koska pääteltävä on implikaatio, riittää (implikaation tuonti!) päätellä $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_{n-1}) \vdash \neg A_n$. Eliminoimalla $\wedge$ toistuvasti saadaan kaikilla $j = 1, \ldots, n-1$ pääteltyä $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_{n-1}) \vdash A_j$. Negaation $\neg A_n$ päättelemiseksi oletetaan (hakasulkeissa) sen negaatio $\neg\neg A_n$, päätellään siitä negaation poistolla A_n ja yhdessä jo pääteltyjen $A_1, \ldots, A_{n-1}$ kanssa onkin nyt päätelty kaikkai $\mathcal{A}$:n alkiot. Näistä taas voi oletuksen a') mukaan päätellä jonkin $B \wedge \neg B$:n. Negaation $\neg A_n$ tuonti onnistui siis, joten haluttu implikaatio on johdettu. (Lukija piirtäköön tämän kaiken kaaviokuvaksi kirjan malliin.)

(c'$\mapsto$ b'): Oletetaan, että c') on totta eli että $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_{n-1}) \to \neg A_n$ ja päätellään tyhjästä $\vdash \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$. Negaatio tuodaan päättelemällä negeerattavasta lauseesta ristiriita. Siksi oletetaan (hakasulkeissa) $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$ ja päätellään siitä konjunktion poistolla sekä $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_{n-1})$ että A_n. Käyttämällä päätelyä, jonka olemassaolo oletettiin (c')-kohtana, päätellään edelleen $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_{n-1})$:sta $\neg A_n$, jolloin on päätelty sekä A_n että $\neg A_n$, siis ristiriita. Negaation $\neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$ tuonti onnistui siis, kuten pitikin.

Vaihtoehto 2) "täydellisyyslause":

(a$\mapsto$ b) ja c): Jos a), niin on olemassa totuusjakauma, jossa jokainen A_j ($1 \leq j \leq n$) on tosi. Tässä jakaumassa sekä $\neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$ että $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_{n-1}) \to \neg A_n$ ovat epätosia, eikä kumpaakaan siis **eheyslauseen** vuoksi voi päätellä tyhjästä lausejoukosta (jonka kaikki alkiot ovat tosia!).

(b$\mapsto$ a): $\nvdash \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$ merkitsee samaa kuin $\emptyset \nvdash \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$, joka **täydellisyyslauseen** vuoksi tarkoittaa samaa kuin $\emptyset \implies \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$ eli, että on olemasa totuusjakauma, jossa $\neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$ (ja kaikki $\emptyset$:n alkiot ovat tosia, mikä on olematon ehto.). Tässä totuusjakaumassa $\mathcal{A}$:n alkiot ovat kaikki tosia, joten $\mathcal{A}$ on ristiriidaton.

(c$\mapsto$ b): on helppo ja jätetään lukijalle.