JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Logiikka **4. harjoitustehtävät**
8.10.2007 (10-12 MaD 381 ja 16-18 MaD 302)

Maanantaina 22.10. ei pidetä harjoituksia eikä tiistaina 23.10 luentoa. (Olen virkamatkalla) Viimeiset eli kierroksen 6 harjoitukset pidetään myöhemmin ilmoitettavana aikana — todennäköisesti ainakin yksi ryhmä maanantaina 29.10.

Kolmiosaiset numerot ovat Salmisen ja Väänäsen kirjasta.

1. (2.7.4) Päteekö

(a) $\{p_0 \to p_1, p_0 \vee p_1\} \vdash p_1 \to p_0$
(b) $\{p_0 \leftrightarrow (p_1 \to p_2), p_0 \leftrightarrow p_1\} \vdash p_2$

Ohje: Eheyslausetta voi käyttää päättelyn mahdollisuuden kumoamiseen. Toisaalta myönteinen tulos vaatii päättelyn keksimisen tai täydellisyyslauseen koko voiman.

2. (2.7.5) Ovatko seuraavat lausejoukot ristiriidattomia?

(a) $\{(\neg p_1 \wedge p_2) \to p_0,\ p_1 \to (\neg p_0 \to p_2),\ p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$
(b) $\{p_0 \to p_1,\ p_1 \to p_2,\ p_2 \to p_3,\ p_3 \to \neg p_0\}$

Ohje: Ristiriidattomuuden toteamiseksi riittää löytää totuusjakauma, joka tekee kaikista toden! Täydellisyyslauseen todistuksen (Lindenbaumin lemman käyttö) mukaan tämä ehto on myös välttämätön.

3. (2.7.6) Onko lausejoukko

$$\{p_0 \to p_1,\ (p_0 \wedge p_2) \to (p_1 \wedge p_3),\ (p_0 \wedge p_2 \wedge p_4) \to (p_1 \wedge p_3 \wedge p_5), \dots\}$$

ristiriidaton?

4. (2.7.7) Olkoot $A_1, \dots, A_n$ propositiolauseita. Osoita, että seuraavat ehdot ovat ekvivalentteja:

(a) $\{A_1, \dots, A_n\}$ on ristiriidaton.
(b) $\nvdash \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$
(c) $\nvdash (A_1 \wedge \cdots \wedge A_{n-1}) \to \neg A_n$

Ohje: Päättelyt tai täydellisyyslause.

5. (3.1.5) Olkoon $L = \{R(x, y)\}$. Määritellään $L-$malli $\mathcal{M}$ seuraavasti: $dom(\mathcal{M}) = \{0, 1, 2, 3\}$, $R_0^{\mathcal{M}} = \{(1, 0), (1, 2), (0, 3), (3, 2)\}$. Olkoon ω seuraava mallin $\mathcal{M}$ tulkintajono:

$$\omega(x_0) = 2,\ \omega(x_1) = 3,\ \omega(x_2) = 0,\ \omega(x_i) = 2, \text{ jos } i \geq 3.$$

Osoita, että tulkintajono ω toteuttaa mallisssa $\mathcal{M}$ kaavan

$$\exists x_3(R_0(x_2, x_3) \wedge R_0(x_3, x_0)),$$

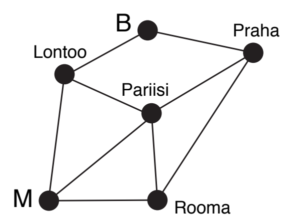
mutta ei kaavaa

$$\exists x_2(R_0(x_2, x_3) \wedge R_0(x_3, x_0)).$$

KÄÄNNÄ!

6. (3.1.3) Laadi kirjahylly, jossa lause $\forall x(Pieni(x) \to \exists y(Suuri(y) \land Alla(x, y)))$ on epätosi.

7. (3.1.1) Tarkastellaan kuvan kaupunkiverkkoa.



KUVA 1. Kaupunkiverkko

Kirjoita symbolikielellä ja osoita todeksi tai epätodeksi seuraavat lauseet:

(a) Jokainen Lontooseen yhteydessä oleva kaupunki on yhteydessä Roomaan tai Prahaan

(b) Mikään Roomaan yhteydessä oleva kaupunki ei ole yhteydessä Lontooseen.

8. (3.1.2) Tutki seuraavia lauseita tehtävän 1 kaupunkiverkossa

(a) Jokainen kaupunki, paitsi Praha, on yhteydessä kaupunkiin, josta ei ole yhteyttä Prahaan.

(b) Jokainen Prahaan yhteydessä oleva kaupunki ei ole yhteydessä Lontooseen.