Logiikka 2006 **Harjoitus 6**
maanantai 8.5. klo. 10-12 ja 16-18 MaD 302

Viimeinen luento pidetään 2.5, loppukoe keskiviikkona 10.5. Järjestän loppukokeen myös 3.5. Kummassakin kokeessa tentitään koko kurssi. Osallistua saa vain toiseen. Tentissä ei kirjan käyttö ole luvallista, mutta jaan tarvittavat taulukot.

Rästiin jääneet viime kerralta:.

1. (3.2.3) Esitä semanttinen todistus lauseelle $(P_0(c_0) \wedge \exists x_0 A) \to \exists x_0(P_0(c_O) \wedge A)$.

2. (3.2.4) Osoita semanttisen puun avulla, että lauseella

$$P_0(c_1) \wedge \forall x_0 A \wedge \neg\forall x_0(P_0(c_1) \leftrightarrow A)$$

ei ole mallia.

Uusia:.

3. (3.2.5) Osoita, että $\neg P_1(c_0)$ ei ole lauseiden $P_0(c_0)$ ja $\neg\exists x_0(P_1(x_0) \wedge \neg P_0(x_0))$ looginen seuraus. (Laadi semanttinen puu lauseiden $P_0(c_0)$, $\neg\exists x_0(P_1(x_0) \wedge \neg P_0(x_0))$ ja $\neg\neg P_1(c_0)$ konjunktiolle ja konstruoi puun lopullisen avoimen oksan avulla asiaankuuluva malli.)

4. (3.3.1) $\{\forall x_0(\neg P_0(x_0) \to P_1(x_0)), \forall x_1 \neg P_0(x_1)\} \vdash \forall x_0 P_1(x_0)$

5. (3.3.3) Seuraavissa kolmessa päättelyssä on kussakin virhe. Mikä?

$$\frac{\dfrac{\forall x_0 \exists x_1 R_0(x_1, x_0)}{\exists x_1 R_0(x_1, x_0)}\forall E \qquad \dfrac{[R_0(x_0, x_0)]}{\exists x_0 R_0(x_0, x_0)}\exists T}{\exists x_0 R_0(x_0, x_0)}\exists E \tag{3.32}$$

$$\frac{\exists x_0 P_0(x_0) \qquad \dfrac{\dfrac{[P_0(x_0)] \quad P_1(x_0)}{P_0(x_0) \wedge P_1(x_0)}\wedge T}{\exists x_0(P_0(x_0) \wedge P_1(x_0))}\exists T}{\exists x_0(P_0(x_0) \wedge P_1(x_0))}\exists E \tag{3.33}$$

$$\frac{\exists x_0 R_0(x_0, x_0) \qquad \dfrac{[R_0(x_0, x_0)]}{\exists x_1 R_0(x_0, x_1)}\exists T}{\exists x_1 R_0(x_0, x_1)}\exists E \tag{3.34}$$

6. (3.3.7) Osoita, että ekvivalenssirelaatioiden teorian $\mathcal{T}_\sim$ aksioomista mikään ei ole pääteltävissä muista.

7. (3.4.1) a) $\vdash \forall x_i(A \to B) \to (\exists x_i A \to B)$, kun x_i ei esiinny vapaana kaavassa B.
b) $\vdash \exists x_i(A \to B) \to (\forall x_i A \to B)$, kun x_i ei esiinny vapaana kaavassa B.

8. **(3.4.6)** Osoita, että teoria, jonka aksioomat ovat

$$\begin{aligned}
&\forall x_0 P_0(x_0),\\
&\exists x_0 (P_0(x_0) \leftrightarrow R_0(x_0, c_0)),\\
&\forall x_0 \forall x_1 (\neg R_0(x_0, x_1) \vee R_0(x_1, x_0)),\\
&\forall x_0 \neg R_0(c_0, x_0)
\end{aligned}$$

on ristiriitainen.

9. **(3.4.7)** Osoita, että teoria, jolla on malli, on ristiriidaton.

10. **(3.4.13)** Todista *kompaktisuuslause*: Jos teorian T jokaisella äärellisellä osajoukolla on malli, niin teorialla T on malli.