Logiikka 2006 **Harjoitus 5**

maanantai 24.4. klo. 10-12 ja 16-18 MaD 302

Vapunpäivänä 1.5. ei pidetä harjoituksia, vaan viimeiset eli kierroksen 6 harjoitukset pidetään maanantaina 8.5. Loppukoe pidetään keskiviikkona 10.5. (Koska niin on etukäteen ilmoitettu, järjestän loppukokeen myös 3.5. Kummassakin kokeessa tentitään koko kurssi. Osallistua saa vain toiseen.) Viimeinen luento pidetään ...? Niin, tuostahan täytynee sopia!

1. **(3.1.4)** *Lauseiksi* sanotaan predikaattilogiikassa sellaisia kaavoja, joissa ei esiinny vapaita muuttujia ja joiden totuus siis ei riipu tulkintajonosta, vaan pelkästään mallista. Laadi malli, jossa lause

$$\forall x \exists y (R(x,y) \wedge \neg R(y,x) \wedge \neg R(x,x))$$

on tosi, mutta lause

$$\forall x \forall y (R(x,y) \wedge \neg R(y,x))$$

on epätosi. Keksimistä helpottaa ehkä, jos piirrät relaatiot nuolina.

2. **(3.1.6)** L-kaavan A sanotaan olevan *validi*, jos se on tosi **kaikissa malleissa ja tulkintajonoissa**. Kaavan validisuus nähdään siis osoittamalla, että mielivaltainen tulkintajono mielivaltasiessa mallissa toteuttaa kaavan. Epävalidisuus todetaaan esittämällä malli ja tulkintajono, joissa lause ei ole tosi. Onko kaava

$$\exists x_0 \forall x_1 A \rightarrow \forall x_1 \exists x_0 A$$

validi? Miksi? (Entä kaava $\exists x_i \forall x_j A \rightarrow \forall x_j \exists x_i A$?)

L-kaavan B sanotaan olevan *kaavojen* $A_1, \ldots, A_n$ *looginen seuraus*, eli $\{A_1, \ldots, A_n\} \implies B$, jos $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \rightarrow B$ on validi. Päteekö $\exists x_0 \forall x_1 A \implies \forall x_1 \exists x_0 A$?

3. **(3.1.7)** Osoita, että $(\forall x_0 P_0(x_0) \rightarrow \forall x_0 P_1(x_0)) \not\Rightarrow \forall x_0 (P_0(x_0) \rightarrow P_1(x_0))$.

4. **(3.1.8)** Todista $\forall x_i (A \rightarrow B) \implies (\forall x_i A \rightarrow \forall x_i B)$.

5. **(3.1.9)** Osoita, että

$$\exists x_0 \forall x_1 ((R_0(x_0,x_1) \wedge \neg R_0(x_1,x_0)) \rightarrow (R_0(x_0,x_0) \leftrightarrow R_0(x_1,x_1)))$$

ei ole validi.

Luku 3.2 Semanttinen puu.

6. **(3.2.1)** Esitä semanttinen todistus lauseelle $P_0(c_0)$ lauseista $\forall x_0 (P_0(x_0) \vee P_1(x_0)$ ja $\neg P_1(c_0)$

7. **(3.2.2)** Esitä semanttinen todistus lauseelle $\neg \exists x_0 \forall x_1 R_0(x_0,x_1) \rightarrow \forall x_0 \exists x_1 \neg R_0(x_0,x_1)$

8. **(3.2.3)** Esitä semanttinen todistus lauseelle $(P_0(c_0) \wedge \exists x_0 A) \rightarrow \exists x_0 (P_0(c_O) \wedge A)$.

9. **(3.2.4)** Osoita semanttisen puun avulla, että lauseella

$$P_0(c_1) \wedge \forall x_0 A \wedge \neg \forall x_0 (P_0(c_1) \leftrightarrow A)$$

ei ole mallia.

KÄÄNNÄ.

Tehtävän 4.4 ratkaisu. Olkoot $A_1, \dots, A_n$ propositiolauseita. Osoita, että seuraavat ehdot ovat ekvivalentteja:

(a) $\{A_1, \dots, A_n\}$ on ristiriidaton.
(b) $\nvdash \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$
(c) $\nvdash (A_1 \wedge \cdots \wedge A_{n-1}) \to \neg A_n$

Vaihtoehto 1) "päättelyt":

Koska väitteet ovat "negaatioita" on houkuttelevaa todistella epäsuorasti, käytännössä todistamalla, että seuraavat ovat yhtäpitäviä keskenään:

(a') $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ on ristiriitainen (RR).
(b') $\vdash \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$
(c') $\vdash (A_1 \wedge \cdots \wedge A_{n-1}) \to \neg A_n$

(b'$\mapsto$ a'): Oletetaan, että b') on totta ja todistetaan lausejoukon $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ ristiriitaisuus: Peräkkäisillä konjunktion tuonneilla saadaan $\mathcal{A} \vdash (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$ ja vastaoletuksen b') mukaan $\vdash \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$ ja siis samalla päättelyllä $\mathcal{A} \vdash \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$. Kaikenkaikkiaan on $\mathcal{A}$:sta päätelty B ja $\neg B$, (missä $B = (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$) joten $\mathcal{A}$ on RR.

(a'$\mapsto$ c'): Oletetaan, että a') on totta eli että $\mathcal{A}$ on RR ja päätellään tyhjästä $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_{n-1}) \to \neg A_n$. Koska pääteltävä on implikaatio, riittää (implikaation tuonti!) päätellä $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_{n-1}) \vdash \neg A_n$. Eliminoimalla $\wedge$ toistuvasti saadaan kaikilla $j = 1, \dots, n-1$ pääteltyä $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_{n-1}) \vdash A_j$. Negaation $\neg A_n$ päättelemiseksi oletetaaan (hakasulkeissa) sen negaatio $\neg\neg A_n$, päätellään siitä negaation poistolla A_n ja yhdessä jo pääteltyjen $A_1, \dots, A_{n-1}$ kanssa onkin nyt päätelty kaikkai $\mathcal{A}$:n alkiot. Näistä taas voi oletuksen a') mukaan päätellä jonkin $B \wedge \neg B$:n. Negaation $\neg A_n$ tuonti onnistui siis, joten haluttu implikaatio on johdettu. (Lukija piirtäköön tämän kaiken kaaviokuvaksi kirjan malliin.)

(c'$\mapsto$ b'): Oletetaan, että c') on totta eli että $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_{n-1}) \to \neg A_n$ ja päätellään tyhjästä $\vdash \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$. Negaatio tuodaan päättelemällä negeerattavasta lauseesta ristiriita. Siksi oletetaan (hakasulkeissa) $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$ ja päätellään siitä konjunktion poistolla sekä $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_{n-1})$ että A_n. Käyttämällä päätelyä, jonka olemassaolo oletettiin (c')-kohtana, päätellään edelleen $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_{n-1})$:sta $\neg A_n$, jolloin on päätelty sekä A_n että $\neg A_n$, siis ristiriita. Negaation $\neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$ tuonti onnistui siis, kuten pitikin.

Vaihtoehto 2) "täydellisyyslause":

(a$\mapsto$ b) ja c): Jos a), niin on olemassa totuusjakauma, jossa jokainen A_j $(1 \leq j \leq n)$ on tosi. Tässä jakaumassa sekä $\neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$ että $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_{n-1}) \to \neg A_n$ ovat epätosia, eikä kumpaakaan siis **eheyslauseen** vuoksi voi päätellä tyhjästä lausejoukosta (jonka kaikki alkiot ovat tosia!).

(b$\mapsto$ a): $\nvdash \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$ merkitsee samaa kuin $\emptyset \nvdash \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$, joka **täydellisyyslauseen** vuoksi tarkoittaa samaa kuin $\emptyset \implies \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$ eli, että on olemasa totuusjakauma, jossa $\neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$ (ja kaikki $\emptyset$:n alkiot ovat tosia, mikä on olematon ehto.). Tässä totuusjakaumassa $\mathcal{A}$:n alkiot ovat kaikki tosia, joten $\mathcal{A}$ on ristiriidaton.

(c$\mapsto$ b): on helppo ja jätetään lukijalle.