

maanantai 10.4. klo. 10-12 ja 16-18 MaD 302

1. (2.7.4) Pätee

- (a) $\{p_0 \rightarrow p_1, p_0 \vee p_1\} \vdash p_1 \rightarrow p_0$
 (b) $\{p_0 \leftrightarrow (p_1 \rightarrow p_2), p_0 \leftrightarrow p_1\} \vdash p_2$

Ohje: Eheyslausetta voi käyttää päättelyn mahdollisuuden kumoamiseen. Toisaalta myönteinen tulos vaatii päättelyn keksimisen tai täydellisyyslauseen koko voiman.

2. (2.7.5) Ovatko seuraavat lausejoukot ristiriidattomia?

- (a) $\{(\neg p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_0, p_1 \rightarrow (\neg p_0 \rightarrow p_2), p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$
 (b) $\{p_0 \rightarrow p_1, p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_3, p_3 \rightarrow \neg p_0\}$

Ohje: Ristiriidattomuuden toteamiseksi riittää löytää totuusjakauma, joka tekee kaikista toden! Täydellisyyslauseen todistuksen (Lindenbaumin lemman käyttö) mukaan tämä ehto on myös välttämätön.

3. (2.7.6) Onko lausejoukko

$$\{p_0 \rightarrow p_1, (p_0 \wedge p_2) \rightarrow (p_1 \wedge p_3), (p_0 \wedge p_2 \wedge p_4) \rightarrow (p_1 \wedge p_3 \wedge p_5), \dots\}$$

ristiriidaton?

4. (2.7.7) Olkoot A_1, \dots, A_n propositiolauseita. Osoita, että seuraavat ehdot ovat ekvivalentteja:

- (a) $\{A_1, \dots, A_n\}$ on ristiriidaton.
 (b) $\not\vdash \neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$
 (c) $\not\vdash (A_1 \wedge \dots \wedge A_{n-1}) \rightarrow \neg A_n$

Ohje: Päättelyt tai täydellisyyslause.

Luku 3.1 Muuttuja, kaava, totuus.

5. (3.1.5) Olkoon $L = \{R(x, y)\}$. Määritellään L -malli \mathcal{M} seuraavasti: $\text{dom}(\mathcal{M}) = \{0, 1, 2, 3\}$, $R_0^{\mathcal{M}} = \{(1, 0), (1, 2), (0, 3), (3, 2)\}$. Olkoon ω seuraava mallin \mathcal{M} tulkintajono:

$$\omega(x_0) = 2, \omega(x_1) = 3, \omega(x_2) = 0, \omega(x_i) = 2, \text{ jos } i \geq 3.$$

Osoita, että tulkintajono ω toteuttaa mallissa \mathcal{M} kaavan

$$\exists x_3 (R_0(x_2, x_3) \wedge R_0(x_3, x_0)),$$

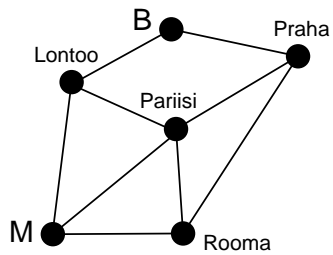
mutta ei kaavaa

$$\exists x_2 (R_0(x_2, x_3) \wedge R_0(x_3, x_0)).$$

6. (3.1.3) Laadi kirjahylly, jossa lause $\forall x(Pieni(x) \rightarrow \exists y(Suuri(y) \wedge Alla(x, y)))$ on epätosi.

KÄÄNNÄ

7. (3.1.1) Tarkastellaan kuvan kaupunkiverkkoa.



Kirjoita symbolikielellä ja osoita todeksi tai epätodeksi seuraavat lauseet:

- (a) Jokainen Lontooseen yhteydessä oleva kaupunki on yhteydessä Roomaan tai Prahaan
- (b) Mikään Roomaan yhteydessä oleva kaupunki ei ole yhteydessä Lontooseen.

8. (3.1.2) Tutki seuraavia lauseita tehtävän 1 kaupunkiverkossa

- (a) Jokainen kaupunki, paitsi Praha, on yhteydessä kaupunkiin, josta ei ole yhteyttä Prahaan.
- (b) Jokainen Prahaan yhteydessä oleva kaupunki ei ole yhteydessä Lontooseen.